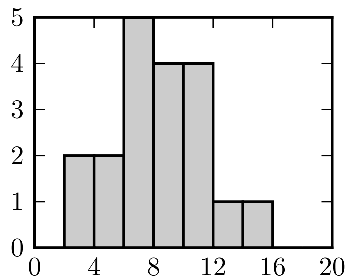
# Transitoires électriques et mécaniques

## Bilan du devoir

### Notes




- ▷ Barème brut sur 96, transformé en note sur 20 par proportionnalité.
- ▷ Moyenne de la classe : 25/90, arbitrairement choisie à 8,5/20 car j'estime le devoir décevant.
- ▷ Les notes sont raisonnablement étalées, comprises entre 3,0 et 15,6/20 (46/96) mais même cette meilleure copie contient des erreurs qui ne devraient pas s'y trouver.

### Commentaires principaux

- ▷ La partie I était proche du cours et a été dans l'ensemble à peu près bien traitée. Les habituels points noirs se retrouvent : énoncé mal lu, rédaction hasardeuse qui entraîne des erreurs, et non respect des notations de l'énoncé.
- ▷ En revanche, la partie II est désastreuse. Trop peu de questions sont traitées, et celles qui le sont contiennent beaucoup d'erreurs qui ne devraient plus être : notations pas définies, confusion dans les conventions, dans les formes de solution. Le bilan est donc clairement mauvais.
- ▷ Les mauvais résultats sur la partie II s'expliquent aussi probablement par trop de lenteur sur la partie de mécanique, et donc trop peu de temps consacré à l'électronique.
- ▷ Il est rappelé une nouvelle fois à la lecture de vos copies que presque toutes les erreurs de calcul sont précédées d'une erreur (ou d'une absence) de notation ou de rédaction. C'est critique en électronique. En particulier, aucun de ceux qui se dispensent de schéma ne mène les calculs au bout.

### Erreurs trop courantes à éviter

**2 -** Le respect des notations de l'énoncé est essentiel dans une question aussi simple et aussi tôt dans le sujet.
**4 -** Vous ne pouvez pas laisser une expression inaboutie de $D_\text{f}$ avec deux termes qui se ressemblent beaucoup. Il faut la simplifier.
**6 -** La dimension d'une force à partir des dimensions de base n'est pas à connaître. Il faut la redémontrer systématiquement.
**10 -** Beaucoup de réponses incomplètes à cette question, pour des choses que vous savez probablement. Lisez les questions jusqu'au bout !!
**12 -** Attention, comme $\Delta < 0$ c'est $\sqrt{|\Delta|} = \sqrt{-\Delta}$ qui intervient.
**17 -** Circuit on ne peut plus basique, mais beaucoup orientent le condensateur en convention générateur sans s'en rendre compte.
**18 -** Une rédaction minimale est nécessaire.
**22 -** Bizarrement, cette question dénote par le fait qu'elle a été plutôt bien traitée.
**33 et 34 -** Même en fin de sujet il y a des points faciles à gagner !
**35 -** Huit étudiants seulement lisent le sujet jusqu'au bout ... Sans commentaire.


Étienne Thibierge, 20 décembre 2017, www.etienne-thibierge.fr

# I - Déclenchement de l'airbag lors d'un accident

❖ ***Barème :** 45 pts au total*

## I.A - Mouvement du véhicule lors de la phase de freinage

**1** Un référentiel est dit galiléen si un point matériel (pseudo)-isolé y a un mouvement rectiligne uniforme. Le référentiel terrestre est galiléen sur des durées très inférieures à 24 h, période de la rotation de la Terre autour de l'axe des pôles.

❖ ***Barème :** 2 pts*

**2** Le mouvement est rectiligne uniforme pendant la phase de réaction, donc

$$\boxed{D_\mathrm{r} = V_0 t_\mathrm{r} = 20\,\mathrm{m}\,.}$$

❖ ***Barème :** 1 pt*

**3** ▷ Système : véhicule, modélisé par un point matériel de masse $m_0$ situé en $G$ ;

▷ Référentiel : terrestre, supposé galiléen ;

▷ Bilan des forces :
- → le poids du véhicule est compensé par la réaction de la route ;
- → force de freinage $\vec{F}$.

