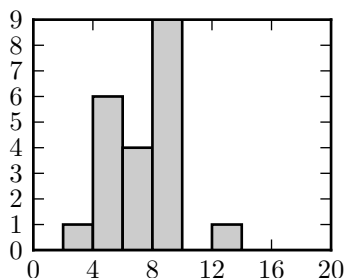


Analyse fréquentielle et solides cristallins

Bilan du devoir

Notes



- ▷ Barème brut sur 120, transformé en note sur 20 par proportionnalité. L'adaptation de barème est faite suivant le rapport de la banque PT indiquant que les meilleurs candidats traitent 75 % du sujet : la note de 20/20 correspond à 90/120. À titre indicatif, l'admissibilité à l'ENSAM et à CCP demande une moyenne pondérée de l'ordre de 8,5/20, l'admission à l'ENSAM une moyenne de l'ordre de 11/20.
- ▷ Moyenne de la classe : 31/120, ce qui correspond à 6,9/20.
- ▷ Une seule copie atteint un bon niveau et se détache nettement du lot avec une note de 13,3. Dix copies obtiennent une note comprise entre 7,8 et 8,4, que je considère comme honorable. Les autres copies sont d'un niveau insuffisant pour ces écoles.

Commentaires principaux

- ▷ La partie I a été plutôt bien traitée, hormis l'insuffisance des justifications. Citons l'en-tête du sujet : « les résultats non justifiés ne sont pas pris en compte ». Il est dommage de ne pas prendre de point pour des questions que vous savez faire.
- ▷ En revanche, la partie II est décevante. Le cours sur le filtrage n'a pas été suffisamment travaillé, et n'est donc pas suffisamment compris. Même les questions de cours sont souvent très mal traitées. Vous devez redresser la barre rapidement, c'est un chapitre qui tombe très fréquemment.
- ▷ La partie III n'a quasiment pas été abordée.

Erreurs trop courantes à éviter

- 6** - Quelques confusions entre le réseau diamant, qui dérive du CFC, et le réseau CFC lui-même.
- 9** - Beaucoup de confusion entre le volume d'un motif et le volume de la maille. La masse volumique s'exprime à partir du volume de la maille.
- 18** - La moyenne à cette question n'est que de 2,5/4, alors qu'il s'agit d'une simple application de formules de cours.
- 19** - Il n'est pas suffisant d'étudier la valeur de R_T pour répondre, il faut tenir compte de tous les autres dipôles.
- 26** - Le cours n'est pas appris : très peu de définitions précises d'une fréquence de coupure, qui est même souvent définie comme la fréquence du maximum !
- 29** - L'énoncé demande une réponse précise, qui doit s'appuyer sur des arguments numériques et/ou des références explicites aux questions précédentes.
- 32 à 34** - Toutes ces questions ont été faites en cours. Le taux de réussite y est anormalement bas. En particulier, quasiment personne n'est capable d'identifier la forme canonique de la fonction de transfert.

I - Nitrure de silicium**[E3a MP 2016]**❖ *Barème : 34 points au total***I.A - L'élément silicium**

1 Le silicium a pour configuration électronique $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^2$. Ses électrons de valence sont ceux des sous-couches $3s$ et $3p$.

❖ *Barème : 2 pts*

2 La plus grande valeur du nombre quantique n intervenant dans la configuration du silicium est 3 : il est donc dans la troisième ligne. Par ailleurs, sa configuration est en p^2 , il est donc dans la deuxième colonne du bloc p , ce qui correspond à la 14^e colonne de la classification. Le carbone possède la même configuration de valence que le silicium, il se trouve juste au dessus dans la classification périodique, et il est donc plus électronégatif.

❖ *Barème : 3 pts : 1.5+1.5*

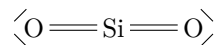
3 SiO_2 : analogue direct du CO_2 .

▷ Décompte des électrons de valence :

→ Si : 4 électrons de valence ;

→ O : $1s^2 2s^2 2p^4$ donc 6 électrons de valence ;→ Total : $4 + 2 \times 6 = 16$ électrons soit 8 doublets.

▷ Schéma de Lewis



$\text{Si}(\text{OH})_4$: l'écriture indique clairement que quatre groupes OH sont reliés à l'atome de silicium central.

▷ Décompte des électrons de valence :

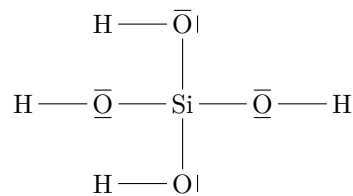
→ Si : 4 électrons de valence ;

→ O : 6 électrons de valence ;

→ H : 1 électron de valence ;

→ Total : $4 + 4 \times 6 + 4 \times 1 = 32$ électrons soit 16 doublets.

▷ Schéma de Lewis :



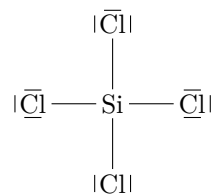
SiCl_4 : le silicium est bien sûr central.

