Devoir Surveillé 7 – Physique-Chimie

D.Malka – MPSI 2015-2016 – Lycée Saint-Exupéry

25.03.2016

Durée de l'épreuve : 4h00.

L'usage de la calculatrice est autorisé.

L'énoncé de ce devoir comporte 7 pages.

— *Si, au cours de l'épreuve, vous repérez ce qui vous semble être une erreur d'énoncé, signalez le sur votre copie et poursuivez votre composition en expliquant les raisons des initiatives que vous êtes amené à prendre.*
— *Il ne faudra pas hésiter à formuler des commentaires. Le barème tiendra compte de ces initiatives ainsi que des qualités de rédaction de la copie.*
— *La numérotation des exercices doit être respectée. Les résultats doivent être systématiquement encadrés.*

Problème 1 – Une pile au lithium

De nombreux appareils embarqués portables fonctionnent avec des piles au lithium. Elles peuvent être de forme bouton ou cylindriques. Nous cherchons à comprendre l'intérêt du choix du lithium dans leur conception.

1. **Le lithium et ses propriétés**

1.1 *L'élément lithium*
L'isotope le plus abondant $(92,5\%)$ sur terre est ${}^{7}_{3}Li$.

1.1.1 Donner la composition d'un atome de lithium et donner un ordre de grandeur de la masse molaire atomique du lithium.

1.1.2 Donner sa configuration électronique.

1.1.3 Quel ion stable peut-il former ? Justifier.

1.1.4 A quelle famille le lithium appartient-il ? Est-il réducteur ou oxydant ?

1.2 *Structure cristalline*
À une température ordinaire, le lithium cristallise dans un système cubique centré (fig.1) de paramètre de maille $a = 0{,}35$ nm.

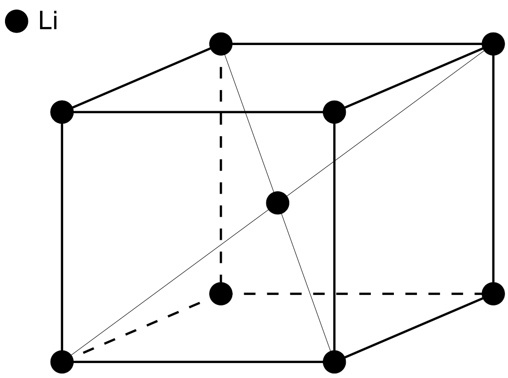


Figure 1 – Réseau cubique centré

1.2.1 Déterminer le rayon atomique r_{Li} du lithium.

1.2.2 Déterminer la masse volumique du lithium.

1.2.3 Déterminer la compacité du lithium.

2. **Structure du chlorure de thionyle**
   On donne les numéros atomiques suivants : $Z(O) = 8$; $Z(Cl) = 17$; $Z(S) = 16$.

   Proposer une formule de Lewis pour le chlorure de thionyle $SOCl_2$; l'atome de soufre étant central et hypervalent.

3. **La pile au lithium**
   Une modélisation simple d'une pile au lithium est proposée ici. Une des électrodes est constituée de lithium $Li(s)$, l'autre est une électrode liquide qui joue en même temps le rôle d'électrolyte.

3.1 *Électrode de lithium*
À 25°C, on donne $\dfrac{RT}{\mathcal{F}} \ln 10 \approx 0{,}06$ V et $E°(Li^+/Li) = -3{,}03$ V.

3.1.1 Exprimer le potentiel de cette électrode noté E_{Li} en présence d'ions Li^+ et faire l'application numérique pour une concentration $[Li^+] = 0,01\, mol.L^{-1}$.

3.1.2 L'électrode de lithium joue-t-elle alors le rôle de cathode ou d'anode ?

3.2 *Électrode liquide au chlorure de thionyle ($SOCl_2$)*
Elle est constituée d'une électrode de carbone poreux remplie de chlorure de thionyle. Ce dernier est à la fois le solvant et l'électrolyte. La demi-équation est :

$$2SOCl_2 + 4e^- = S + SO_2 + 4Cl^-$$

3.2.1 Déterminer les nombres d'oxydation des différents éléments dans les 4 composés de la demi-équation précédente sachant que l'élément chlore ne change pas de nombre d'oxydation.

3.2.2 L'électrode liquide joue-t-elle alors le rôle de cathode ou d'anode ?
Une mesure du potentiel d'oxydoréduction donne $E = 0{,}65$ V par rapport l'électrode standard à hydrogène.

3.3 *Bilan de la pile*

3.3.1 Faire une représentation schématique de la pile en précisant bien la nature de chaque électrode et la polarité de la pile, le sens du courant et le sens de déplacement des électrons.

