DS1 – Physique-Chimie – Corrigé

D.Malka – MPSI 2017-2018 – Lycée Saint-Exupéry

23.09.2017

Problème 1 – Vibrations de la surface du Soleil

La surface d'une étoile est animée d'un mouvement de vibration qui renseigne sur sa composition. La fréquence de vibration d'une étoile dépend de plusieurs paramètres. La cohésion d'une étoile étant assurée par les forces de gravitation, on s'attend à devoir faire intervenir :

— $R \simeq 700\,000$ km, le rayon du soleil ;
— $\rho \simeq 1400\,\mathrm{kg/m^3}$, sa masse volumique ;
— $G = 6,67.10^{-11}\,\mathrm{N.m^2.kg^{-2}}$, la constante de gravitation universelle.

1. $[R] = L$, $[\rho] = M.L^{-3}$, $[G] = M^{-1}L^3.T^{-2}$.
2. Déterminons a, b et c dans l'expression de la fréquence de vibration $f = kR^a\rho^bG^c$.

   $f = kR^a\rho^bG^c \Rightarrow [f] = [R]^a[\rho]^b[G]^c$. Ce qui donne :

$$T^{-1} = (L)^a(M.L^{-3})^b(M^{-1}L^3.T^{-2})^c$$

$$\Leftrightarrow T^{-1} = (L^a)(M^b.L^{-3b})(M^{-c}L^{3c}.T^{-2c})$$

$$\Leftrightarrow T^{-1} = L^{a-3b+3c}M^{b-c}T^{-2c}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a - 3b + 3c = 0 \\ b - c = 0 \\ -2c = -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = -\dfrac{1}{2} \\ c = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

   On peut proposer la formule :

$$\boxed{f = \sqrt{G\rho}}$$

3. Dans le cas du soleil, en prenant $k = 10$ donc $f \approx 3\,mHz$: infrason.
4. Période des vibrations du Soleil $T = \dfrac{1}{f} = 327\,s \approx 5,\,min\,15\,s$.

Problème 2 – Modèle de Thomson de l'atome d'hydrogène

1. La force électrique exercée par le noyau d'hydrogène sur son électron s'écrit :

$$\overrightarrow{F_e} = -\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 a^3} r\vec{u}_r$$

   La force de rappel d'un ressort s'écrit de façon général, en supposant $\vec{u}_r$ et $\overrightarrow{OM}$ colinéaire de sens opposé comme le cas qui nous intéresse :

$$\overrightarrow{F} = -k(l - l_0)\vec{u}_r$$

Ici, $l = r$, donc la force électrique est analogue à la force de rappel d'un ressort telle que :

$$\boxed{\overrightarrow{F_e} = -k.r\vec{u}_r} \quad \text{avec} \quad \boxed{l_0 = 0} \quad \text{et} \quad \boxed{k = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 a^3}}$$

2. On ne s'intéresse, dans cette partie, qu'au mouvement de l'électron selon Ox ce qui revient à substituer dans les expressions précédentes r par $x(t)$ et $\vec{u}_r$ par $\vec{u}_x$.

2.1 Equation différentielle (1) vérifiée par $x(t)$.

Système : électron de masse m_e.
Référentiel : noyau, galiléen.
Inventaire des forces : la seule force s'exerçant est la force électrique qui se réécrit ici $\overrightarrow{F_e} = -k.x\vec{u}_x$.

Deuxième loi de Newton appliquée à l'électron dans le référentiel du noyau :

$$m_e\vec{a} = \overrightarrow{F_e}$$

Avec $\vec{a} = \ddot{x}\vec{u}_x$, il vient :

$$m_e\ddot{x} = -kx$$

$$\Leftrightarrow \boxed{m_e\ddot{x} + kx = 0} \quad (1)$$

2.2 En posant $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m_e}}$.

$$m_e\ddot{x} + kx = 0$$

$$\Leftrightarrow \ddot{x} + \frac{k}{m_e}x = 0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0} \quad (1)$$

On reconnaît l'équation d'un oscillateur harmonique.

L'équation précédente est homogène donc : $[\ddot{x}] = [\omega_0^2 x] = [\omega_0]^2[x]$. Or $[x] = L$ et $[\ddot{x}] = L.T^{-2}$ donc $\boxed{[\omega_0] = T^{-1}}$. ω_0 est la pulsation propre de l'oscillateur harmonique.