▷ Décompte des électrons de valence :

→ Si : 4 électrons de valence ;

→ Cl : $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^5$... et même si vous ne connaissez pas Z vous devez savoir qu'il s'agit d'un halogène, donc configuration en p^5 ;→ Total : $4 + 4 \times 7 = 32$ électrons soit 16 doublets.

▷ Schéma de Lewis :



Dans tous les cas le silicium forme quatre liaisons, ce qui lui permet de respecter la règle de l'octet et donc de gagner en stabilité.

❖ *Barème : 4 pts : 1 par schéma de Lewis et 1 pour l'octet.***I.B - Cristallographie du silicium**

4 Les sites T se trouvent au centre de chaque « cube huitième » : ce sont les numéros 28, 29, 30, 31, 38, 39, 40, 41. Les sites O se trouvent au centre du cube (numéro 14) et au centre de chaque arête du cube : ce sont les numéros 4, 10, 22, 16, 2, 20, 26, 8, 6, 12, 24, 18.

❖ *Barème : 2 pts*

5 Tous les sites T appartiennent en propre à la maille : il y a donc **huit sites T par maille CFC**. Le site O au centre du cube appartient en propre à la maille, mais les sites O situés sur les arêtes sont partagés entre 4 mailles et comptent pour 1/4 : il y a donc $1 + 12 \times 1/4$ soit **quatre sites O par maille**.

❖ *Barème : 2 pts*

6 Calculons la population d'une maille CFC : elle compte 8 atomes situés aux sommets, donc partagés entre 8 mailles, et 6 atomes situés au centre des faces, donc partagés entre deux mailles. À cela s'ajoute la moitié des huit sites T. Ainsi, la population vaut

$$N = 8 \times \frac{1}{8} + 6 \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times 8 \quad \text{soit} \quad \boxed{N = 8 \text{ atomes par maille.}}$$

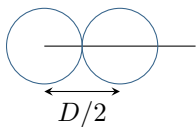
Le plus simple pour déterminer la coordinence d'un atome de silicium est de raisonner sur un site T occupé. L'atome est situé au centre du tétraèdre, ses plus proches voisins sur ses sommets : il y en a donc quatre. **Le silicium a une coordinence de 4 dans la structure.**

❖ *Barème : 2 pts*

7 La similitude entre les réponses aux questions 3 et 6 l'indique, la liaison Si-Si au sein de la structure est une **liaison covalente**. Cela est également confirmé par la valeur donnée de l'énergie de liaison. C'est une **liaison directionnelle et très forte**, les atomes au sein du cristal ne peuvent quasiment pas bouger les uns par rapport aux autres, ce qui rend très durs les cristaux associés.

❖ *Barème : 2 pts si les justifications sont précises*

8 Au sein de la structure diamant, toutes les sphères dures ont le même rayon : le réseau CFC n'est donc pas compact, et la tangence entre plus proches voisins a lieu dans un site tétraédrique, précisément le long de sa grande diagonale de longueur D . Le site T est situé au centre du cube, et seul un des sommets est occupé.



Comme on peut le constater sur le schéma ci-contre,

$$\frac{D}{2} = 2r(\text{Si}) \quad \text{soit} \quad \frac{1}{2} \times \frac{a}{2} \sqrt{3} = 2r(\text{Si}) \quad \text{d'où} \quad \boxed{r(\text{Si}) = \frac{a\sqrt{3}}{8} .}$$

❖ *Barème : 3 points*

9 Le volume de la maille du silicium est tout simplement a^3 . Ainsi,

$$\rho = \frac{m_{\text{maille}}}{a^3} = \frac{8 \times M/\mathcal{N}_A}{a^3} \quad \text{d'où} \quad a = \sqrt[3]{\frac{8M}{\rho\mathcal{N}_A}}$$

où \mathcal{N}_A est le nombre d'Avogadro. Cela permet d'en déduire

$$\boxed{r(\text{Si}) = \frac{\sqrt{3}}{8} \sqrt[3]{\frac{8M}{\rho\mathcal{N}_A}} = 118 \text{ pm} .}$$

❖ *Barème : 2 points*

10 Par définition,

$$C = \frac{8 \times \frac{4}{3} \pi r(\text{Si})^3}{a^3} = \frac{8 \times \frac{4}{3} \pi \frac{3\sqrt{3}}{8^3} a^3}{a^3}$$

ce qui se simplifie en

$$\boxed{C = \frac{\pi\sqrt{3}}{16} = 0,34 ,}$$

ce qui est nettement inférieur à la compacité de 74 % de la structure CFC.