3.3.2 Écrire l'équation bilan qui traduit le fonctionnement de cette pile. Calculer la constante d'équilibre de la réaction en prenant $E^0(SOCl_2/S) \sim E$. Commenter.

3.3.3 Exprimer la f.é.m de cette pile en fonction de E et E_{Li}. La calculer numériquement. Que pensez-vous de la valeur trouvée par rapport aux valeurs connues pour une pile alcaline classique ?

3.3.4 Sachant que la capacité de la pile vaut $225\, mA.h$ et en supposant que le lithium métallique est en défaut, déterminer la masse de l'électrode de lithium dans la pile.

3.4 Le lithium réagissant vivement avec l'eau et le chlorure de thionyle présentant également des risques, quel conseil peut-on donner à un utilisateur ayant une pile usagée ?

Problème 2 – Comment faire un looping ... sans se louper

Un point mobile P, assimilé à un point matériel de masse m, se déplace sur un rail situé dans un plan vertical. Le rail comporte une partie IA constituée d'un demi cercle de centre C et de diamètre $AI = 2l$. On néglige tout frottement et la liaison entre le mobile et le rail est unilatérale c'est à dire que le mobile se situe à l'intérieur de la rampe. La position du point P lorsque sa trajectoire est à l'intérieur du demi-cercle est repérée par l'angle $\theta = (\overrightarrow{CI}, \overrightarrow{CP})$ (Fig.2).

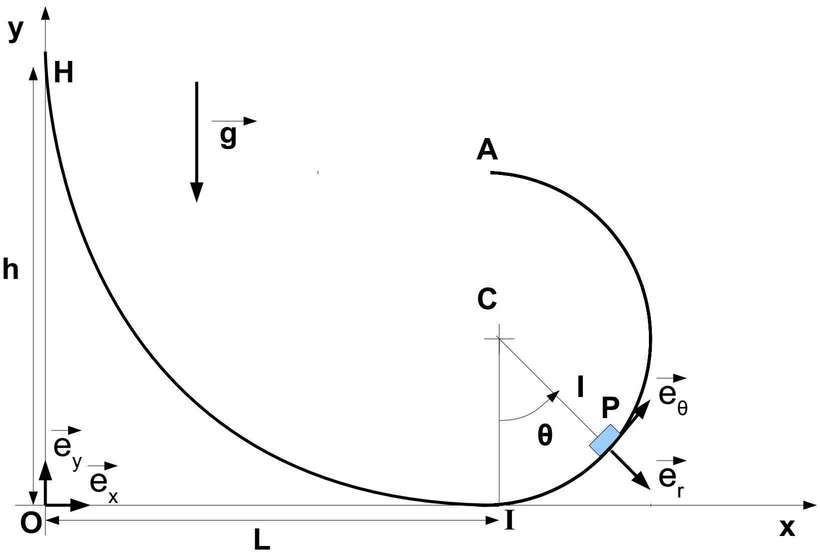


Figure 2 – Rampe de looping

On désigne par g la norme de l'accélération de la pesanteur. A l'instant $t = 0$, le mobile est libéré en H sans vitesse initiale à la hauteur h.

1. Montrer que le système est conservatif.
2. Exprimer en fonction de l, h, g et θ, la norme v_P de la vitesse du point P lorsqu'il est à l'intérieur du demi-cercle.
3. Exprimer en fonction de l et $\dot{\theta}$ la norme v_P de la vitesse du point P lorsqu'il est à l'intérieur du demi-cercle.
4. On écrit $\overrightarrow{R} = R(\theta)\vec{e}_r$ la réaction de la rampe. Donner l'expression de $R(\theta)$ au point P en fonction de θ.
5. A quelle condition sur le signe de $R(\theta)$ la voiture reste-t-elle en contact avec le rail ?
6. Déduire **des questions précédentes** la hauteur minimale h_m depuis laquelle on doit lâcher le mobile sans vitesse initiale en H pour qu'il arrive jusqu'en A, point le plus haut du demi cercle.
7. Donner dans ces conditions ($h = h_m$), l'expression de la réaction R_I en I, point le plus bas de la trajectoire.
8. Exprimer la norme v_A de la vitesse du mobile lorsqu'il arrive au point A après avoir été lâché sans vitesse initiale depuis une hauteur $h = h_m$.
9. Calculer, pour $h = h_m$, l'abscisse x_0 du point d' intersection de la trajectoire du mobile après passage par A avec l'axe Ox.

