

Circuit linéaire du second ordre

9

Dans ce chapitre, on étudie la réponse temporelle de systèmes d'ordre deux, qu'ils soient électriques ou mécaniques. L'allure des courbes est ensuite analysée en fonction de la pulsation caractéristique et du coefficient d'amortissement du système.

1 Exemple expérimental

1.1 Montage

On cherche à observer, puis prévoir par le calcul, le comportement du montage ci-dessous lorsqu'il est alimenté par un échelon de tension délivré par un GBF. On observe simultanément les tensions délivrées par le GBF et aux bornes du condensateur sur les deux voies d'un oscilloscope. On néglige la résistance de sortie R_g du GBF devant la résistance variable R .

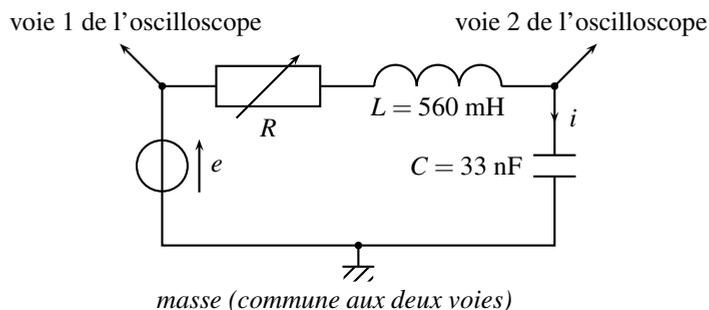


Figure 9.1 – Schéma du montage étudié.

1.2 Régimes transitoire puis permanent

On observe $e(t)$ sur la voie 1, qui passe de 0 à $E_0 = 600 \text{ mV}$, et la tension $u_C(t)$ aux bornes du condensateur sur la voie 2. Il existe plusieurs types de courbes lorsque R varie. Plus R augmente, plus le circuit est amorti, moins il oscille.

On observe dans chaque cas deux régimes :

- le **régime établi**, ou **régime permanent**, pour lequel la sortie est constante, comme l'entrée, égale à E_0 ,
- le **régime transitoire**, entre l'instant initial et le régime permanent. Il peut être oscillant ou non.

On observe que la durée du régime transitoire commence par diminuer avec la valeur de R , puis augmente après avoir atteint un minimum.

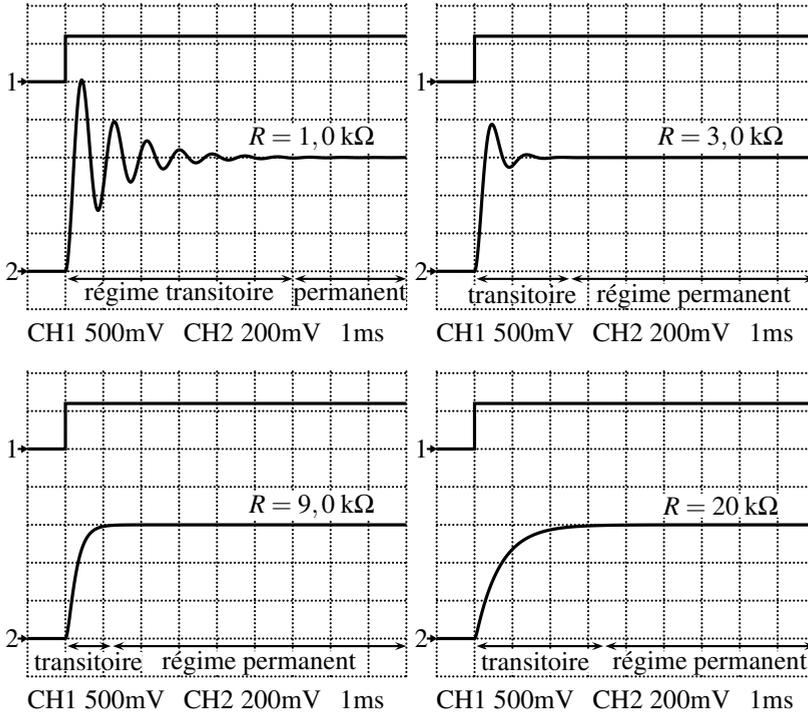


Figure 9.2 – Formes d'onde de l'essai indiciel en fonction de la valeur de R .

La courbe part avec une tangente nulle en l'origine, comme le montre le zoom pour $R = 3,0 \text{ k}\Omega$:

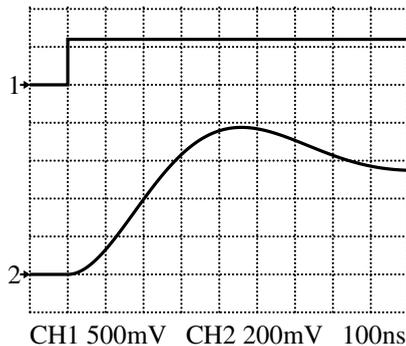


Figure 9.3 – Zoom d'une réponse indicielle en $t = 0$.

