



DS6 – PHYSIQUE-CHIMIE – CORRIGÉ

D.Malka – MPSI 2016-2017 – Lycée Saint-Exupéry

04.03.2017

Problème 1 – Suspension automobile

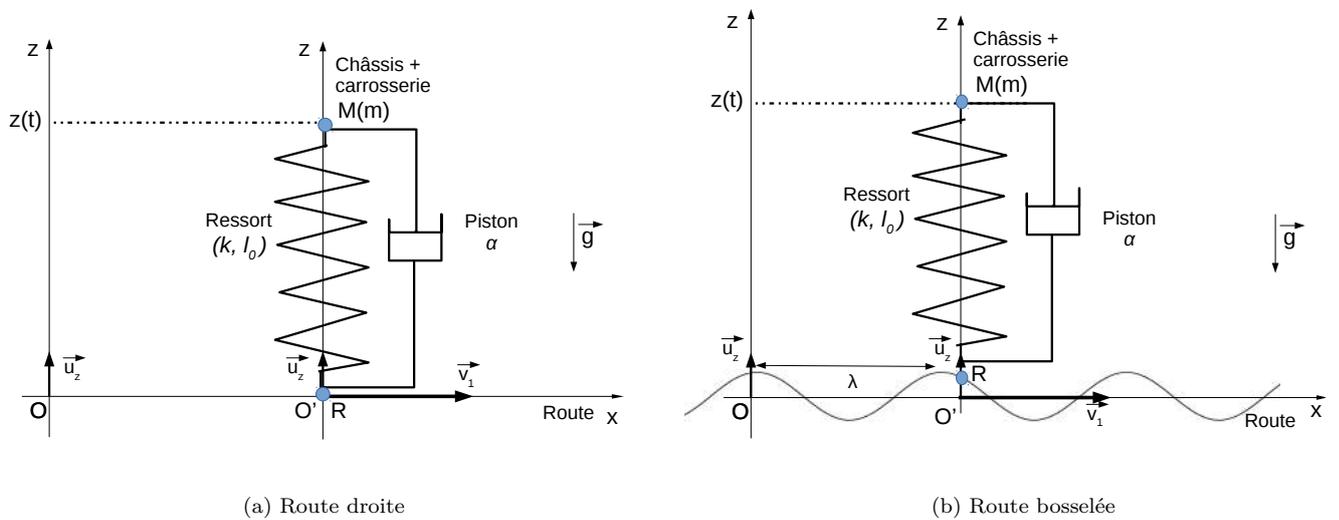


FIGURE 1 – Modélisation de la voiture

1. Exprimons la force \vec{T} de tension du ressort en fonction de $z(t)$, $z_R(t)$, l_0 et k :

$$\vec{T} = -k(l - l_0)\vec{e}_z \quad \text{avec} \quad l = z - z_R$$

d'où :

$$\vec{T} = -k(z - z_R - l_0)\vec{e}_z$$

2. Sur route horizontale droite ($z_R(t) = 0$, fig.1a), exprimons la position d'équilibre z_e du point M dans \mathcal{R}' .
A l'équilibre, seule la tension du ressort et le poids agissent sur M . Ces deux forces se compensent :

$$\vec{P} + \vec{T} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow -mg - k(z_e - l_0) = 0$$

$$\Leftrightarrow z_e = l_0 - \frac{mg}{k}$$

A l'équilibre, le ressort de l'amortisseur est comprimé d'une longueur $\frac{mg}{k}$ sous l'effet du poids du châssis.

3. La profil de la route est donnée par la fonction $h(x) = h_0 \cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right)$ (fig.1b).

3.1 Montrons que $z_R(t) = h_m \cos(\omega t)$ où on exprimera h_m et ω en fonction de λ , v_1 et h_0 .

$$z_R(x) = h(x) = h_0 \cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right)$$

Or $x(t) = v_1 t$ d'où :

$$z_R(t) = h_0 \cos\left(\frac{2\pi v_1 t}{\lambda}\right)$$

Soit :

$$\boxed{z_R(t) = h_m \cos(\omega t)} \quad \text{avec} \quad \boxed{h_m = h_0} \quad \text{et} \quad \boxed{\omega = \frac{2\pi v_1}{\lambda}}$$