Problème 3 – Piège de Paul pour des ions

Les techniques d'analyse de la matière par spectrométrie de masse occupent une place grandissante, notamment dans l'étude de composés biologiques. Après ionisation, la matière est injectée dans un système analyseur, capable de séparer les composants élémentaires en fonction de leurs masses. L'objet de cette partie est la présentation et l'étude d'un type d'analyseur : l'analyseur à piège à ions. Le principe repose sur le piégeage de la matière ionisée au voisinage d'une position d'équilibre stable. Le composant principal est un piège de Paul, mis au point dans les années 1950 par le physicien allemand Wolfgang Paul. Ce travail lui vaudra d'être récompensé par une partie du prix Nobel de physique, en 1989.

Aucune connaissance préalable d'électromagnétisme n'est nécessaire pour l'étude de ce problème.

Le piège de Paul, dont le schéma est représenté fig.3, est constitué de trois électrodes. Deux électrodes en forme de coupelles qui sont reliées à la masse d'un générateur et une électrode en forme d'anneau qui est portée au potentiel électrique U. Du fait de la forme des électrodes et de la tension électrique, les particules chargées subissent, au voisinage de O, une force qui dérive de l'énergie potentielle :

$$E_p(x, y, z) = \phi(ax^2 + ay^2 + bz^2) \tag{1}$$

où ϕ dépend de la charge de la particule et de la tension U ; et a et b sont deux constantes.

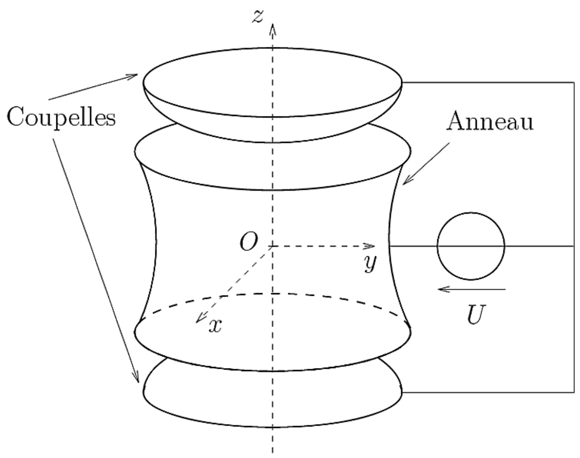


FIGURE 3 – Piege de Paul

Rappels

— Une force $\overrightarrow{F}$ dérive d'une énergie potentielle E_p lorsque :

$$\overrightarrow{F} = -\overrightarrow{grad}E_p$$

— L'expression du gradient en coordonnées cartésiennes dans la base $(\vec{e_x}, \vec{e_y}, \vec{e_z})$ est donnée :

$$\overrightarrow{grad}f = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{e}_x + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{e}_y + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{e}_z$$

— On rappelle le mode de calcul de la dérivée partielle d'une fonction différentiable de plusieurs variables $f(x, y, z)$. L'écriture $\frac{\partial f}{\partial y}$ signifie que seul y peut varier et que x et z sont considérer comme des constantes. Exemple de la fonction $f : (x, y, z) \to 3x^2 + 2yz$:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 6x \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2z \quad \frac{\partial f}{\partial z} = 2y$$

L'objectif de l'exercice est d'apprécier les conditions de piégeage d'une particule. Dans la suite, **on considère que la particule est complètement piégée si elle se comporte comme un oscillateur harmonique dans les trois dimensions de l'espace**.

Dans tout le problème, l'étude est réalisée dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen.

1. **Préliminaire**

   1.1 D'un point de vue dimensionnel, on a $\phi = MT^{-2}$. En déduire la dimension de a et b.

   1.2 Proposer un dispositif simple permettant de réaliser un oscillateur harmonique à une dimension.

2. **Etude d'un mouvement unidimensionnel**
   Un point matériel M de masse m se déplace le long d'un axe Ox (donc $\overrightarrow{OM} = x\vec{e}_x$), au voisinage du point O. Pour cette étude, la seule force $\overrightarrow{F}$ à considérer dérive de l'énergie potentielle :

$$E_p(x) = Kx^2$$

   où K est une constante positive ou négative.

   2.1 Dans le cas où $K > 0$, montrer que $x = 0$ est une position d'équilibre stable. Tracer alors l'allure de la trajectoire de phase de M dans ce cas.

   2.2 Que se passe-t-il si $K < 0$?

3. **Etude du régime statique appliqué à une particule de mouvement tridimensionnel**
   Dans cette partie, la tension $U = U_0$ est constante et il en est donc de même pour $\phi = \phi_0$. Le système étudié est un point matériel M de masse m. La seule force qu'il subit est la force qui dérive de l'énergie potentielle $E_p(x, y, z)$ (formule (1)).