❖ *Barème : 2 points*

I.C - Cristallographie du nitrure de silicium

11 L'existence de diverses variétés cristallines pour un même corps pur est appelée l'**allotropie**.

❖ **Barème : 1 pt**

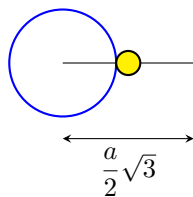
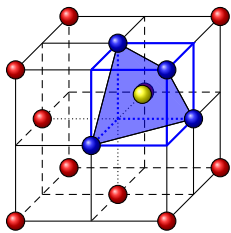
12 Comme les ions N^{3-} sont situés aux nœuds d'un réseau CFC, il y en a 4 par maille comme discuté question 6. Le nombre de sites T et O d'une maille CFC a été dénombré question 5. On en déduit le nombre d'ions Si^{4+} ,

$$N_{Si^{4+}} = \frac{1}{8}N_T + \frac{1}{2}N_O = 1 + 2 = 3$$

En conclusion, une maille compte quatre ions nitrure et trois ions silicium, ce qui est conforme à la stœchiométrie de Si_3N_4 .

❖ **Barème : 2 pts + bonus si les points n'avaient pas été attribués aux questions 6 et 5.**

13 Un site T se trouve au centre de chaque cube octant de la maille CFC (côté $a/2$), quatre sommets de ce cube octant sur huit étant occupés. L'habitabilité r_T d'un site tétraédrique est contrainte le long de la grande diagonale du cube octant, de longueur $D = a\sqrt{3}/2$, et dont seul un sommet est occupé.



Comme on peut le constater sur le schéma ci-contre,

$$\frac{1}{2} \times \frac{a}{2} \sqrt{3} = r(N^{3-}) + r_T \quad \text{d'où} \quad r_T = \frac{a\sqrt{3}}{4} - r(N^{3-})$$

Pour conclure, il faut encore relier le rayon ionique $r(N^{3-})$ au paramètre de maille. Pour cela, supposons le réseau CFC d'anions compacts. La tangence entre anions a alors lieu le long de la diagonale d'une face, où l'on a

$$a\sqrt{2} = 4r(N^{3-}) \quad \text{soit} \quad a = \frac{4}{\sqrt{2}}r(N^{3-}).$$

Ainsi,

$$r_T = \left(\sqrt{\frac{3}{2}} - 1 \right) r(N^{3-}) = 31,4 \text{ pm}.$$

❖ **Barème : 3 points**

14 Un alliage d'insertion est un alliage dans lequel un hétéroélément s'insère dans les sites interstitiels du réseau formé par l'élément de base, sans déformation de ce réseau. Dans un site T l'ion Si^{4+} a une coordinence égale à 4, d'après les données son rayon est donc égal à 27 pm, ce qui est inférieur à r_T . Il peut donc s'insérer dans le site T sans déformer le réseau d'anions.

Cela laisse quand même un doute sur la validité du modèle ionique : il n'y aurait dans ce cristal aucun contact entre anions et cations, et uniquement contact entre anions, ce qui est a priori défavorable. On peut donc penser que le modèle purement ionique choisi par l'énoncé n'est pas parfaitement adapté à décrire la structure du cristal.

❖ **Barème : 3 points**

15 Il s'agit d'une **liaison ionique**. Cela donne au cristal une **grande dureté et une faible déformabilité**, ce qui est bien adapté à l'usage en pointe d'AFM.

❖ **Barème : 1 point**

II - Principe de fonctionnement d'une ligne ADSL

❖ **Barème : 51 pts au total**

II.A - Schéma équivalent d'un filtre ADSL

16 Compte tenu du document 3, le téléphone est branché entre les bornes de sortie 1 et 3 du filtre, ce qui explique la présence de la résistance R_T qui le modélise. Dans la maille incluant le téléphone, les deux résistances R_1 et le téléphone sont montés en série. On peut donc associer les deux résistances R_1 en

$$R = 2R_1 = 44 \Omega.$$

Par ailleurs, l'ensemble formé du téléphone, des deux résistances R_1 et du condensateur peut être vu comme un seul dipôle d'impédance complexe \underline{Z} (calculable mais sans intérêt), monté en série avec les six bobines. L'ensemble a pour impédance

$$\underline{Z}_e = 2jL_1\omega + 2jL_2\omega + 2r_2 + 2jL_3\omega + 2r_3 + \underline{Z} = (2r_2 + 2r_3) + j(2L_1 + 2L_2 + 2L_3)\omega + \underline{Z}$$

Par identification avec le schéma figure 3, $\underline{Z}_e = r + jL\omega + \underline{Z}$ d'où

$$\boxed{r = 2r_2 + 2r_3 = 46 \Omega} \quad \text{et} \quad \boxed{L = 2L_1 + 2L_2 + 2L_3 = 20,5 \text{ mH.}}$$

❖ *Barème : 4 pts : 0.5 pour R_T , 1 pour R et 2.5 pour r et L .*

II.B - Impédance d'entrée de l'ensemble filtre-téléphone

17 Dans la limite très haute fréquence, la bobine se comporte comme un interrupteur ouvert. Quel que soit l'état du téléphone, compte tenu de la position de la bobine dans le circuit, l'intensité qui parcourt le circuit est toujours nulle. On en déduit donc que **l'ensemble filtre-téléphone est équivalent à un interrupteur ouvert dans la limite hautes fréquences**, quel que soit l'état du téléphone.