3.2 Déterminons l'équation différentielle vérifiée par $Z(t) = z(t) - z_e$.

- Référentiel : \mathcal{R}' , galiléen
- Système : châssis de masse m
- Inventaire des forces (selon \vec{e}_z uniquement) :
 - poids $\vec{P} = -mg\vec{e}_z$
 - tension du ressort $\vec{T} = -k(z - z_R - l_0)\vec{e}_z$
 - frottement $\vec{f} = -\alpha(\dot{z} - \dot{z}_R)\vec{e}_z$
- 2ème loi de Newton appliquée à M dans \mathcal{R}' , galiléen :

$$m\ddot{z} = -\alpha(\dot{z} - \dot{z}_R) - k(z - z_R - l_0) - mg$$

$$\Leftrightarrow \ddot{z} + \frac{\alpha}{m}\dot{z} + \frac{k}{m}z = -g + \frac{k}{m}l_0 + \frac{k}{m}z_R + \frac{\alpha}{m}\dot{z}_R$$

avec $-mg + kl_0 = kz_e$, $\dot{Z} = \dot{z}$ et $\ddot{Z} = \ddot{z}$:

$$\Leftrightarrow \ddot{Z} + \frac{\alpha}{m}\dot{Z} + \frac{k}{m}Z = \frac{k}{m}z_R + \frac{\alpha}{m}\dot{z}_R$$

On pose $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ et $Q = \frac{m\omega_0}{\alpha}$:

$$\Leftrightarrow \ddot{Z} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{Z} + \omega_0^2 Z = \omega_0^2 z_R + \frac{\omega_0}{Q}\dot{z}_R$$

avec $z_R = z_R(t) = h_m \cos(\omega t)$ et $\dot{z}_R(t) = -h_m \omega \sin(\omega t)$

$$\Leftrightarrow \ddot{Z} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{Z} + \omega_0^2 Z = \omega_0^2 h_m \cos(\omega t) - \frac{\omega_0 \omega}{Q} h_m \sin(\omega t)$$

En posant $\omega_0^2 h_m \cos(\omega t) - \frac{\omega_0 \omega}{Q} h_m \sin(\omega t) = \frac{F_m}{m} \cos(\omega t + \varphi)$:

$$\boxed{\ddot{Z} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{Z} + \omega_0^2 Z = \frac{F_m}{m} \cos(\omega t + \varphi)}$$

Exprimons F_m et φ :

$$\frac{F_m}{m} \cos(\omega t + \varphi) = \frac{F_m}{m} \cos \varphi \cos(\omega t) - \frac{F_m}{m} \sin \varphi \sin(\omega t)$$

et

$$\frac{F_m}{m} \cos(\omega t + \varphi) = \omega_0^2 h_m \cos(\omega t) - \frac{\omega_0 \omega}{Q} h_m \sin(\omega t)$$

d'où :

$$\begin{cases} \frac{F_m}{m} \cos \varphi = \omega_0^2 h_m & (1) \\ \frac{F_m}{m} \sin \varphi = \frac{\omega_0 \omega}{Q} h_m & (2) \end{cases}$$

(1)² + (2)² donne :

$$F_m = mh_m\omega_0\sqrt{\omega_0^2 + \frac{\omega^2}{Q^2}}$$

(2)/(1) donne :

$$\tan \varphi = \frac{1}{Q} \frac{\omega}{\omega_0}$$

3.3 Le système est soumis à une excitation harmonique de pulsation ω et le système est linéaire donc la réponse en régime établi est harmonique de même pulsation ω :

$$Z(t) = Z_m(\omega) \cos(\omega t + \psi(\omega))$$

3.4 La représentation complexe de $Z(t)$, $\underline{Z}(t) = \underline{Z}_m e^{j\omega t}$ (avec $\underline{Z}_m = Z_m e^{j\psi}$) vérifie l'équation :

$$\ddot{\underline{Z}} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{\underline{Z}} + \omega_0^2 \underline{Z} = \frac{F_m}{m} e^{j(\omega t + \varphi)}$$

soit :

$$-\omega^2 \underline{Z}_m + \frac{j\omega\omega_0}{Q} \underline{Z}_m + \omega_0^2 \underline{Z}_m = \frac{F_m}{m} e^{j\varphi}$$

soit encore :

$$\underline{Z}_m = \frac{F_m(\omega) e^{j\varphi}}{m \left(\omega^2 - \omega_0^2 + \frac{j\omega\omega_0}{Q} \right)}$$