▷ D'après le PFD, avec $\vec{p}_0$ la quantité de mouvement du véhicule,

$$\left.\frac{\mathrm{d}\vec{p}_0}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}_\mathrm{t}} = \vec{F}$$

et comme $\dfrac{\mathrm{d}\vec{p}_0}{\mathrm{d}t} = m_0 \ddot{x} \vec{u}_x$ alors en projetant on obtient

$$m_0 \ddot{x} = -F \qquad \text{soit} \qquad \ddot{x} = -\frac{F}{m_0}\,.$$

▷ On intègre une première fois pour trouver la vitesse,

$$v_x = -\frac{F}{m_0} t + A \qquad \text{avec} \qquad A \text{ constante.}$$

La voiture roule à la vitesse $V_0$ jusqu'à l'instant $t_\mathrm{r}$, donc

$$v_x(0) \underbrace{=}_{\text{sol}} A \underbrace{=}_{\text{CI}} V_0$$

d'où finalement

$$v_x(t) = -\frac{F}{m_0} t + V_0\,.$$

▷ On intègre une seconde fois pour trouver la position,

$$x = -\frac{1}{2}\frac{F}{m_0} t^2 + V_0 t + B \qquad \text{avec} \qquad B \text{ constante.}$$

En supposant que la voiture se trouve initialement en $x = 0$,

$$x(0) \underbrace{=}_{\text{sol}} B \underbrace{=}_{\text{CI}} 0$$

et finalement

$$\boxed{x(t) = -\frac{1}{2}\frac{F}{m_0} t^2 + V_0 t\,.}$$

❖ ***Barème :** 5 pts : 2 pts pour la démarche et la rédaction, 0.5 pt pour l'accélération, 1 pt pour la vitesse, 1.5 pt pour la position*

**4** La voiture est arrêtée lorsque sa vitesse est nulle, donc

$$-\frac{F}{m_0} t_\mathrm{f} + V_0 = 0 \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{t_\mathrm{f} = \frac{m_0 V_0}{F}\,.}$$

On en déduit

$$D_\mathrm{f} = x(t_\mathrm{f}) = -\frac{1}{2}\frac{F}{m_0}\left(\frac{m_0 V_0}{F}\right)^2 + V_0\frac{m_0 V_0}{4}{\omega_0}^2 F = -\frac{m_0 {V_0}^2}{2F} + \frac{m_0 {V_0}^2}{F}$$

soit finalement

$$\boxed{D_\mathrm{f} = \frac{m_0 {V_0}^2}{2F}\,.}$$

❖ ***Barème :*** *3 pts : 1 + 2*

**5** La vitesse $V_0$ est de l'ordre de $20\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$. Ainsi,

$$\boxed{D_\mathrm{a} = D_\mathrm{r} + D_\mathrm{f} = V_0 t_\mathrm{r} + \frac{m_0 {V_0}^2}{2F} \simeq 60\,\mathrm{m}\,.}$$

❖ ***Barème :*** *2 pts : 0.5 littéral + 1.5 pour l'AN.*

## I.B - Force de décélération subie par les passagers lors du choc

**6** En utilisant par exemple l'expression du poids, on trouve la dimension d'une force :

$$[F_\mathrm{d}] = [m][g] = M\,L\,T^{-2}$$

car $g$ s'exprime en $\mathrm{m/s^2}$. On en déduit l'équation aux dimensions

$$M\,L\,T^{-2} = L^a T^{-a} \times L^b \times M^c\,.$$

Comme la relation est homogène, on identifie les exposants :

$$\begin{cases} 1 = c & \text{(masse)} \\ 1 = a + b & \text{(longueur)} \\ -2 = -a & \text{(temps)} \end{cases} \qquad \text{soit} \qquad \begin{cases} a = 2 \\ b = 1 - a = -1 \\ c = 1 \end{cases}$$

et finalement

$$\boxed{F_\mathrm{d} = \frac{{V_\mathrm{i}}^2 m_\mathrm{p}}{e}}$$

On lit sur la figure 1 $V_\mathrm{i} = 50\,\mathrm{km\cdot h^{-1}} \simeq 14\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$ et $e \simeq 1\,\mathrm{m}$ donc pour un passager de masse $m_\mathrm{p} = 70\,\mathrm{kg}$

$$\boxed{F_\mathrm{d} \simeq 1{,}4\cdot 10^4\,\mathrm{N}\,.}$$

❖ ***Barème :*** *5 pts : 1 pt pour la dimension force, 1 pt pour le système, 1 pt pour la résolution et la conclusion, 2 pts pour l'application numérique.*