❖ *Barème : 2 points*

18 Raisonnons par équivalences successives, en partant de la droite du schéma. Les deux résistances R et R_T sont montées en série et donc équivalentes à $R_s = R + R_T$. Cette résistance équivalente apparaît montée en parallèle du condensateur. L'ensemble a pour admittance

$$\underline{Y}_p = jC\omega + \frac{1}{R_s} \quad \text{donc} \quad \underline{Z}_p = \frac{1}{jC\omega + \frac{1}{R_s}} = \frac{R_s}{1 + jR_sC\omega}.$$

Enfin, cette association est montée en série de la résistance r et de la bobine. L'ensemble a donc pour impédance

$$\boxed{\underline{Z}_e = r + jL\omega + \frac{R + R_T}{1 + j(R + R_T)C\omega}.$$

❖ *Barème : 4 points*

19 Ce qui distingue les deux courbes est leur comportement dans la limite basse fréquence. Dans cette limite, la bobine est équivalente à un fil et le condensateur à un interrupteur ouvert. L'ensemble filtre-téléphone est donc équivalent à la mise en série de r , R et R_T , soit

$$\underline{Z}_e \underset{\text{TBF}}{\sim} r + R + R_T.$$

Si le téléphone est décroché, R_T prend une valeur finie donc $|\underline{Z}_e|$ aussi alors que si le téléphone est raccroché, R_T donc $|\underline{Z}_e|$ deviennent infinies. On en déduit que **la courbe en trait pointillé correspond au téléphone décroché et la courbe en trait plein au téléphone raccroché**.

❖ *Barème : 2 points*

20 La fréquence maximale des signaux ADSL est de l'ordre de $1 \cdot 10^6$ Hz, où l'impédance est de l'ordre de 30 k Ω , ce qui n'est pas si élevé. La phrase citée du document est donc impropre. Sans filtre, l'impédance vue du modem serait uniquement celle du téléphone seul, c'est-à-dire $R_T : 600 \Omega$ si le téléphone est décroché et infinie sinon. Elle pourrait donc être plus grande, mais surtout elle dépendrait de l'état du téléphone (décroché ou raccroché), ce qui n'est pratiquement pas le cas avec le filtre utilisé : les deux courbes se superposent sur la droite de la figure 4, aux fréquences correspondant aux signaux ADSL. On en conclut que **l'intérêt du filtre est surtout de rendre l'impédance de l'ensemble filtre-téléphone indépendante de l'état du téléphone**, et donc de masquer cet état au filtre ADSL.

❖ *Barème : 2 points*

II.C - Filtrage du signal téléphonique

21 Le téléphone ne doit recevoir que les signaux ... téléphoniques, donc les signaux basse fréquence. Les signaux ADSL, de fréquence supérieure, doivent être coupés. Le filtre doit donc être un **passes-bas**.

Les schémas équivalents dans les limites très basse et très haute fréquence sont représentés figure 11. Dans la limite très basse fréquence,

$$\underline{H} = \frac{S_s}{S_e} = \frac{R_T}{r + R + R_T} = \text{cte.}$$

Dans la limite très haute fréquence, la tension de sortie est mesurée aux bornes d'une résistance parcourue par un courant nul : elle est donc nulle. On en déduit que **le filtre est bien un passe-bas**.



Figure 11 – Schémas équivalents au filtre ADSL dans les limites basses (à gauche) et hautes (à droite) fréquences.

❖ *Barème : 3 pts : 1 pour la nature et 1 par limite*

22 Les deux résistances R et R_T sont montées en série et forment un pont diviseur de tension. L'ensemble est soumis à la même tension \underline{U} que le condensateur, avec lequel elles sont montées en parallèle. On a donc

$$\frac{S_s}{\underline{U}} = \frac{R_T}{R + R_T}$$

Reste maintenant à relier la tension \underline{U} à la tension d'entrée $\underline{S_e}$. Notons $\underline{Z_p}$ l'impédance du dipôle encadré en bleu sur la figure 12. Ce dipôle forme un pont diviseur de tension avec la résistance r et la bobine L . On a donc

$$\frac{\underline{U}}{S_e} = \frac{\underline{Z_p}}{r + jL\omega + \underline{Z_p}}$$

En multipliant l'une avec l'autre les deux expressions, on arrive à la fonction de transfert sous la forme

$$\frac{S_s}{S_e} = \frac{S_s}{\underline{U}} \times \frac{\underline{U}}{S_e} = \frac{R_T}{R + R_T} \times \frac{\underline{Z_p}}{r + jL\omega + \underline{Z_p}}$$

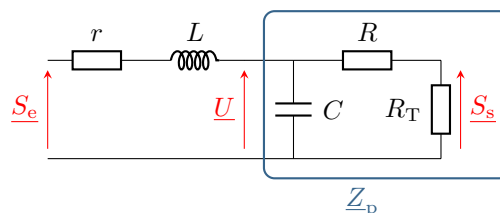


Figure 12 – Méthode pour déterminer la fonction de transfert.