L'amplitude des oscillations de $M(m)$ est donnée par :

$$Z_m = \frac{F_m(\omega)}{m \sqrt{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \left(\frac{\omega\omega_0}{Q} \right)^2}}$$

3.5 On représente Z_m en fonction de ω (fig.2) pour certaines valeurs des paramètres m , k , α , λ et h_0 .

- Pour $\lim_{\omega \rightarrow 0} Z_m = h_0$: à basse fréquence $\omega \ll \omega_0$, le châssis suit les variations d'altitude du sol : la distance $l = z - z_R$ reste constante c'est-à-dire que l'amortisseur ne joue aucun rôle.
- Il y a résonance en amplitude au voisinage de ω_0 . $Z_m(\omega_0) \approx Qh_0$.
- Pour $\lim_{\omega \rightarrow +\infty} Z_m = 0$: à haute fréquence $\omega \gg \omega_0$, le châssis n'oscille pas : l'amortisseur « absorbe » les variations d'altitude. C'est dans ce domaine qu'il est préférable de se trouver pour voyager confortablement.

3.6 Voir question précédente.

3.7 Sur un champ de bosses de période spatiale $\lambda \sim 10 \text{ cm}$, il est préférable de rouler lentement ! Proposer une valeur de la raideur k pour voyager confortablement sur ce champ de bosses. On prendra $v_1 = 10 \text{ km.h}^{-1}$.

Deux contraintes :

— voyage confortable : $\omega_0 \ll \omega$ avec $\omega = \frac{2\pi v_1}{\lambda}$ soit $k \ll \frac{4\pi^2 m v_1^2}{\lambda^2}$

— affaissement limitée de la voiture sous son poids, prenons $l_0 - l = \frac{mg}{k} \ll l_0$ soit $k \gg \frac{mg}{l_0}$

Avec $m \sim 10^3 \text{ kg}$ et $l_0 \sim 30 \text{ cm}$, les deux contraintes imposent :

$$3.10^4 \text{ N.m}^{-1} \ll k \ll 2,5.10^6 \text{ N.m}^{-1}$$

On peut proposer $k \sim 2,5.10^5 \text{ N.m}^{-1}$.

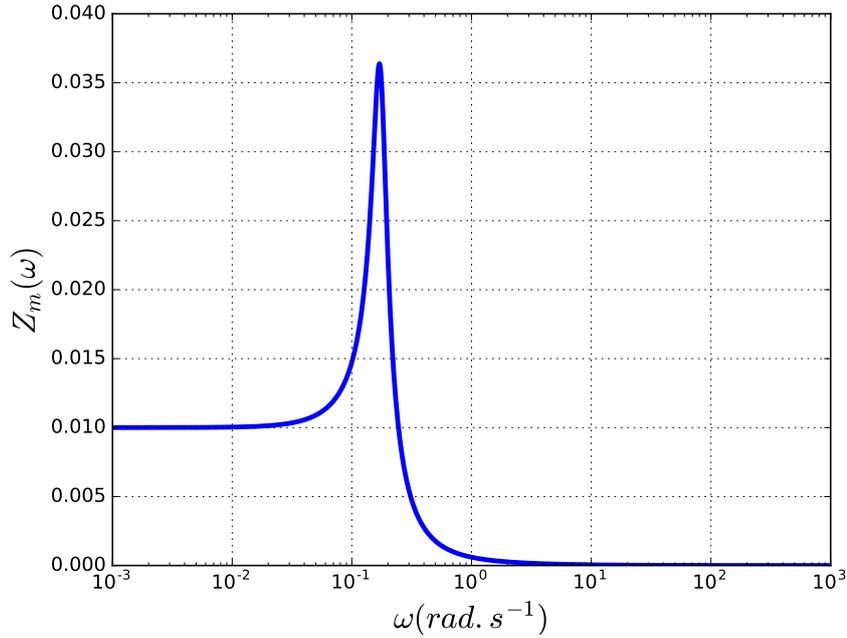


FIGURE 2 – Amplitude des oscillations du châssis de la voiture en fonction de ω . $h_0 = 10 \text{ cm}$, $\lambda = 10 \text{ cm}$, $\omega_0 = 0,17$, $Q = 3,5$.