1.3 Portraits de phase

On peut étudier la dérivée temporelle de u_C (notée $\frac{du_C}{dt}$ ou \dot{u}_C), en fonction de u_C , pour chacun des quatre cas précédents. En notant E_0 la valeur de $e(t)$ pour $t > 0$, on trace alors $\frac{\dot{u}_C}{E_0}$ en fonction de $\frac{u_C}{E_0}$. L'allure des courbes est alors analogue quelque soit la valeur de E_0 .

L'état initial, connu avec les conditions initiales, est représenté par le point E_i de coordonnées $(u_C = 0, \dot{u}_C = 0)$ dans chaque cas. Dans l'état final, le condensateur est chargé et la tension $u_C(t)$ vaut E_0 et reste constante ; sa dérivée est alors nulle. Le portrait de phase converge vers le point E_f de coordonnées $(u_C = E_0, \dot{u}_C = 0)$.

Deux cas se présentent. Celui pour lequel la sortie est oscillante ; le portrait de phase converge alors vers le point E_f en tournant autour de lui (voir figure 9.4). Celui pour lequel la sortie n'oscille pas ; le portrait de phase converge directement vers E_f (voir figure 9.5).

Pour $R = 1,0 \text{ k}\Omega$ et $R = 3,0 \text{ k}\Omega$, le montage est oscillant. En effet, on observe que la dérivée est alternativement positive et négative. De plus, le portrait de phase tourne autour de la valeur finale $u_C = E_0$, $u_C(t)$ est donc alternativement supérieure et inférieure à E_0 , pour converger vers E_0 .

De plus, plus R augmente, plus le circuit est amorti, les valeurs extrémales de \dot{u}_C diminuent, tout comme celles de u_C . Le système fait moins de tours autour de l'état final, le système oscille moins.

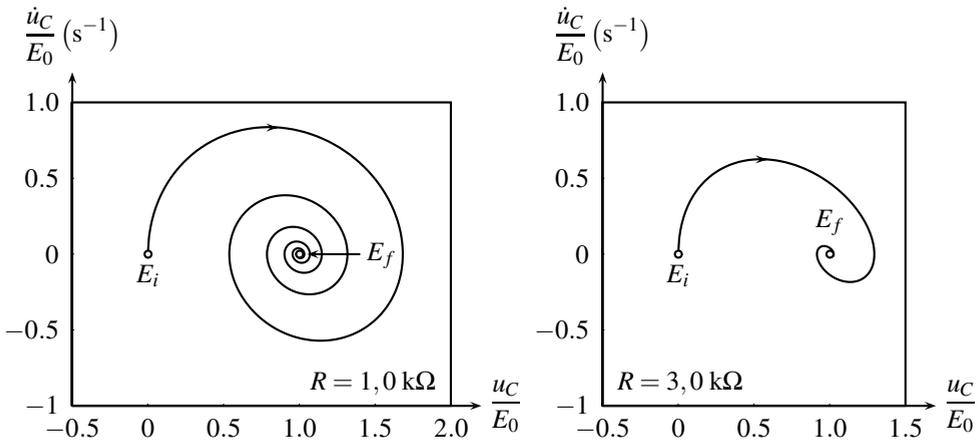


Figure 9.4 – Portraits de phase $\frac{\dot{u}_C}{E_0} = f\left(\frac{u_C}{E_0}\right)$ pour des systèmes peudopériodiques.

Pour $R = 9,0 \text{ k}\Omega$ et $R = 20 \text{ k}\Omega$, le circuit n'est plus oscillant : le portrait de phase ne tourne pas autour de l'état final. En partant de l'état initial, on observe que \dot{u}_C est positive, la tension u_C augmente. Puis \dot{u}_C diminue pour arriver à 0, où le système ne bouge plus : il a atteint son état final.

De plus, la valeur maximale de \dot{u}_C est de plus en plus faible quand R augmente. Le système est de plus en plus amorti.

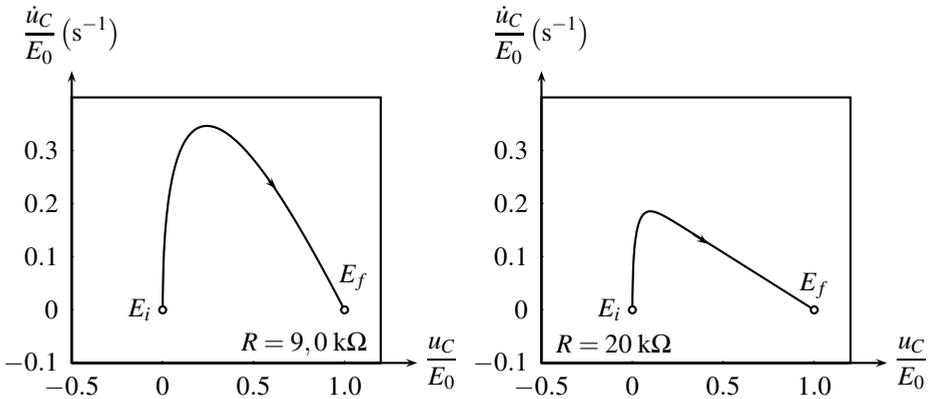


Figure 9.5 – Portraits de phase $\frac{\dot{u}_C}{E_0} = f\left(\frac{u_C}{E_0}\right)$ pour des systèmes apériodique ou critique.