**7** Le passager subit au plus une accélération $a_\mathrm{max} = 450\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$, ce qui donne

$$\boxed{F_\mathrm{d,max} = m_\mathrm{p} a_\mathrm{max} = 3{,}1\cdot 10^4\,\mathrm{N}\,.}$$

L'approche dimensionnelle donne le bon ordre de grandeur, mais est peu précise. La principale différence vient du fait que l'accélération varie lors d'une vraie collision.

❖ ***Barème :*** *2 pts*

## I.C - Déclencheur d'airbag

**8** L'accélération est constante lorsque la vitesse passe de $V_0$ à 0 pendant la durée $t_\mathrm{c}$, donc

$$a_0 = \frac{V_0 - 0}{t_\mathrm{c}} \qquad \text{donc} \qquad \boxed{a_0 = \frac{V_0}{t_\mathrm{c}}\,.}$$

❖ ***Barème :*** *1 pt*

**9** D'après la relation de Chasles,

$$\overrightarrow{O'M} = \overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OM}\,.$$

En dérivant deux fois dans le référentiel terrestre,

$$\left.\frac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{O'M}}{\mathrm{d}t^2}\right|_{\mathcal{R}_\mathrm{t}} = \left.\frac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{O'O}}{\mathrm{d}t^2}\right|_{\mathcal{R}_\mathrm{t}} + \left.\frac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t^2}\right|_{\mathcal{R}_\mathrm{t}}$$

Or le point $O$ est lié à la voiture, donc son accélération est $-a_0\,\vec{u}_x$, et $\overrightarrow{OM} = x\,\vec{u}_x$ avec $\vec{u}_x$ constant, d'où

$$\boxed{\vec{a}_{M/\mathcal{R}_\mathrm{t}} = -a_0\,\vec{u}_x + \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}\,\vec{u}_x\,.}$$

*La composition des accélérations dans deux référentiels en translation est au programme de SI, mais pas de physique. Il s'agit juste ici de la démontrer dans le cas particulier de l'exercice.*

❖ ***Barème :*** *2 pts si bien justifié*

**10** ▷ Système : masse aimantée, modélisée par un point matériel de masse $m$ ;

▷ Référentiel : terrestre, supposé galiléen ;

▷ Bilan des forces :
- → poids compensé par la réaction du support car le mouvement est horizontal ;
- → force de rappel du ressort $\vec{F}_\mathrm{r} = -k(\ell-\ell_0)\,\vec{u}_\mathrm{s} = -k(x-\ell_0)\,\vec{u}_x$ ;
- → force de frottement fluide $\vec{f} = -\alpha\,\vec{v}_{M/\mathcal{R}_\mathrm{v}} = -\alpha\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\,\vec{u}_x$.

▷ D'après le PFD,

$$\left.\frac{\mathrm{d}\,\vec{p}_{M/\mathcal{R}_\mathrm{t}}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}_\mathrm{t}} = \vec{F}_\mathrm{r} + \vec{f}$$

soit en projetant

$$-ma_0 + m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -k(x-\ell_0) - \alpha\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$$

d'où

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \underbrace{\frac{\alpha}{m}}_{\omega_0/Q}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \underbrace{\frac{k}{m}}_{{\omega_0}^2}x = \underbrace{\frac{k}{m}}_{{\omega_0}^2}\underbrace{\left(\ell_0 + \frac{ma_0}{k}\right)}_{x_\mathrm{e}}\,.}$$

Ainsi

$$\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \qquad Q = \frac{m\omega_0}{\alpha} = \frac{\sqrt{km}}{\alpha} \qquad x_\mathrm{e} = \ell_0 + \frac{ma_0}{k}\,.}$$

$\omega_0$ est la **pulsation propre**, $Q$ le **facteur de qualité** et $x_\mathrm{e}$ est la **position d'équilibre apparente** au cours du choc.