Problème 2 – Filtrage d’un bruit électronique

On considère le filtre fig.?? de fonction de transfert :

$$H = \frac{H_0}{1 + j\omega\tau}$$

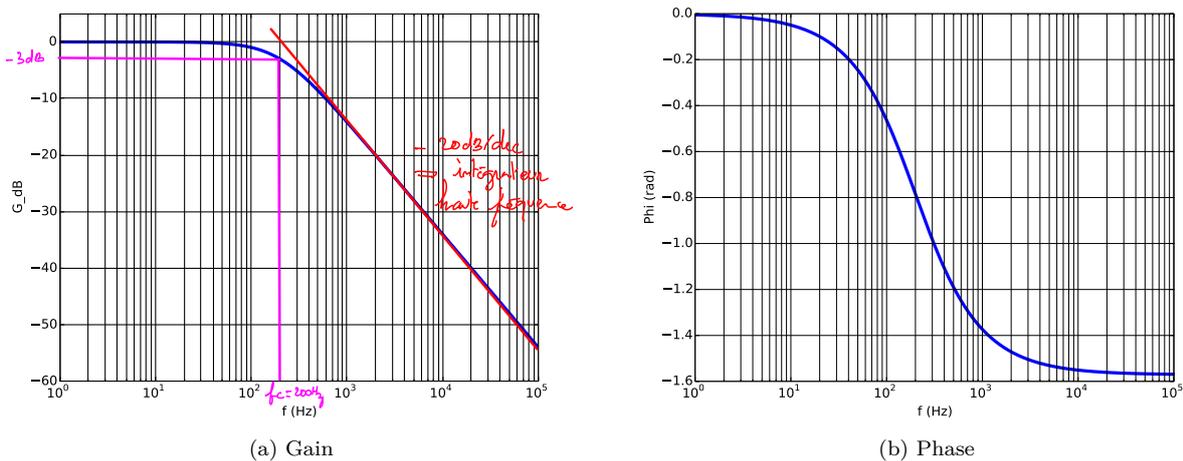


FIGURE 3 – Diagrammes de Bode

1. Etude du filtre

1.1 Nature du filtre :

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} |H| = H_0$$

$$\lim_{\omega \rightarrow +\infty} |H| = 0$$

Il s'agit d'un filtre passe-bas.

1.2 Par définition de la fréquence de coupure :

$$H(\omega_c) = \frac{H_0}{\sqrt{2}}$$

ce qui donne $f_c = \frac{1}{2\pi\tau}$.

1.3 On donne les diagrammes de Bode du filtre (fig.3 en annexe, à la dernière page de l'énoncé)

1.3.1 $f_c = 200 \text{ Hz}$.

1.3.2 A haute fréquence, c'est-à-dire pour $f \gg f_c$ alors $\underline{H} \approx \frac{H_0}{j\frac{f}{f_c}}$ qui est la fonction de transfert d'un

intégrateur. Graphiquement, le diagramme de Bode en gain peut-être assimilé à son asymptote de pente $-20\text{dB}/\text{dec}$.

2. Utilisation du filtre

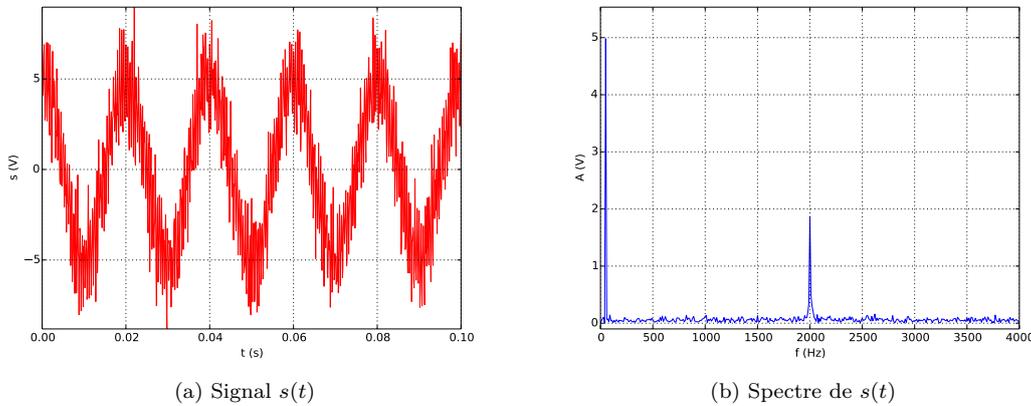


FIGURE 4 – Signal bruité

2.1 Sur le graphe temporelle, on lit : $5T_u = 0,1 \text{ s}$ soit $f_u = 50 \text{ Hz}$.

2.2 Sur le spectre de $e(t)$, on reconnaît un pic à 50 Hz : c'est le signal utile. Le pic à 2 kHz est le bruit qu'on veut éliminer. Son amplitude vaut $1,9 \text{ V}$.