❖ *Barème : 3 points*

23 Le polynôme du dénominateur est de degré 2 en f , le filtre est donc **un filtre du deuxième ordre**. L'intérêt d'utiliser un filtre d'ordre élevé est qu'il coupe plus fortement les fréquences n'appartenant pas à sa bande passante qu'un filtre d'ordre 1. Cela se voit dans la pente des asymptotes haute fréquence (on considère un passe-bas) : -40 dB/décade pour un filtre du deuxième ordre contre seulement -20 dB/décade pour un filtre du premier ordre.

❖ *Barème : 1 point*

24 Calculons la fonction de transfert équivalente dans la limite très haute fréquence,

$$\underline{H}_{\text{THF}} \sim \frac{H_0}{\left(\frac{f}{f_0}\right)^2} = -\frac{H_0 f_0^2}{f^2}$$

Ainsi,

$$G_{\text{dB THF}} \sim 20 \log \left(\frac{H_0 f_0^2}{f^2} \right) = 20 \log(H_0 f_0^2) - 40 \log f$$

On a donc une pente de -40 dB/décade.

❖ *Barème : 2 points*

25 Il s'agit d'un phénomène de **résonance**, qui n'existe que si le facteur de qualité du filtre est supérieur à $1/\sqrt{2}$.

❖ *Barème : 1 point*

26 En termes de gain, une fréquence de coupure est telle que le gain y vaille sa valeur maximale moins 3 dB,

$$G_{\text{dB}}(f_c) = G_{\text{dB,max}} - 3 \text{ dB}.$$

En termes de fonction de transfert, à la fréquence de coupure le module de la fonction de transfert est égal à sa valeur maximale divisée par $\sqrt{2}$,

$$|H(f_c)| = \frac{|H|_{\text{max}}}{\sqrt{2}}.$$

Par lecture graphique de la figure 9, reproduite et annotée figure, la fréquence de coupure téléphone raccroché se lit grâce aux traits verts et peut être estimée à $7 \cdot 10^3$ Hz.

❖ *Barème : 2 points : 1+1*

27 Le document 1 indique les bornes en fréquence des signaux téléphoniques et ADSL, reportées figure 13 en traits pointillés verticaux. On constate que tous les signaux ADSL sont atténués d'au moins 40 dB par le filtre, c'est-à-dire que leur amplitude est au moins divisée par $10^{40/20} = 100$.

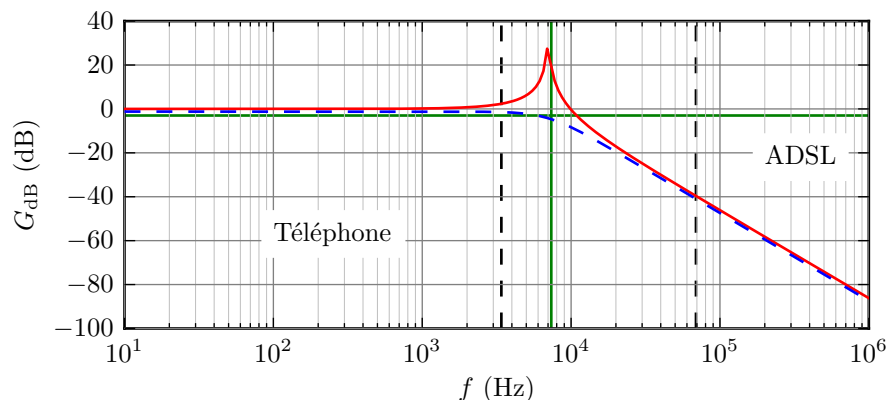


Figure 13 – Diagramme de Bode en gain du filtre ADSL. Reproduction partielle de la figure 9 du document réponse. Les traits verts sont utilisés pour déterminer la fréquence de coupure, question 26. Les traits pointillés verticaux délimitent les bornes en fréquence des signaux téléphoniques et ADSL, question 27. Version couleur sur le site de la classe.

❖ *Barème : 2 points : 1+1*

28 Le phénomène de résonance discuté précédemment ne pose pas problème pour les signaux ADSL car il est en dehors de leur domaine de fréquence : qu'il y ait résonance ou non, ils sont atténués de la même façon par le filtre.

❖ *Barème : 1 point*

29 En synthèse des deux parties, le filtre permet de rendre l'impédance vue par le modem ADSL indépendante de l'état du téléphone, décroché ou raccroché, et une diminution d'amplitude d'un facteur 100 est une atténuation conséquente. On en conclut que **le filtre répond correctement au cahier des charges**.