   3.1 Exprimer $\overrightarrow{F}$ en fonction de a, b, ϕ_0, ainsi que de x, y, z et des vecteurs associés.

   3.2 Etablir les trois équations du mouvement suivant $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$ et $\vec{e}_z$.

   3.3 On admet qu'en conséquence des équations fondamentales de l'électromagnétisme, dans ce cas statique, a et b doivent vérifier la relation :

$$2a + b = 0$$

   Que peut-on déduire quant à la possibilité de piéger une particule chargée dans ce dispositif ?

4. **Etude du régime dynamique appliqué à une particule de mouvement tridimensionnel**
   L'idée de Wolfgang Paul est de contourner cette impossibilité de piéger une particule chargée à l'aide d'un potentiel purement statique, en utilisant un potentiel oscillant de pulsation Ω, de sorte que $\phi = \phi_0 \cos \Omega t$.

   4.1 Par analyse dimensionnelle, déterminer la fréquence ω_0 caractéristique du piège en fonction ϕ_0 et m.
   Dans le cas où $\Omega \gg \omega_0$, on montre que tout se passe, approximativement, comme si la particule évoluait avec une énergie potentielle effective :

$$E_{p,eff} = \frac{m\omega_0^4}{16\Omega^2}(x^2 + y^2 + 4z^2)$$

   4.2 Ecrire les nouvelles équations différentielles vérifiées par x, y et z.

   4.3 Montrer que la particule est piégée. Exprimer les pulsations d'oscillation ω_x, ω_y et ω_z selon O_x, O_y et O_z en fonction de ω_0 et Ω.

   4.4 A $t = 0$, la particule est injectée en $O(0, 0, 0)$ avec une vitesse $\vec{v} = v_0(\vec{e}_x + \vec{e}_z)$. Calculer les trois fonctions $x(t)$, $y(t)$ et $z(t)$.

   4.5 Représenter sur le même graphique les trois fonctions.

   4.6 L'allure de la trajectoire de la particule est tracée fig.4.
   Reproduire cette figure en identifiant, en le justifiant, les axes Ox et Oz. Conclure quant à l' efficacité du piège.

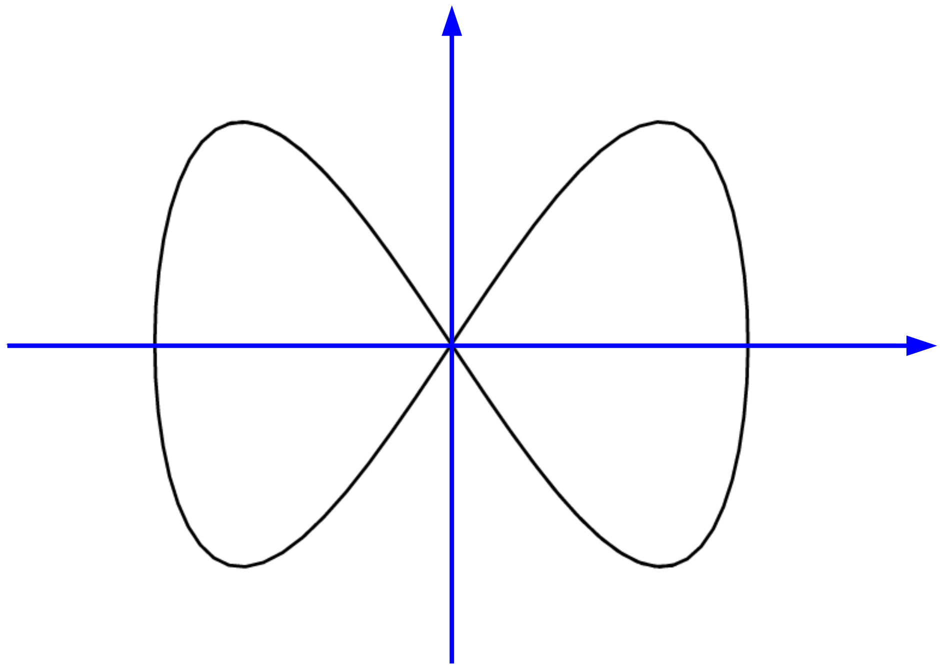


FIGURE 4 – Trajectoire de l'ion dans le piège de Paul

Problème 4 – Le pendule conique

Soit un pendule constitué d'une masselotte de masse m, modélisée par un point matériel M, et d'une tige rigide de longueur l et de masse qu'on négligera. La tige est liée en O à un bâti, fixe dans le référentiel du laboratoire, par une liaison rotule. On met en rotation la tige autour de l'axe Oz à la vitesse angulaire constante ω (fig.5). On étudie la possibilité que la tige s'écarte de la verticale, formant un angle α avec l'axe Oz.