2.3 Rapport signal sur bruit en entrée :

$$SNR_e = 20 \log \left(\frac{u_{eff}}{b_{eff}} \right) = 20 \log \left(\frac{u_m}{b_m} \right)$$

avec $u_m = 5 \text{ V}$ et $b_m = 1,9 \text{ V}$, $SNR_e = 8,4 \text{ dB}$.

2.4 Calculons le rapport signal sur bruit SNR_s après filtrage :

$$SNR_s = 20 \log \left(\frac{u'_{eff}}{b'_{eff}} \right) = 20 \log \left(\frac{u'_m}{b'_m} \right)$$

avec $u'_m = H(f = 50 \text{ Hz})u_m$ et $b'_m = H(f = 2 \text{ kHz})$:

$$SNR_s = 20 \log \left(\frac{u_m}{b_m} \right) + 20 \log \left(\frac{H(f = 50 \text{ Hz})}{H(f = 2 \text{ kHz})} \right)$$

$$SNR_s = SNR_e + 20 \log \left(\frac{H(f = 50 \text{ Hz})}{H(f = 2 \text{ kHz})} \right)$$

$$SNR_s = SNR_e + G(f = 50 \text{ Hz}) - G(f = 2 \text{ kHz})$$

A.N. : avec graphiquement, $G(f = 50 \text{ Hz}) \approx 0 \text{ dB}$, $G(f = 2 \text{ kHz}) \approx -20 \text{ dB}$, $SNR_s - SNR_e = +20 \text{ dB}$. Donc le filtre est adapté.

2.5 Après filtrage, le bruit est notablement atténué : fig.5.

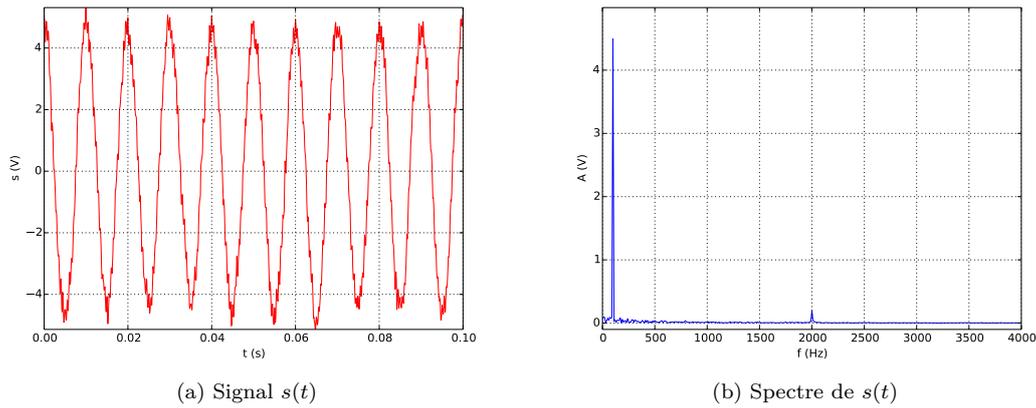


FIGURE 5 – Signal filtré

Problème 3 – Mouvement sur un manège

On considère un manège en rotation uniforme à la vitesse angulaire ω autour de son axe Oz fixe dans le référentiel terrestre \mathcal{R}_T supposé galiléen (Fig.6). On note R le rayon de la plateforme tournante du manège (fig.6).

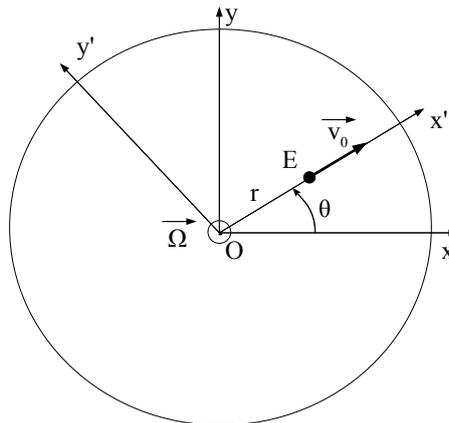


FIGURE 6 – Manège vu de dessus

Un enfant E descend prématurément du manège pour rejoindre son papa et sa maman car il a peur finalement. Du centre O du manège, il se dirige vers l'extérieur en suivant toujours le même rayon du manège. Dans \mathcal{R}_T sa trajectoire est donnée par l'équation paramétrée suivante :

$$\begin{cases} r(t) = v_0.t \\ \theta(t) = \omega_0.t \end{cases}$$

1. $[\omega_0] = T^{-1}$ et $[v_0] = L.T^{-1}$.
2. Equation de la trajectoire en coordonnées polaires $r = f(\theta)$.