❖ *Barème : 2 points*

II.D - Filtrage d'une sous-porteuse par un modem ADSL

30 Le document 4 indique que seules les sous-porteuses d'indice 16 à 255 sont utilisées pour la communication ADSL. La fréquence inférieure de la bande d'indice 16 vaut

$$f_{16,\text{min}} = 16 f_a = 69 \text{ kHz}$$

alors que la fréquence supérieure de la bande d'indice 255 vaut

$$f_{255,\text{max}} = (255 + 1) f_a = 1,1 \cdot 10^3 \text{ kHz}.$$

On retrouve exactement les bornes indiquées dans le document 1.

❖ **Barème : 1 point**

31 Pour n'extraire qu'une seule sous-porteuse du signal, il faut utiliser un filtre passe-bande : la sous-porteuse en question doit être transmise, mais les sous-porteuses de fréquences inférieures et supérieures doivent être coupées.

La tension de sortie du filtre étudié S'_s est mesurée aux bornes d'un condensateur monté en parallèle d'une bobine. Dans la limite très basse fréquence, la bobine est équivalente à un fil donc $S'_s = 0$. Dans la limite très haute fréquence, c'est cette fois le condensateur qui est équivalent à un fil, donc $S'_s = 0$ également. On en conclut que **le filtre est bien un passe-bande**.

❖ **Barème : 3 points**

32 La bobine et le condensateur sont montés en parallèle, et l'association est donc équivalente à un dipôle d'admittance

$$Y_{LC} = jC\omega + \frac{1}{jL\omega}.$$

Cette association et la résistance R forment un pont diviseur de tension, d'où

$$\begin{aligned} H &= \frac{S'_s}{S_e} = \frac{Z_{LC}}{Z_{LC} + R} \\ &= \frac{1}{1 + RY_{LC}} \end{aligned}$$

$$H = \frac{1}{1 + jRC\omega - \frac{jR}{L\omega}}$$

Par identification du numérateur avec la forme canonique donnée par l'énoncé, on trouve

$$H_0 = 1.$$

On procède ensuite terme à terme à l'identification avec le polynôme dénominateur. Pour cela, on se base sur la position de ω (ou de $x = f/f_0 = \omega/\omega_0$),

$$-\frac{jR}{L\omega} = -jQ\frac{\omega_0}{\omega} \quad \text{et} \quad jRC\omega = jQ\frac{\omega}{\omega_0}$$

d'où on déduit

$$Q\omega_0 = \frac{R}{L} \quad \text{et} \quad \frac{Q}{\omega_0} = RC.$$

En multipliant et divisant ces deux équations, on en déduit

$$Q^2 = \frac{R}{L} \times RC \quad \text{et} \quad \omega_0^2 = \frac{R}{L} \times \frac{1}{RC}$$

et finalement

$$f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \quad \text{et} \quad Q = R\sqrt{\frac{C}{L}}.$$

❖ **Barème : 5 points : 2 pour la FT et 3 pour l'identification**

33 **Limite haute fréquence.** La fonction de transfert est équivalente à

$$H \underset{\text{THF}}{\sim} \frac{1}{jQx}$$

ce qui donne donc

$$G_{\text{dB}} \underset{\text{THF}}{\sim} 20 \log \frac{1}{Qx} = -20 \log x - 20 \log Q \quad \text{et} \quad \varphi \underset{\text{THF}}{\sim} \arg \frac{-j}{Qx} = -\frac{\pi}{2}$$

Limite basse fréquence. La fonction de transfert est équivalente à

$$H \underset{\text{TBF}}{\sim} \frac{1}{-j\frac{Q}{x}}$$

ce qui donne donc

$$G_{\text{dB}} \underset{\text{TBF}}{\sim} 20 \log \frac{x}{Q} = 20 \log x - 20 \log Q \quad \text{et} \quad \varphi \underset{\text{TBF}}{\sim} \arg \frac{jx}{Q} = +\frac{\pi}{2}$$

❖ **Barème : 4 points**

34 Compte tenu de la question précédente, les asymptotes ont pour pente ± 20 dB/décade et pour ordonnée à l'origine $-20 \log Q$ (attention en échelle logarithmique l'origine correspond à $x = 10^0 = 1$). Pour déterminer l'allure du diagramme réel, il faut s'intéresser à la valeur prise par la fonction de transfert en $x = 1$, où on a ici $\underline{H} = H_0 = 1$. Le gain et la phase du filtre réel sont donc nuls à cette fréquence. Le diagramme de Bode est représenté figure 14.