Ces résultats expérimentaux sont modélisés dans le paragraphe suivant.

2 Équation différentielle sur la tension aux bornes du condensateur

2.1 Mise en équation

Le schéma électrique du circuit est le suivant :

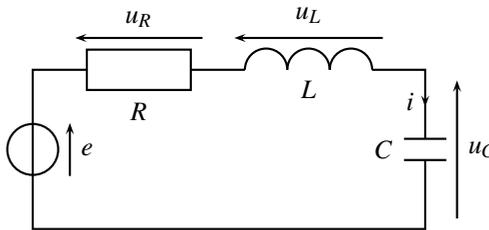


Figure 9.6 – Montage dont on étudie l'équation différentielle.

Fonctionnellement, le montage étudié est symboliquement représenté par :

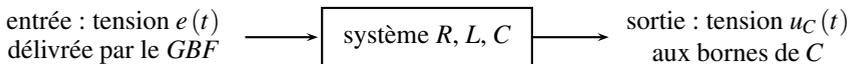


Figure 9.7 – Schéma-bloc du montage.

On cherche alors le lien entre $u_C(t)$ et $e(t)$. La loi des mailles impose :

$$e(t) = u_C(t) + u_L(t) + u_R(t).$$

De plus, R , L et C sont traversés par le même courant d'intensité $i(t)$:

$$u_R(t) = Ri(t), \quad u_L(t) = L \frac{di}{dt} \quad \text{et} \quad i(t) = C \frac{du_C}{dt}.$$

Ainsi :

$$u_R(t) = Ri(t) = RC \frac{du_C}{dt} \quad \text{et} \quad u_L(t) = L \frac{di}{dt} = LC \frac{d}{dt} \left(\frac{du_C}{dt} \right) = LC \frac{d^2 u_C}{dt^2}.$$

On remarque que c' est la dérivée seconde de $u_C(t)$ qui intervient dans $u_L(t)$.

La loi des mailles devient finalement :

$$e(t) = LC \frac{d^2 u_C}{dt^2} + RC \frac{du_C}{dt} + u_C(t).$$

Cette équation différentielle, du **deuxième ordre** (voir appendice mathématique), décrit l'évolution de la tension $u_C(t)$ dans le circuit.

2.2 Forme canonique de l'équation différentielle

Quelles sont les unités des différents termes de l'équation différentielle ?

$e(t)$ et $u_C(t)$ sont en volts :

$$[e(t)] = \text{V}, \quad [u_C(t)] = \text{V}.$$

Ainsi la dérivée $\frac{du_C}{dt}$ est en volts divisés par des secondes : $\left[\frac{du_C}{dt} \right] = \text{V} \cdot \text{s}^{-1}$.

Et la dérivée seconde $\frac{d^2 u_C}{dt^2}$ est en volts divisés par des secondes au carré. C'est, en effet, une

dérivée temporelle (en s^{-1}) d'une dérivée première (en $\text{V} \cdot \text{s}^{-1}$) : $\left[\frac{d^2 u_C}{dt^2} \right] = \text{V} \cdot \text{s}^{-2}$.

Pour que l'équation différentielle soit homogène, c'est-à-dire que tous les termes sommés aient la même unité, le volt, il faut que :

$$[LC] = \text{s}^2 \quad \text{et} \quad [RC] = \text{s}.$$

Afin d'écrire toutes les équations différentielles du deuxième ordre de la même manière, on définit :

- la **pulsation caractéristique** ω_0 , qui s'exprime en $\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}$,
- le **facteur d'amortissement** ξ , qui est sans dimension,
- la **facteur de qualité** $Q = \frac{1}{2\xi}$, qui est sans dimension.

Les équations différentielles du deuxième ordre sont alors écrites sous la forme canonique :

$$\frac{1}{\omega_0^2} \frac{d^2 u_C}{dt^2} + \frac{2\xi}{\omega_0} \frac{du_C}{dt} + u_C(t) = e(t).$$

ou bien, avec $Q = \frac{1}{2\xi}$:

$$\frac{1}{\omega_0^2} \frac{d^2 u_C}{dt^2} + \frac{1}{Q\omega_0} \frac{du_C}{dt} + u_C(t) = e(t).$$

Les valeurs de ω_0 et ξ du circuit étudié peuvent être identifiées en comparant l'équation différentielle et sa forme canonique :

$$\begin{cases} LC = \frac{1}{\omega_0^2} \\ RC = \frac{2\xi}{\omega_0} \end{cases} \quad \text{donc} \quad \begin{cases} \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \\ \xi = \frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}} \end{cases}$$

 Le facteur de qualité vaut ici $Q = \frac{1}{2\xi} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$.