$$t = \frac{\theta}{\omega_0} \Rightarrow r(\theta) = \frac{v_0}{\omega_0} \theta.$$

Soit en posant $r_0 = \frac{v_0}{\omega_0}$:

$$r = r_0 \theta$$

3. La trajectoire est une spirale. Elle est représentée fig.7. Le pas de la spirale est défini par :

$$p = r(\theta + 2\pi) - r(\theta) = 2\pi r_0$$

Le pas est indépendant de θ : la spirale est arithmétique.

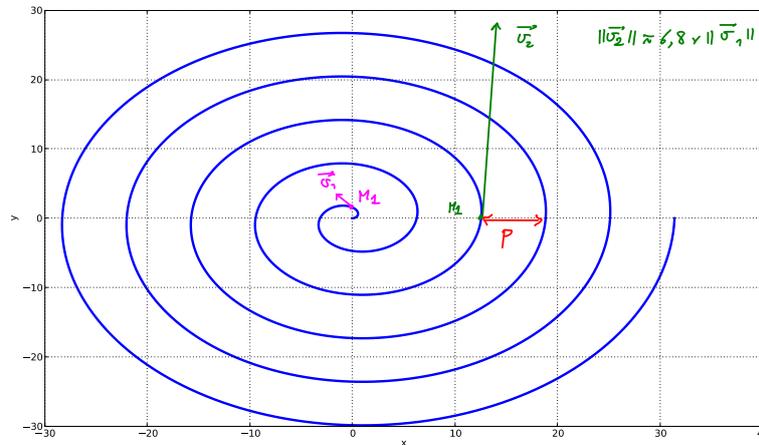


FIGURE 7 – Trajectoire de l'enfant dans le référentiel terrestre

4. Longueur de la trajectoire.

4.1 Vecteur déplacement élémentaire \vec{dl} de E dans la base polaire :

$$\vec{dl} = dr\vec{e}_r + d\theta\vec{e}_\theta$$

or $d\theta = \frac{dr}{r_0}$ d'où :

$$\vec{dl} = dr\vec{e}_r + \frac{dr}{r_0}\vec{e}_\theta$$

4.2

$$dl = \sqrt{1 + \left(\frac{r}{r_0}\right)^2}$$

4.3 Longueur de la trajectoire :

$$L = \int_0^L dl = \int_0^R \sqrt{1 + \left(\frac{r}{r_0}\right)^2} dr$$

5. Vitesse.

5.1 Vecteur vitesse de E dans la base polaire.

$$\vec{v} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta$$

avec $r = r_0\omega_0 t$, $\dot{\theta} = \omega_0$ et $\dot{r} = v_0 = r_0\omega_0$:

$$\vec{v} = r_0\omega_0\vec{e}_r + r_0\omega_0\theta\vec{e}_\theta$$

5.2 Voir fig.7.

$$v = r_0\omega_0\sqrt{1 + \theta^2}$$

Pour $\theta = \frac{\pi}{4} = v_1 = 1,86r_0\omega_0$.

Pour $\theta = 4\pi = v_2 = 12,6r_0\omega_0 \approx 6,8v_1$.

6. Accélération de E dans la base polaire en fonction de r_0 et ω_0 et θ .

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{e}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\vec{e}_\theta$$

avec $\ddot{\theta} = 0$, $\ddot{r} = r_0\ddot{\theta} = 0$, $r = r_0\theta$, $\dot{\theta} = \omega_0$ et $\dot{r} = r_0\omega_0$:

$$\boxed{\vec{a} = -r_0\omega_0^2\theta\vec{e}_r + 2r_0\omega_0^2\vec{e}_\theta}$$

7. Dans le référentiel du manège, $\omega = 0$ et $r(t) = v_0.t$: le mouvement de E est rectiligne uniforme.