2.3 La solution général de l'équation (1) s'écrit :

$$\boxed{x(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)}$$

2.4 Déterminons les constantes d'intégration A et B :

— Continuité de la position à $t = 0$: $x(0^+) = x(0^-)$. Avec :

$$x(0^-) = x_0 \quad \text{et} \quad x(0^+) = A$$

D'où : $\underline{A = x_0}$

— Continuité de la vitesse à $t = 0$: $\dot{x}(0^+) = \dot{x}(0^-)$.
Nous avons besoin de $\dot{x}(t) = -\omega_0 A\sin(\omega_0 t) + \omega_0 B\cos(\omega_0 t)$
Avec :

$$\dot{x}(0^-) = 0 \quad \text{et} \quad \dot{x}(0^+) = \omega_0 B$$

D'où : $\underline{B = 0}$

L'équation horaire $x(t)$ du mouvement selon Ox s'écrit finalement :

$$\boxed{x(t) = x_0\cos(\omega_0 t)}$$

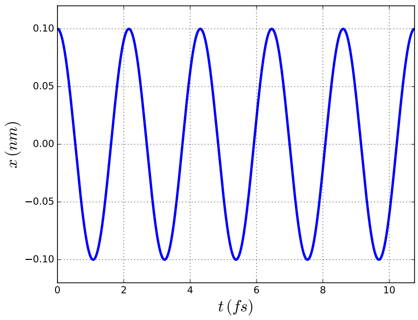

FIGURE 1 – Oscillations harmoniques de l'électron suivant Ox

2.5 Oscillations harmoniques d'amplitude x_0 et de période $T_0 = \dfrac{2\pi}{\omega_0}$ suivant O_x autour du centre du noyau O (fig.1).

3. En fait, on peut montrer que le mouvement de l'électron a lieu dans le plan Oxy et que sa coordonnée $y(t)$ vérifie la même équation que $x(t)$.

3.1 $y(t)$ vérifie la même équation que $x(t)$ donc :

$$\ddot{y} + \omega_0^2 y = 0$$

La solution générale s'écrit :

$$y(t) = C\cos(\omega_0 t) + D\sin(\omega_0 t)$$

Déterminons C et D.

— Continuité de la position à $t = 0$: $y(0^+) = y(0^-)$. Avec :

$$y(0^-) = 0 \quad \text{et} \quad y(0^+) = A$$

D'où : $\underline{C = 0}$

— Continuité de la vitesse à $t = 0$: $\dot{y}(0^+) = \dot{y}(0^-)$.
Nous avons besoin de $\dot{y}(t) = -\omega_0 C\sin(\omega_0 t) + \omega_0 D\cos(\omega_0 t)$
Avec :

$$\dot{y}(0^-) = v_0 \quad \text{et} \quad \dot{y}(0^+) = \omega_0 D$$

D'où : $\underline{D = \dfrac{v_0}{\omega_0}}$

L'équation horaire $x(t)$ du mouvement selon Ox s'écrit finalement :

$$\boxed{y(t) = \frac{v_0}{\omega_0}\sin(\omega_0 t)}$$

3.2 L'électron décrit une ellipse dont le centre est le centre O du noyau. Il la parcourt en une période $T_0 = \dfrac{2\pi}{\omega_0}$. La Terre décrit également une ellipse autour du Soleil mais le Soleil y occupe un des foyers et non le centre.

4. Des mesures spectroscopiques montrent que l'atome d'hydrogène absorbe et émet des rayonnements dans le domaine visible.

4.1 Déterminer la pulsation ω correspondant à la raie H_α de longueur d'onde dans le vide $\lambda = 656{,}2\,\text{nm}$.

$$\boxed{\omega = 2\pi f = \frac{2\pi C}{\lambda}}$$

A.N. : $\underline{\omega = 2{,}87 \times 10^{15}\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}}$