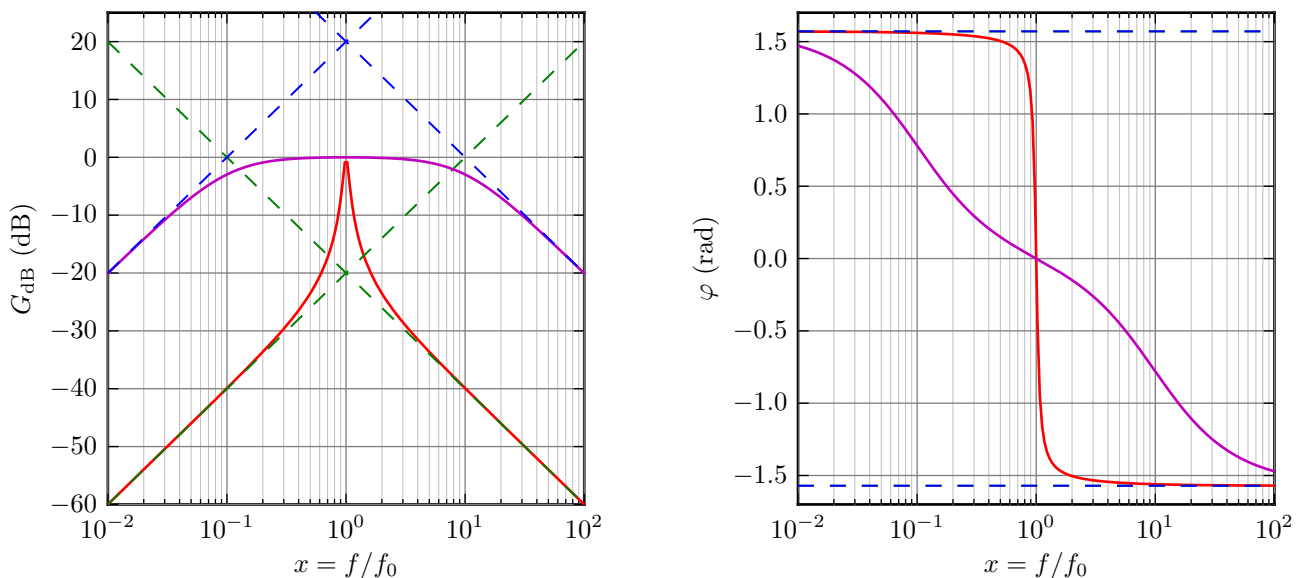


Figure 14 – Diagramme de Bode du filtre récupérant les signaux de la sous-porteuse ADSL de numéro 100. La courbe rouge correspond au cas $Q = 10$ et la courbe violette au cas $Q = 0,1$. Autant les courbes du diagramme en gain doivent être correctement placées, autant il est difficile de connaître précisément la position des courbes de phase : on attend donc simplement que le saut de phase soit plus brusque pour le facteur de qualité le plus élevé. Version couleur sur le site de la classe.

❖ **Barème : 4 points**

35 La bande passante Δf du filtre est reliée à sa fréquence centrale f_0 et à son facteur de qualité Q par

$$\Delta f = \frac{f_0}{Q}.$$

❖ **Barème : 1 point**

36 La fréquence centrale du filtre doit correspondre à celle de la sous-porteuse n° 100, soit

$$f_0 = 100,5 f_a = 433 \text{ kHz}.$$

Il faut de plus que la bande passante ait pour largeur $\Delta f = f_a$. On en déduit donc la valeur du facteur de qualité,

$$Q = \frac{f_0}{\Delta f} = 100,5.$$

❖ **Barème : 2 points**

III - AFM en mode oscillant**[E3a MP 2016]**❖ *Barème : 34 pts au total***III.A - Dimensions de la pointe AFM**

37 La largeur de la pointe peut être estimée à $1,5 \mu\text{m}$, sa hauteur à $20 \mu\text{m}$, l'épaisseur du levier à $4 \mu\text{m}$ et sa largeur à $80 \mu\text{m}$.

❖ *Barème : 2 pts*

38 Il s'agit du **grossissement**, ici très supérieur à celui d'un microscope optique qui est de l'ordre de quelques centaines au plus.

❖ *Barème : 2 pts : 1 + 1 si un ODG est donné*

39 Des objets aussi petits que le levier ou la pointe AFM **diffractent la lumière**.

❖ *Barème : 1 pt***III.B - Système pointe-levier**

40 En utilisant par exemple le PFD,

$$[F_{\text{ext}}] = M \times \left[\frac{dv}{dt} \right] = M L T^{-2}$$

Ainsi l'équation aux dimensions associée à la définition de la flèche donne

$$[z] = \frac{1 \times [L]^3}{[E][a][e]^3} [F_{\text{ext}}] \quad \text{soit} \quad L = \frac{L^3}{[E]L L^3} M L T^{-2} \quad \text{d'où} \quad [E] = M L^{-1} T^{-2}.$$

❖ *Barème : 3 pts : 1 pt pour la dimension force, 2 pts pour le reste du calcul.*