2.3 Conditions initiales

On a vu dans le chapitre précédent que la résolution mathématique d'une équation différentielle du premier ordre $\tau \frac{ds}{dt} + s = s_\infty$ requiert une condition initiale sur le signal $s(t)$ cherché, en général la valeur $s(0)$ à l'instant initial. En effet, si l'équation différentielle pilote l'évolution du système, il convient d'expliquer de quel état il part.

De même, la résolution d'une équation différentielle du deuxième ordre requiert deux conditions initiales, comme dans le cas de l'oscillateur harmonique où l'on doit disposer de deux conditions initiales sur la position et la vitesse. Dans l'exemple du circuit *RLC* étudié, il s'agit des valeurs en $t = 0$ de $u_C(t)$ et de sa dérivée : $u_C(0)$ et $\left(\frac{du_C}{dt}\right)_{t=0}$.

Sur les oscillographes initiaux, il apparaît que $e(t)$ est nul pour $t < 0$, le circuit n'est pas alimenté, toutes les tensions sont, elles aussi, nulles, par exemple $u_C(t)$. Or la tension $u_C(t)$ aux bornes du condensateur de capacité C est continue ; elle était nulle pour $t < 0$, elle le reste en $t = 0$:

$$u_C(0) = 0.$$

La tension $u_R(t) = Ri(t)$, donc l'intensité $i(t)$ du courant, étaient nuls pour $t < 0$. Attendu que l'intensité du courant est continue dans une bobine d'inductance L , elle reste nulle en $t = 0$: $i(0) = 0$. Or $i(t) = C \frac{du_C}{dt}$ et ainsi : $\left(\frac{du_C}{dt}\right)_{t=0} = 0$.

Le couple {équation différentielle, conditions initiales} à résoudre est maintenant complet. Attendu que pour $t > 0$, $e(t) = E_0$:

$$\begin{cases} \frac{1}{\omega_0^2} \frac{d^2 u_C}{dt^2} + \frac{2\xi}{\omega_0} \frac{du_C}{dt} + u_C(t) = E_0 \\ u_C(0) = 0 \\ \left(\frac{du_C}{dt}\right)_{t=0} = 0. \end{cases}$$

3 Solution de l'équation différentielle

La solution générale de l'équation différentielle linéaire avec second membre non nul (voir annexe sur les outils mathématiques) est la somme d'une **solution particulière**, notée $u_{C,p}(t)$ (indice p pour « particulière ») et d'une **solution homogène**, notée $u_{C,h}(t)$ (indice h pour « homogène »).

3.1 Régime permanent ou établi

La solution particulière $u_{C,p}(t)$ est cherchée sous la forme d'une constante, comme l'entrée. Sa dérivée première est donc nulle, ainsi que sa dérivée seconde. L'équation différentielle devient donc $\frac{1}{\omega_0^2} \times 0 + \frac{2\xi}{\omega_0} \times 0 + u_{C,p}(t) = E_0$. Ainsi : $u_{C,p}(t) = E_0$.

En comparant aux graphes du paragraphe 1.2, où la sortie vaut E_0 en régime permanent, on voit que la solution particulière décrit le régime permanent ou établi. Ceci revêt un caractère général.

Le régime permanent ou établi est complètement décrit par la solution particulière.

3.2 Solutions homogènes

La solution homogène $u_{C,h}(t)$ est solution de l'équation homogène, c'est à dire avec un second membre nul :

$$\frac{1}{\omega_0^2} \frac{d^2 u_{C,h}}{dt^2} + \frac{2\xi}{\omega_0} \frac{du_{C,h}}{dt} + u_{C,h}(t) = 0.$$

Sa résolution passe l'équation caractéristique associée par (voir annexe sur les outils mathématiques page 1070) :

$$\frac{r^2}{\omega_0^2} + \frac{2\xi}{\omega_0} r + 1 = 0,$$

dont le discriminant Δ est $\Delta = \left(\frac{2\xi}{\omega_0}\right)^2 - 4 \times \frac{1}{\omega_0^2} \times 1 = \frac{4}{\omega_0^2} (\xi^2 - 1)$.

Le comportement physique du système est différent suivant le signe de Δ . On distingue trois cas :

a) Cas aperiodique $\Delta > 0$

Ce cas correspond à $\xi^2 > 1$ ou, comme ξ est positif, $\xi > 1$ ou $Q < \frac{1}{2}$. Il correspond,

dans l'expérience du paragraphe 1.2, à $R > 2\sqrt{\frac{L}{C}} \simeq 8,2\text{k}\Omega$, c'est à dire aux deux dernières expériences. Le système est alors **fortement amorti**.