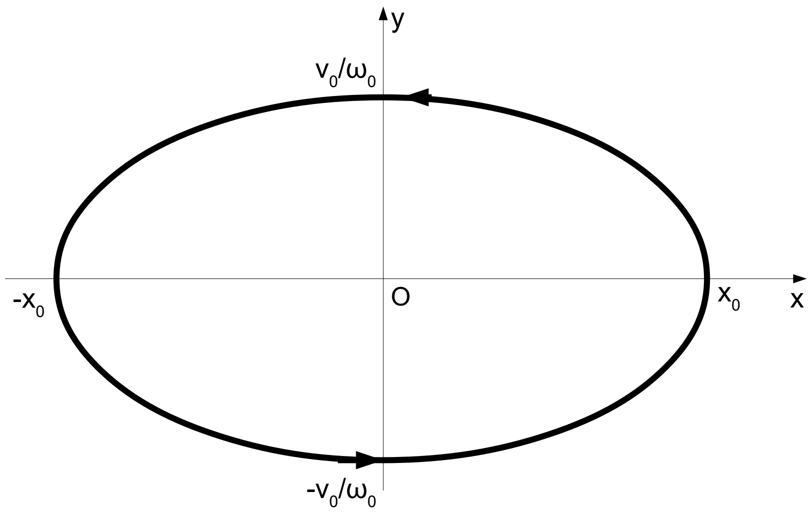

FIGURE 2 – Trajectoire de l'électron

4.2 Supposons que $\omega_0 \approx \omega$ alors :

$$\omega \approx \sqrt{\frac{k}{m_e}}$$

$$\Leftrightarrow\ k \approx m_e\omega^2$$

avec $k = \dfrac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 a^3}$

$$\Leftrightarrow\ \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 a^3} = m_e\omega^2$$

$$\Leftrightarrow\ a^3 \approx \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 m_e\omega^2}$$

$$\Leftrightarrow\ \boxed{a \approx \left(\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 m_e\omega^2}\right)^{\frac{1}{3}}}$$

A.N. : $\underline{a \approx 0{,}31\,\mathrm{nm}}$.
On retrouve l'ordre de grandeur de la taille d'un atome à savoir 0,1 nm.

4.3 Valeur prédite par la théorie quantique : $a_0 = \dfrac{4\pi\varepsilon_0\hbar^2}{m_e e^2}$.
A.N. : $a_0 \approx 0{,}052\,\mathrm{nm}$.
Il y a un facteur 6 entre les tailles a et a_0 prédites par les deux théories.

4.4 Les meures de Rutherford ont montré que $r_p \approx 10^{-15}$pm. Ces mesures invalident le modèle de Thomson qui prédit un proton de taille $a \approx 0{,}31$ nm soit 30 000 fois plus grand.

5. Instabilité de l'atome de Thomson.

5.1 Exprimer l'énergie potentielle élastique de l'électron :

$$E_{p,el} = \frac{1}{2}k(l - l_0)^2$$

avec $l = r$, $l_0 = 0$ et $k = \dfrac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 a^3}$:

$$\boxed{Ep_{el} = \frac{1}{2}k.r^2}$$

5.2 Energie mécanique :

$$E_m = \frac{1}{2}m_e v^2 + \frac{1}{2}k.r^2$$

avec $v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = \omega_0^2 x_0^2 \sin^2(\omega_0 t) + v_0^2 \cos^2(\omega_0 t)$

avec $r^2 = x^2 + y^2 = x_0^2 \cos^2(\omega_0 t) + \dfrac{v_0^2}{\omega_0^2} \sin^2(\omega_0 t)$

d'où :

$$E_m = \frac{1}{2}\left(m_e\omega_0^2 x_0^2 \sin^2(\omega_0 t) + m_e\omega_0^2 \cos^2(\omega_0 t) + kx_0^2 \cos^2(\omega_0 t) + k\frac{v_0^2}{\omega_0^2} \sin^2(\omega_0 t)\right)$$

or $m_e\omega_0^2 = k$

$$E_m = \frac{1}{2}\left(kx_0^2 \sin^2(\omega_0 t) + m_e v_0^2 \cos^2(\omega_0 t) + kx_0^2 \cos^2(\omega_0 t) + m_e v_0^2 \sin^2(\omega_0 t)\right)$$

$$E_m = \frac{1}{2}\left(kx_0^2(\sin^2(\omega_0 t) + \cos^2(\omega_0 t)) + m_e v_0^2(\sin^2(\omega_0 t) + \cos^2(\omega_0 t))\right)$$

$$\boxed{E_m = \frac{1}{2}kx_0^2 + \frac{1}{2}m_e v_0^2}$$

L'énergie mécanique est constante et égale à sa valeur initiale.

5.3 Si l'électron rayonne de l'énergie électromagnétique au cours du mouvement alors, d'après le principe de conservation de l'énergie, son énergie mécanique diminue.

5.4 Si l'énergie potentielle $\frac{1}{2}k.r^2$ de l'électron diminue au cours du temps alors r diminue également : l'électron finit par atteindre le centre O de l'atome.