41 On se place à l'équilibre avec une flèche z qui correspondrait à la longueur du ressort. Le PFD donne

$$\vec{F}_{\text{ext}} - kz \vec{e}_z = \vec{0}$$

d'où par projection et en remplaçant z ,

$$F_{\text{ext}} - k \frac{4L^3}{Eae^3} F_{\text{ext}} = 0$$

et ainsi

$$k = \frac{Eae^3}{4L^3}.$$

❖ *Barème : 3 pts : 2 pour le PFD bien écrit, 1 pour l'expression de k*

42 Numériquement,

$$k = \frac{1 \cdot 10^{11} \times 50 \cdot 10^{-6} \times (5,0 \cdot 10^{-6})^3}{4 \times (2,0 \cdot 10^2)^3} \simeq 20 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}.$$

❖ *Barème : 2 pts*

43 Par identification à la forme canonique connue,

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m} \quad \text{et} \quad \frac{\omega_0}{Q} = \frac{\alpha}{m}$$

d'où on déduit

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{et} \quad Q = \frac{m\omega_0}{\alpha} = \frac{\sqrt{km}}{\alpha}.$$

❖ *Barème : 2 pts*

44 En représentation complexe, l'équation du mouvement devient

$$-\omega^2 \underline{Z}_0 - j\omega \frac{\omega_0}{Q} \underline{Z}_0 + \omega_0^2 \underline{Z}_0 = A$$

d'où en factorisant et divisant

$$\underline{Z}_0 = \frac{A}{\omega_0^2 - \omega^2 - j\omega \frac{\omega_0}{Q}}.$$

❖ *Barème : 2 pts*

45 Son module vaut

$$|\underline{Z}_0| = \frac{A}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \frac{\omega^2 \omega_0^2}{Q^2}}}$$

❖ *Barème : 1 pt*

46 Il y a résonance lorsque l'argument de la racine au dénominateur est minimal. D'après l'expression précédente,

$$|\underline{Z}_0| = \frac{A}{\omega_0^2 \sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \frac{\omega^2}{Q^2 \omega_0^2}}}$$

Suivant l'énoncé, posons $X = (\omega/\omega_0)^2$ et $f(X) = (1 - X)^2 + \frac{X}{Q^2}$. Alors

$$\frac{df}{dX} = -2(1 - X) + \frac{1}{Q^2}$$

On en déduit que la dérivée s'annule en

$$1 - X = -\frac{1}{2Q^2} \quad \text{soit} \quad X = 1 - \frac{1}{2Q^2}.$$

Compte tenu de la définition de X , cette solution n'est physiquement pertinente que si elle est positive, c'est-à-dire **seulement si** $Q > 1/\sqrt{2}$. On en déduit la pulsation de résonance,

$$\omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}.$$

❖ *Barème : 6 pts : 2 pour l'identification de f , 2 pour la dérivation, 2 pour la conclusion et le critère d'existence.*

47 La courbe part de la même valeur en basse fréquence, finit à la même valeur (nulle) en haute fréquence, mais ne passe pas par un maximum entre les deux.

❖ *Barème : 1 pt*

III.C - Protocole AFM

48 Il s'agit simplement d'ajouter une nouvelle force à droite de l'équation du mouvement,

$$\ddot{z} + \frac{\alpha}{m} \dot{z} + \frac{k}{m} z = \frac{F_m}{m} \cos(\omega t) + \frac{F_{\text{int}}(0)}{m} + \frac{\beta}{m} z.$$

❖ *Barème : 1 pt*

49 En passant à gauche le terme dépendant de z ,

$$\ddot{z} + \frac{\alpha}{m} \dot{z} + \frac{k - \beta}{m} z = \frac{F_m}{m} \cos(\omega t) + \frac{F_{\text{int}}(0)}{m}.$$

La nouvelle pulsation propre est telle que

$$\Omega_0^2 = \frac{k \left(1 - \frac{\beta}{k}\right)}{m} = \omega_0^2 \left(1 - \frac{\beta}{k}\right)$$

d'où

$$\Omega_0 = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{\beta}{k}}.$$

❖ *Barème : 2 pts*

50 Géométriquement, $d_0 = z + d(z)$ soit $d(z) = d_0 - z$. Ainsi,

$$F_{\text{int}}(z) = \frac{HR}{6(d_0 - z)^2} \quad \text{d'où} \quad \frac{dF_{\text{int}}}{dz} = \frac{HR}{6} \times \frac{(-1) \times (-2)}{(d_0 - z)^3} = \frac{HR}{3(d_0 - z)^3}$$

d'où on déduit β en prenant $z = 0$:

$$\beta = \frac{HR}{3d_0^3}.$$

❖ *Barème : 4 pts : 1 pour la géométrie, 2 pour le calcul de la dérivée, 1 pour la conclusion.*

51 Comme $\beta > 0$ alors $\Omega_0 < \omega_0$, **le décalage a donc lieu vers les basses fréquences.**

❖ *Barème : 1 pt*

52 Même allure de courbe, mais le pic est légèrement décalé vers la gauche.

❖ *Barème : 1 pt*