Les solutions de l'équation caractéristique associée sont alors :

$$\begin{aligned} r_1 &= \omega_0 \left(-\xi + \sqrt{\xi^2 - 1} \right), \\ r_2 &= \omega_0 \left(-\xi - \sqrt{\xi^2 - 1} \right). \end{aligned}$$

Les solutions de l'équation différentielle sont dès lors, avec u_1 et u_2 deux constantes d'intégration, inconnues à ce stade de la résolution :

$$\begin{aligned} u_{C,h}(t) &= u_1 e^{r_1 t} + u_2 e^{r_2 t} \\ &= u_1 \exp \left(\omega_0 t \left(-\xi + \sqrt{\xi^2 - 1} \right) \right) + u_2 \exp \left(\omega_0 t \left(-\xi - \sqrt{\xi^2 - 1} \right) \right) \\ &= \exp \left(-\omega_0 \xi t \right) \left(u_1 \exp \left(\omega_0 \sqrt{\xi^2 - 1} t \right) + u_2 \exp \left(-\omega_0 \sqrt{\xi^2 - 1} t \right) \right). \end{aligned}$$

Ce cas est nommé **apériodique** car aucune des fonctions utilisées n'est périodique.

b) Cas critique $\Delta = 0$

Ce cas tire son nom de son caractère limite entre deux autres régimes. C'est le cas où $\xi = 1$ ou $Q = \frac{1}{2}$. Il correspond, dans l'expérience du paragraphe 1.2, à la valeur particulière $R = 2\sqrt{\frac{L}{C}} \simeq 8,2 \text{ k}\Omega$. On parle d'**amortissement critique**.

Comme démontré dans l'annexe sur les outils mathématiques, la solution de l'équation homogène est alors :

$$u_{C,h}(t) = (u_1 + \mu t) \exp(-\omega_0 \xi t),$$

où u_1 et μ sont deux constantes d'intégration, inconnues à ce stade de la résolution.

c) Cas pseudopériodique $\Delta < 0$

C'est le cas où $\xi < 1$ ou $Q > \frac{1}{2}$, soit $R < 2\sqrt{\frac{L}{C}} \simeq 8,2 \text{ k}\Omega$. Le système est **faiblement amorti**, il correspond aux deux premières expériences du paragraphe 1.2.

Comme démontré dans l'annexe sur les outils mathématiques, la solution de l'équation homogène est alors :

$$u_{C,h}(t) = \exp(-\omega_0 \xi t) \left(u_1 \cos \left(\omega_0 \sqrt{1 - \xi^2} t \right) + u_2 \sin \left(\omega_0 \sqrt{1 - \xi^2} t \right) \right).$$

Des oscillations, dues aux fonctions trigonométriques de pulsation $\omega_0 \sqrt{1 - \xi^2}$, apparaissent dans ce cas, d'où le nom pseudopériodique. L'ensemble n'est toutefois pas périodique à cause de la présence du terme $\exp(-\omega_0 \xi t)$. On retiendra que la **pseudopulsation** est différente de ω_0 et vaut :

$$\omega = \omega_0 \sqrt{1 - \xi^2}.$$

3.3 Solution complète

La solution générale $u_C(t)$ est la somme des solutions particulière, $u_{C,p}(t)$, et homogène, $u_{C,h}(t)$:

$$u_C(t) = E_0 + u_{C,h}(t).$$



C'est sur cette solution complète qu'on identifie les constantes d'intégration par application des conditions initiales.

Il existe trois cas correspondants aux trois expressions différentes de $u_{C,h}(t)$ suivant le signe de Δ .

Exemple

À titre d'exemple, le cas où $\xi = 1$ est entièrement résolu :

$$u_C(t) = E_0 + (u_1 + \mu t) \exp(-\omega_0 \xi t).$$

Les conditions initiales imposent $u_C(0) = 0$ et $\left(\frac{du_C}{dt}\right)_{t=0} = 0$:

- $u_C(0) = 0 = E_0 + u_1$ donc : $u_1 = -E_0$;
- la dérivée de $u_C(t)$ par rapport à t est :

$$\frac{du_C}{dt}(t) = \mu \exp(-\omega_0 \xi t) + (u_1 + \mu t)(-\omega_0 \xi) \exp(-\omega_0 \xi t),$$

ainsi :

$$\left(\frac{du_C}{dt}\right)_{t=0} = 0 = \mu - \omega_0 \xi u_1,$$

d'où :

$$\mu = \omega_0 \xi E_0.$$

Finalement, la solution de l'ensemble {équation différentielle, conditions initiales}, dans le cas $\xi = 1$ est :

$$u_C(t) = E_0 + E_0(1 + \omega_0 \xi t) \exp(-\omega_0 \xi t).$$

Il est hors de question d'apprendre ce résultat par cœur. Seule la démarche doit être sue, ainsi que l'allure des graphes pour chaque cas, pour une tension d'entrée e en échelon.