❖ ***Barème :*** *5 pts : 1 pt pour la démarche et la rédaction, 1 pt pour l'équation brute, 3 pts pour l'identification des paramètres et leur signification.*

**11** Le polynôme caractéristique de l'équation différentielle s'écrit

$$r^2 + \frac{\omega_0}{Q}r + {\omega_0}^2 = 0\,.$$

Le régime est pseudo-périodique si son discriminant est négatif, c'est-à-dire si

$$\frac{{\omega_0}^2}{Q^2} - 4{\omega_0}^2 < 0 \qquad \text{soit} \qquad \frac{1}{Q^2} < 4 \qquad \text{donc} \qquad \boxed{Q > \frac{1}{2}\,.}$$

❖ ***Barème :*** *2 pts*

**12** **Solutions homogènes $x_\mathrm{H}$ :** les racines du polynôme caractéristique s'écrivent

$$r_{1,2} = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm \frac{\mathrm{j}}{2}\sqrt{4{\omega_0}^2 - \frac{1}{Q^2}} = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm \mathrm{j}\omega_0\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}$$

ce qu'on identifie avec la forme de solution donnée

$$\frac{1}{\tau} = \frac{\omega_0}{2Q} \qquad \text{et} \qquad \omega = \omega_0\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}\,.$$

Les solutions homogènes s'écrivent donc

$$x_\mathrm{H}(t) = \mathrm{e}^{-t/\tau}\left[A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)\right] .$$

**Solution particulière $x_\mathrm{P}$ :** constante car le second membre est constant, donc en injectant dans l'équation différentielle,

$$0 + 0 + {\omega_0}^2 x_\mathrm{P} = {\omega_0}^2 x_\mathrm{e} \qquad \text{d'où} \qquad x_\mathrm{P} = x_\mathrm{e} .$$

**Conclusion :**

$$\boxed{x(t) = \mathrm{e}^{-t/\tau}\left[A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)\right] + x_\mathrm{e} .}$$

❖ ***Barème :*** *3 pts : 2 pts pour les racines et l'identification de $\omega$ et $\tau$ + 1 pt pour $x_e$*

**13** L'énoncé indique qu'à l'instant de l'impact le ressort est à l'équilibre et sans vitesse, c'est-à-dire

$$x(0) = \ell_0 \qquad \text{et} \qquad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(0) = 0 .$$

> *Attention, $x(0) \neq x_\mathrm{e}$ : $x_\mathrm{e}$ est la position d'équilibre apparente lors de la phase de freinage, mais pas avant.*

Condition initiale sur la position :

$$x(0) \underbrace{=}_{\text{sol}} A + x_\mathrm{e} \underbrace{=}_{\text{CI}} \ell_0 \qquad \text{donc} \qquad A = \ell_0 - x_\mathrm{e} \qquad \text{soit} \qquad \boxed{A = -\frac{ma_0}{k}}$$

Condition initiale sur la vitesse :

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{\tau}\,\mathrm{e}^{-t/\tau}\left[A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)\right] + \mathrm{e}^{-t/\tau}\left[-\omega A\sin(\omega t) + \omega B\cos(\omega t)\right]$$

Ainsi, à $t = 0$,

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(0) \underbrace{=}_{\text{sol}} -\frac{A}{\tau} + \omega B \underbrace{=}_{\text{CI}} 0 \qquad \text{donc} \qquad \boxed{B = \frac{A}{\omega\tau} .}$$

❖ ***Barème :*** *4 pts : 1 pt pour les CI, 1 pt pour $A$ et 2 pts pour $B$.*

**14** On réinjecte l'expression de $B$ dans celle de $v = \mathrm{d}x/\mathrm{d}t$,

$$\begin{aligned} v &= -\frac{1}{\tau}\,\mathrm{e}^{-t/\tau}\left[A\cos(\omega t) + \frac{A}{\omega\tau}\sin(\omega t)\right] + \mathrm{e}^{-t/\tau}\left[-\omega A\sin(\omega t) + \omega\frac{A}{\omega\tau}\cos(\omega t)\right] \\ &= -\frac{A}{\tau}\,\mathrm{e}^{-t/\tau}\cos(\omega t) - \frac{A}{\omega\tau^2}\,\mathrm{e}^{-t/\tau}\sin(\omega t) - A\omega\,\mathrm{e}^{-t/\tau}\sin(\omega t) + \frac{A}{\tau}\,\mathrm{e}^{-t/\tau}\cos(\omega t) \\ &= \frac{A}{\omega\tau^2}\,\mathrm{e}^{-t/\tau}\sin(\omega t) - A\frac{\tau^2\omega^2}{\omega\tau^2}\,\mathrm{e}^{-t/\tau}\sin(\omega t) \end{aligned}$$

$$\boxed{v = -A\left(\frac{1+\tau^2\omega^2}{\tau^2\omega}\right)\mathrm{e}^{-t/\tau}\sin(\omega t) .}$$