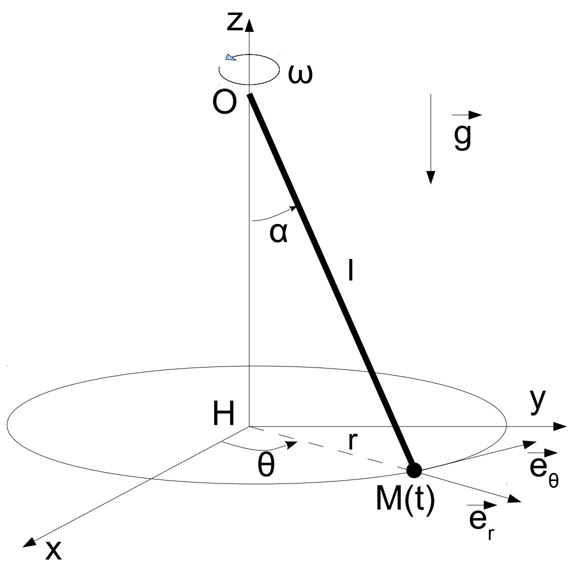
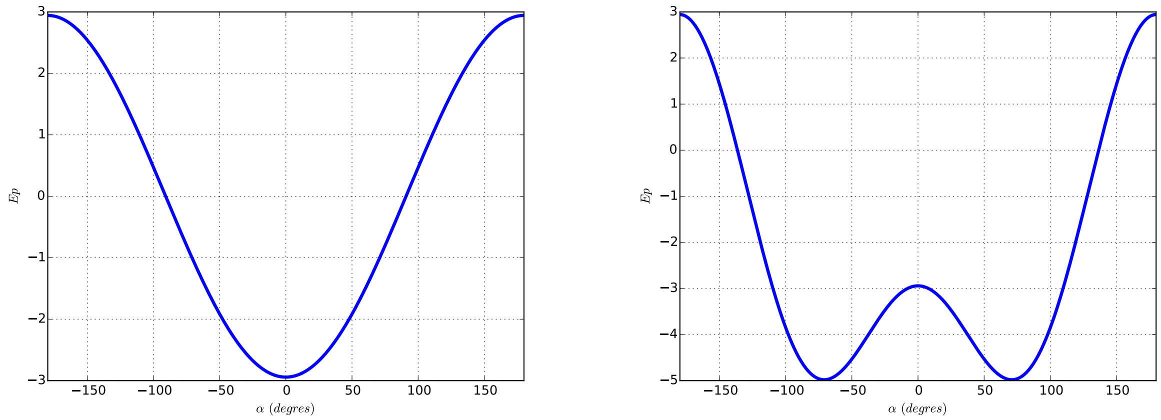


FIGURE 5 – Pendule conique

On se place dans le référentiel tournant autour de Oz avec la tige. Ce référentiel est non galiléen, aussi, il faut ajouter aux vraies forces, une pseudo-force, dite centrifuge, d'expression $\vec{f_e} = mr\omega^2\vec{e}_r$, avec $r = HM$.

1. Montrer que la force centrifuge $\vec{f_e}$ dérive d'une énergie potentielle dont on déterminera l'expression.
2. Montrer alors que le système est conservatif et écrire, à une constante K près, l'énergie potentielle totale $E_p(\alpha)$ en fonction de α. On posera $Ep_0 = -mgl < 0$ et $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$.
3. Sur la figure 6 est représenté cette énergie potentielle pour différentes valeurs des paramètres du problème. Commenter.



(a) $g = 9,81\,m.s^{-2}$, $l = 30\,cm$, $\omega = 1\,rad.s^{-1}$, $m = 1\,kg$ (b) $g = 9,81\,m.s^{-2}$, $l = 30\,cm$, $\omega = 10\,rad.s^{-1}$, $m = 1\,kg$

Figure 6 – Pendule conique

On se replace dans le cas général pour la suite.

4. Discuter l'existence de positions d'équilibre suivant la valeur de ω.
5. Discuter la stabilité de ces positions suivant la valeur de ω.
6. Décrire alors le phénomène qui se produit lorsqu'on augmente progressivement la vitesse de rotation ω du pendule initialement vertical. Interpréter.
7. On suppose $\omega > \omega_0$ et on note α_{eq} la position d'équilibre stable du système. Montrer qu'au voisinage de α_{eq}, le système se comporte comme un oscillateur harmonique dont on exprimera la pulsation propre Ω.