On observe que les cas aperiodique ou critique on la même allure graphique. De plus :

Plus un système est amorti, c'est à dire plus son coefficient d'amortissement ξ est important, ou son facteur de qualité Q petit, moins il oscille.

Un oscillateur de grand facteur de qualité oscille beaucoup avant de s'arrêter.

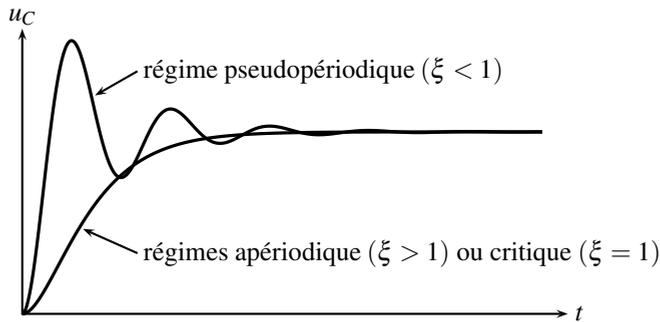


Figure 9.8 – Essais indiciels d'un système d'une deuxième ordre en fonction de ξ .

4 Durée du régime transitoire

4.1 Définition du temps de réponse T_R

On définit dans la littérature le **temps de réponse à 5%**. Le terme « littérature » renvoie ici à l'ensemble des publications scientifiques et techniques dans le domaine étudié. Ce temps de réponse à 5%, noté T_R , est la durée au bout de laquelle le système atteint sa valeur finale à moins de 5%, lors d'un essai indiciel (réponse à un échelon de hauteur E_0). Le signal reste alors compris entre 0,95 et 1,05 fois la valeur finale. Cette durée correspond à la durée du régime transitoire. Cette définition est illustrée par deux exemples ci-dessous.

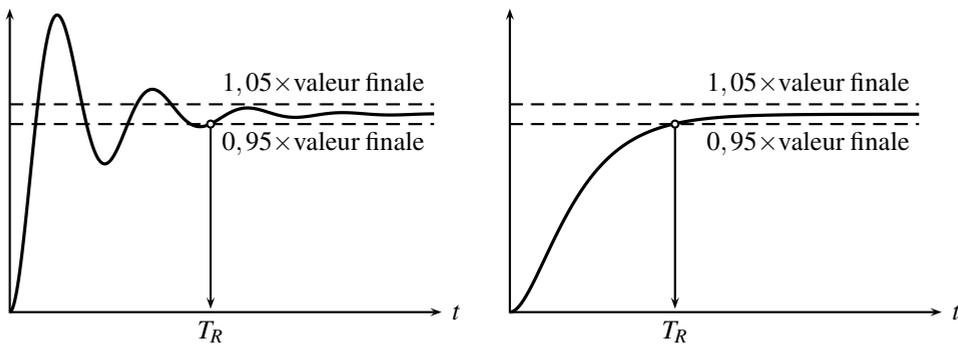


Figure 9.9 – Mise en évidence du temps de réponse à 5%.

Ce temps de réponse est calculable pour chaque valeur du facteur d'amortissement ξ . On trace ensuite le paramètre sans dimension $\omega_0 T_R$ en fonction du facteur d'amortissement ξ , en échelle logarithmique.

Qu'est-ce qu'un diagramme avec des échelles logarithmique ? On trace $\log(\omega_0 T_R)$ en fonction de $\log(\xi)$. Cependant, on continue à graduer les axes par les valeurs de $\omega_0 T_R$ et ξ pour plus de clarté. Les graduations ne sont alors plus équidistantes, mais se resserrent vers le haut et la droite.

Le graphe est tracé sur la figure 9.10. On observe que le minimum a pour coordonnées ($\xi = 0,69$; $\omega_0 T_R \approx 3$).

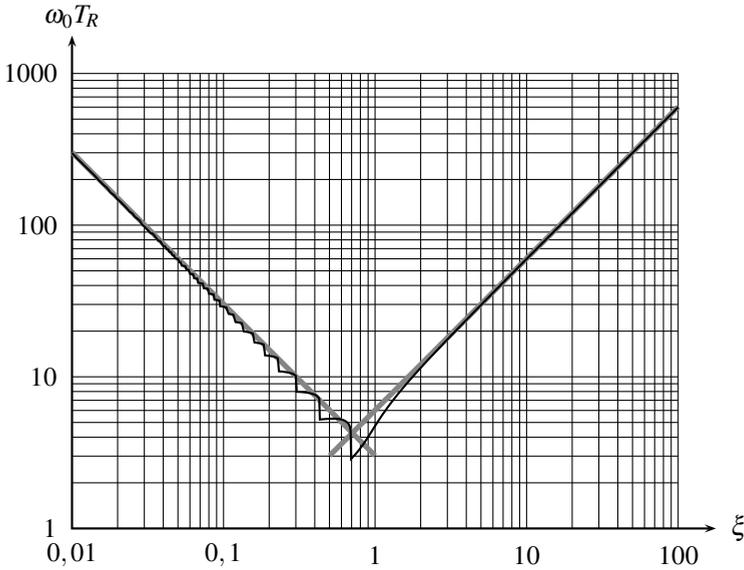


Figure 9.10 – Temps de réponse à 5% en fonction de ξ (en noir) et modélisation affine (en gris).