❖ ***Barème :*** *3 pts*

**15** La vitesse s'annule pour la première fois à l'instant $t_\mathrm{d}$ tel que

$$\sin(\omega t_\mathrm{d}) = 0 \qquad \text{soit} \qquad \omega t_\mathrm{d} = \pi \qquad \text{donc} \qquad t_\mathrm{d} = \frac{\pi}{\omega}$$

car $t_\mathrm{d}$ est le *plus petit* de ces instants. La longueur du ressort vaut alors

$$d = x(t_\mathrm{d}) = A\,\mathrm{e}^{-t_\mathrm{d}/\tau}\cos(\omega t_\mathrm{d}) + x_\mathrm{e} = -A\,\mathrm{e}^{-\pi/\omega\tau} + x_\mathrm{e} .$$

En utilisant les expressions de $A$ et de $x_\mathrm{e}$,

$$d = -\frac{ma_0}{k}\,\mathrm{e}^{-\pi/\omega\tau} + \ell_0 + \frac{ma_0}{k} \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{d = \ell_0 + \frac{ma_0}{k}\left(1 - \mathrm{e}^{-\pi/\omega\tau}\right) .}$$

❖ ***Barème :** 3 pts : 1 pour $t_d$ et 2 pour $d$.*

**16** Pour qu'il y ait déclenchement de l'airbag,

$$
\begin{aligned}
d &> \frac{3}{2}\ell_0 \\
\ell_0 + \frac{ma_0}{k}\left(1-\mathrm{e}^{-\pi/\omega\tau}\right) &> \frac{3}{2}\ell_0 \\
\frac{ma_0}{k}\left(1-\mathrm{e}^{-\pi/\omega\tau}\right) &> \frac{\ell_0}{2} \\
&\boxed{a_0 > \frac{k\ell_0}{2m\left(1-\mathrm{e}^{-\pi/\omega\tau}\right)}\,.}
\end{aligned}
$$

❖ ***Barème :** 2 pts*

# II - Alimentation à découpage

❖ ***Barème :** 54 pts au total*

## II.A - Étude pendant la première phase

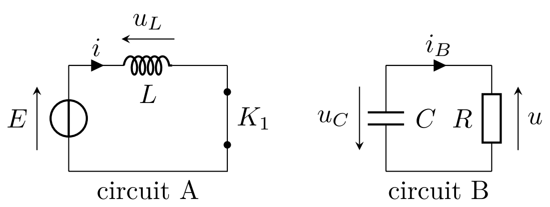



**Figure 8 – Schéma équivalent au hacheur lors de la première phase.**

### Étude du circuit B

**17** Notations : voir la figure 8.

Loi des mailles : $$u + u_C = 0$$

Dérivation : $$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} = 0$$

Loi de comportement : $$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \frac{i_B}{C} = 0$$

Loi d'Ohm : $$\boxed{\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{RC}u = 0}$$

Forme canonique : $$\boxed{\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{\tau}u = 0} \qquad \text{avec } \tau = RC\,.$$

❖ ***Barème :** 2 pts*

**18** **Forme générale des solutions :** l'équation est homogène, donc solution particulière nulle, donc

$$u(t) = A\,\mathrm{e}^{-t/\tau} \qquad \text{avec} \qquad A \text{ constante.}$$

**Détermination de $A$ :** l'énoncé indique $u(0^+) = U_0$, d'où

$$u(0^+) \underbrace{=}_{\text{sol}} A \underbrace{=}_{\text{CI}} U_0\,.$$

**Conclusion :**

$$\boxed{u(t) = U_0\,\mathrm{e}^{-t/\tau}\,.}$$

❖ ***Barème :*** *2 pts : 1 pt pour la démarche, 1 pt pour le calcul*

**19** On a directement

$$\boxed{U_1 = U_0 \, \mathrm{e}^{-\alpha T/\tau} \, .}$$

❖ ***Barème :*** *1 pt*

**Étude du circuit A**

**20** **Équation différentielle vérifiée par $i$ :** notations de la figure 8.

Loi des mailles : $$u_L = E$$

Loi de comportement : $$L \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = E$$