Le temps de réponse minimum $T_{R,\min}$ est obtenu pour $\xi = 0,69$ et vaut $T_{R,\min} \approx \frac{3}{\omega_0}$.

Remarque

Cette valeur de $\xi = 0,69$ correspond à un régime pseudopériodique.

4.2 Complément : modélisation

La courbe en V du temps de réponse est approximée par deux droites de pentes opposées, qui se croisent en $\xi = 0,69$ (temps de réponse minimum). Ces droites sont des asymptotes. On observe que cette modélisation est d'autant plus vérifiée qu'on s'éloigne de $\xi = 0,69$.

Quelle est la relation entre $\omega_0 T_R$ et ξ pour chacune des deux droites ?

- Pour $\xi \in [10^{-2}, 1]$, on a tracé $\log(\omega_0 T_R) = 0,48 - \log(\xi)$:

$$\log(\omega_0 T_R) = 0,48 - \log(\xi) \simeq \log(3,0) - \log(\xi)$$

$$\log(\omega_0 T_R) \simeq \log\left(\frac{3,0}{\xi}\right) \quad \text{ou} \quad T_R \simeq \frac{3}{\xi \omega_0}.$$

- Pour $\xi \in [5 \cdot 10^{-1}, 10^2]$, on a tracé $\log(\omega_0 T_R) = 0,78 + \log(\xi)$:

$$\log(\omega_0 T_R) = 0,78 + \log(\xi) \simeq \log(6,0) + \log(\xi)$$

$$\log(\omega_0 T_R) \simeq \log(6,0 \xi) \quad \text{ou} \quad T_R \simeq \frac{6\xi}{\omega_0}.$$

Ces deux expressions sont des approximations du temps de réponse T_R en fonction du coefficient d'amortissement ξ , valables approximativement pour $\xi < 0,2$ et $\xi > 2$, quand les droites grisées modélisent bien la courbe noire $\omega_0 T_R(\xi)$.

5 Réponse à un signal créneaux

5.1 Observations expérimentales

L'étude expérimentale de la réponse indicielle (réponse à un échelon de hauteur E_0) et du régime libre (entrée nulle mais conditions initiales différentes de zéro), s'effectue en alimentant le circuit par un signal créneaux de valeur moyenne différente de zéro et de période T . Le régime permanent doit avoir le temps de s'établir pour chaque demi-période, aussi doit-on imposer $T \gg T_R$, où T_R est le temps de réponse du système.

Pour le circuit série constitué de $C = 33 \text{ nF}$, $L = 560 \text{ mH}$ et $R = 3 \text{ k}\Omega$, déjà étudié en début de chapitre, on calcule :

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \simeq 7,4.10^3 \text{ rad.s}^{-1} \quad \text{et} \quad \xi = \frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}} \simeq 0,37.$$

Avec le graphe de $\omega_0 T_R$ en fonction de ξ , on trouve $\omega_0 T_R \approx 8$, c'est à dire $T_R \approx 1,1 \text{ ms}$. Le résultat est le même avec la formule simplifiée $T_R \approx \frac{3}{\xi \omega_0}$. Le choix de $T = 8 \text{ ms}$, observé sur l'oscillographe de la page suivante, est donc valable.

On observe la charge du condensateur lors de l'essai indiciel, puis sa décharge lors du régime libre.

Le portrait de phase est explicite. Le système part du point A de coordonnées $(\dot{u}_C = 0, u_C = 0)$ pour aboutir au point B de coordonnées $(\dot{u}_C = 0, u_C = E_0)$ lors de l'essai indiciel, en oscillant, car \dot{u}_C est alternativement positif et négatif. Puis il revient vers A lors du régime libre, en oscillant de même.

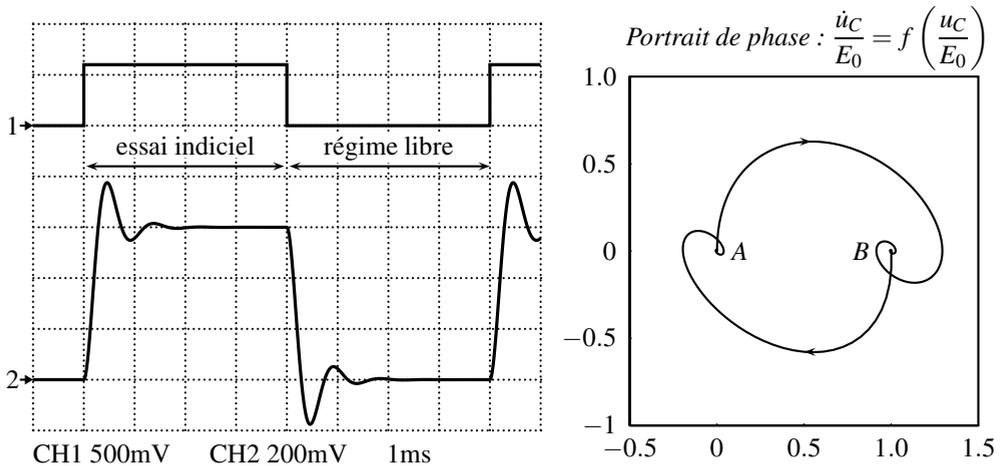


Figure 9.11 – Essai indiciel, régime libre et portrait de phase d'un système pseudopériodique.