Conclusion : $$\boxed{\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = \frac{E}{L} \, .}$$

**Intégration :**

$$i(t) = \frac{E}{L} t + B \qquad \text{avec} \qquad B \text{ constante.}$$

**Détermination $B$ :** l'énoncé indique $i(0^+) = I_0$ d'où

$$i(0^+) \underbrace{=}_{\text{sol}} B \underbrace{=}_{\text{CI}} I_0 \, .$$

**Conclusion :**

$$\boxed{i(t) = \frac{E}{L} t + I_0 \, .}$$

❖ ***Barème :*** *3 pts : 1 pt pour l'éq diff, 1 pour l'intégration, 1 pour la conclusion.*

**21** Directement,

$$\boxed{I_1 = \frac{\alpha E T}{L} + I_0 \, .}$$

❖ ***Barème :*** *1 pt*

## II.B - Étude pendant la seconde phase

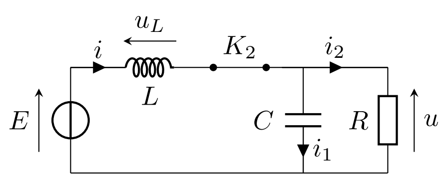



**Figure 9** – **Schéma équivalent au hacheur lors de la seconde phase.**

**22** Notations : voir figure 9

Loi des nœuds : $$i = i_1 + i_2$$

Lois de comportement $R$ et $C$ : $$i = C \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \frac{u}{R}$$

Dérivation : $$\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = C \frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}t^2} + \frac{1}{R} \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$$

Loi de comportement $L$ : $$\frac{u_L}{L} = C \frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}t^2} + \frac{1}{R} \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$$

Loi des mailles $$\frac{E}{L} - \frac{u}{L} = C \frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}t^2} + \frac{1}{R} \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$$

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}t^2} + \frac{1}{RC} \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{LC} u = \frac{E}{LC} \, .}$$



Étienne Thibierge, 20 décembre 2017, www.etienne-thibierge.fr

Identification avec la forme de l'énoncé :

$$\boxed{{\omega_0}^2 = \frac{1}{LC}} \qquad \text{et} \qquad \boxed{U_\infty = E}$$

d'où également

$$\frac{\omega_0}{Q} = \frac{1}{RC} \qquad \text{soit} \qquad Q = RC\omega_0 = \frac{RC}{\sqrt{LC}} \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{Q = R\sqrt{\frac{C}{L}}\,.}$$

> *Noter que le facteur de qualité de ce circuit est l'inverse du RLC série. Pour le comprendre qualitativement, constater que le circuit devient un oscillateur harmonique (circuit LC) dans la limite $R \to \infty$, alors que si $R \to 0$ le condensateur est court-circuité.*

❖ ***Barème :*** *6 pts : 4 pts pour l'équation, 2 pour l'identification.*

**23** Par continuité de la tension aux bornes d'un condensateur, et en utilisant la question 23,

$$\boxed{u(\alpha T^+) = u(\alpha T^-) = U_1\,.}$$

De même, par continuité de l'intensité dans une bobine et grâce à la même question,

$$\boxed{i(\alpha T^+) = i(\alpha T^-) = I_1\,.}$$

Cherchons maintenant $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(\alpha T^+)$, en raisonnant avec les notations de la figure 9.

Loi des nœuds $\qquad i = i_1 + i_2$

Lois de comportement $\qquad i = C\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \dfrac{u}{R}$

donc à $t = \alpha T^+$ $\qquad I_1 = C\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(\alpha T^+) + \dfrac{U_1}{R}$

et finalement $\qquad \boxed{\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(\alpha T^+) = \dfrac{I_1}{C} - \dfrac{U_1}{RC}\,.}$

Cherchons enfin $\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}(\alpha T^+)$, toujours avec les notations de la figure 9.

Loi des mailles $\qquad E = u + u_L$

Loi de comportement $\qquad E = u + L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$

donc à $t = \alpha T^+$ $\qquad E = U_1 + L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}(\alpha T^+)$

et finalement $\qquad \boxed{\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}(\alpha T^+) = \dfrac{E}{L} - \dfrac{U_1}{L}\,.}$

❖ ***Barème :*** *7 pts : 1 pour $i$, 1 pour $u$, 2 pour $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$, 2 pour $\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$, 1 pt pour la rédaction et les justifications.* ***Points sur les dérivées réduits à 1 chacun compte tenu de l'aide apportée.***

**24** Pour avoir $\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}(\alpha T^+) < 0$ il faut avoir

$$\boxed{U_1 > E\,,}$$

et pour que $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(\alpha T^+) > 0$ simultanément il faut

$$\frac{I_1}{C} > \frac{U_1}{RC} \qquad \text{soit} \qquad \boxed{I_1 > \frac{U_1}{R}\,.}$$

❖ ***Barème :*** *2 pts*

**25** On constate que $I_\infty$ est une solution particulière constante de l'équation différentielle donnée. Elle correspond donc à la valeur atteinte en régime permanent continu, que l'on détermine en raisonnant sur le circuit équivalent figure 10. Ainsi,

$$E = u = RI_\infty \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{I_\infty = \frac{E}{R}\,.}$$

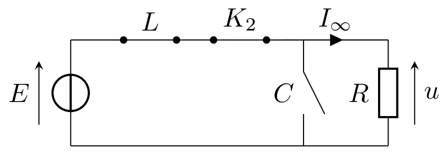



**Figure 10 – Schéma équivalent au hacheur en régime permanent continu.**

❖ ***Barème :*** *3 pts : 1 pt pour la méthode justifiée, 2 pts pour le calcul.*

**26** ▷ Le chronogramme (a) ne convient pas car il ne présente pas d'oscillations, alors que $Q = 10 > 1/2$ ;
▷ Le chronogramme (c) ne convient pas d'une part car $i$ est discontinue ;
▷ Le chronogramme (d) ne convient pas car la pente de $i$ lors de la première phase est négative alors qu'elle devrait être positive d'après la question 20 ;
▷ C'est donc **le chronogramme (b) qui convient**.
❖ ***Barème :*** *3 pts : 1 pt par chronogramme ne convenant pas.*

## II.C - Linéarisation des expressions

**27** Appliquons le développement limité pour la première phase, en prenant $t_0 = 0$. La dérivée s'écrit

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{\tau} U_0 \,\mathrm{e}^{-t/\tau} \,,$$

donc

$$u(t) = u(0^+) + \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(0^+) \times (t-0) = U_0 - \frac{U_0}{\tau}\,\mathrm{e}^{-0} t \qquad \text{soit} \qquad \boxed{u(t) = U_0 - \underbrace{\frac{U_0}{\tau}}_{\beta} t}$$

❖ ***Barème :*** *2 pts : 1 pour la dérivée, 1 pour l'application du DL.*

**28** Appliquons les développements limités pour la deuxième phase, en prenant $t_0 = \alpha T$.

$$i(t) = i(\alpha T) + \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}(\alpha T^+) \times (t - \alpha T) \qquad \text{soit} \qquad \boxed{i(t) = I_1 + \underbrace{\frac{1}{L}(E - U_1)}_{\gamma_i}(t - \alpha T)\,.}$$

De même,

$$u(t) = u(\alpha T) + \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(\alpha T^+) \times (t - \alpha T) \qquad \text{soit} \qquad \boxed{u(t) = U_1 + \underbrace{\frac{1}{C}\left(I_1 - \frac{U_1}{R}\right)}_{\gamma_u}(t - \alpha T)\,.}$$

❖ ***Barème :*** *2 pts*

## II.D - Régime de fonctionnement périodique

**29** Pour que le fonctionnement soit périodique, il faut que

$$\boxed{i(T) = I_0\,.}$$

Ainsi, en appliquant le résultat que la question 28 en $t = T$ on obtient

$$I_0 = I_1 + \frac{1}{L}(E - U_1)(1-\alpha)T\,.$$

Or d'après la question 21

$$I_1 = \frac{\alpha E T}{L} + I_0 \qquad \text{soit} \qquad I_0 = I_1 - \frac{\alpha E T}{L}\,.$$

Par identification,

$$\begin{aligned}\frac{1}{L}(E-U_1)(1-\alpha)T &= -\frac{\alpha ET}{L}\\ (E-U_1)(1-\alpha) &= -\alpha E\\ E-\alpha E-U_1(1-\alpha) &= -\alpha E\end{aligned}$$

$$\boxed{U_1 = \frac{E}{1-\alpha}\,.}$$

❖ ***Barème :** 4 pts : 1 pt pour la périodicité, 3 pts pour le calcul de $U_1$.*

**30** D'après la question 27 appliquée en $t=\alpha T$,

$$U_1 = U_0\left(1-\frac{\alpha T}{\tau}\right) \qquad \text{d'où} \qquad \frac{E}{1-\alpha} = U_0\left(1-\frac{\alpha T}{\tau}\right)$$

et finalement

$$\boxed{U_0 = \frac{E}{(1-\alpha)\left(1-\frac{\alpha T}{\tau}\right)}\,.}$$

❖ ***Barème :** 2 pts*

**31** Le taux d'ondulation se réécrit

$$\Delta U = \frac{U_0-U_1}{U_0} = 1-\frac{U_1}{U_0}$$

Or d'après la question précédente,

$$\frac{U_1}{U_0} = 1-\frac{\alpha T}{\tau}$$

d'où finalement

$$\boxed{\Delta U = \frac{\alpha T}{\tau}\,.}$$

❖ ***Barème :** 2 pts*

**32** Comme $T \ll \tau$ et $0<\alpha<1$, on en déduit que le taux d'ondulation est très faible : la tension $u$ peut être approximée comme quasiment constante tout au long d'une période. D'après la question 29, on a donc tout au long de la période

$$u \simeq U_1 = \frac{E}{1-\alpha} > E$$

compte tenu des valeurs accessibles à $\alpha$. Le montage produit bien une tension quasi-constante supérieure à $E$.

❖ ***Barème :** 2 pts, les deux aspects de la question doivent être justifiés rigoureusement.*

## II.E - Analyse énergétique

**33** L'énergie électrique emmagasinée dans la bobine s'écrit $\mathcal{E}_L = \frac{1}{2}Li^2$. Ainsi, au cours de la première phase,

$$W_{L1} = \frac{1}{2}Li(\alpha T)^2 - \frac{1}{2}Li(0)^2 = \frac{1}{2}L\left({I_1}^2-{I_0}^2\right)$$

De même, au cours de la deuxième phase,

$$W_{L2} = \frac{1}{2}Li(T)^2 - \frac{1}{2}Li(\alpha T)^2 = \frac{1}{2}L\left({I_0}^2-{I_1}^2\right)$$

compte tenu de l'hypothèse de fonctionnement périodique. Ces deux énergies sont opposées, d'où

$$\boxed{W_{L1}+W_{L2}=0\,.}$$

❖ ***Barème :** 3 pts*

**34** L'énergie emmagasinée par le condensateur s'écrit $\mathcal{E}_C = \frac{1}{2}Cu^2$. En régime périodique on a également $u(T) = u(0)$, donc au total sur une période

$$\boxed{W_{C1}+W_{C2}=0\,.}$$

❖ **Barème :** *1 pt*

**35** Qui lit l'énoncé jusqu'au bout ? :)

❖ **Barème :** *1 pt*

**36** Au cours d'une période, l'énergie fournie par le générateur se répartit entre les trois dipôles du circuit, d'où

$$\mathcal{E}_\mathrm{g} = W_C + W_L + W_R \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{\mathcal{E}_\mathrm{g} = W_R\,.}$$

❖ **Barème :** *1 pt*

**37** Comme le générateur est parcouru par l'intensité $i$, alors il fournit la puissance

$$\mathcal{P}_\mathrm{g} = Ei(t)$$

et ainsi en intégrant sur une période on obtient

$$W_R = \mathcal{E}_\mathrm{g} = \int_0^T Ei(t)\,\mathrm{d}t = E \times \frac{T}{T}\int_0^T i(t)\,\mathrm{d}t,,$$

d'où finalement

$$\boxed{W_R = E\,I_\mathrm{moy}\,T\,.}$$

❖ **Barème :** *3 pts*



Étienne Thibierge, 20 décembre 2017, www.etienne-thibierge.fr