5.2 Modélisation du régime libre

La mise en équation complète de la phase de régime libre requiert :

- l'équation différentielle qui modélise l'évolution du système,
- les conditions initiales qui précisent de quels points le système part.

De plus, on choisit de prendre pour nouvel instant initial $t = 0$, la date où ce régime commence. Ce choix de la date $t = 0$ est toujours arbitraire.

Dans un régime libre, le système n'est plus alimenté, $e(t) = 0$. L'équation différentielle sur $u_C(t)$ devient homogène (elle a un second membre nul) :

$$\frac{1}{\omega_0^2} \frac{d^2 u_C}{dt^2} + \frac{2\xi}{\omega_0} \frac{du_C}{dt} + u_C = 0 \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \omega_0 \simeq 7,4 \cdot 10^3 \text{ rad.s}^{-1} \\ \xi \simeq 0,37 < 1. \end{cases}$$

Le système est faiblement amorti, $\xi < 1$, il oscille donc.

Quelle est la condition initiale ? L'observation des formes d'onde montre qu'en fin d'essai indiciel, $u_C = E_0$ et $\frac{du_C}{dt} = 0$ pour $t < 0$. En effet, la tension aux bornes du condensateur reste constante, donc le courant qui le traverse est nul $i = C \frac{du_C}{dt} = 0$. À $t = 0^+$, au tout début du régime libre, $u_C(0^+) = E_0$, car la tension aux bornes du condensateur est continue ; de même $i(0^+) = C \left(\frac{du_C}{dt} \right)_{t=0^+} = 0$ car l'intensité du courant dans la bobine est continue. Ainsi, le problème devient :

$$\begin{cases} \frac{1}{\omega_0^2} \frac{d^2 u_C}{dt^2} + \frac{2\xi}{\omega_0} \frac{du_C}{dt} + u_C = 0 & (\omega_0 \simeq 7,4 \cdot 10^3 \text{ rad.s}^{-1}) \\ u_C(0) = E_0 & \\ \left(\frac{du_C}{dt} \right)_{t=0} = 0 & (\xi \simeq 0,37 < 1) \end{cases}$$

La solution de l'équation différentielle, qui est homogène, est identique à celle calculée pour l'essai indiciel au paragraphe 3.3. Pour $\xi < 1$:

$$u_C(t) = \exp(-\omega_0 \xi t) \left(u_1 \cos(\omega_0 \sqrt{1 - \xi^2} t) + u_2 \sin(\omega_0 \sqrt{1 - \xi^2} t) \right).$$

La condition initiale sur $u_C(0)$ impose :

$$u_C(0) = E_0 = u_1.$$

La dérivée de $u_C(t)$ par rapport à t est :

$$\begin{aligned} \frac{du_C}{dt}(t) &= -\omega_0 \xi \exp(-\omega_0 \xi t) \left(u_1 \cos(\omega_0 \sqrt{1 - \xi^2} t) + u_2 \sin(\omega_0 \sqrt{1 - \xi^2} t) \right) \\ &\quad + \exp(-\omega_0 \xi t) \omega_0 \sqrt{1 - \xi^2} \left(-u_1 \sin(\omega_0 \sqrt{1 - \xi^2} t) + u_2 \cos(\omega_0 \sqrt{1 - \xi^2} t) \right). \end{aligned}$$

La condition initiale sur la dérivée de u_C impose :

$$\left(\frac{du_C}{dt}\right)_{t=0} = 0 = -\omega_0 \xi u_1 + \omega_0 \sqrt{1-\xi^2} u_2.$$

Ainsi :

$$u_2 = \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} E_0 \simeq 0,40 \times E_0.$$

Finalement :

$$u_C(t) = E_0 \exp(-\omega_0 \xi t) \left(\cos(\omega_0 \sqrt{1-\xi^2} t) + \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin(\omega_0 \sqrt{1-\xi^2} t) \right).$$

Ce résultat n'est évidemment pas à connaître par cœur. Seule la méthode utilisée est à maîtriser.

La solution obtenue part bien de E_0 pour tendre vers 0, en oscillant avec une pseudopulsation $\omega_0 \sqrt{1-\xi^2} \simeq 6,9.10^3 \text{ rad.s}^{-1}$, ou une **pseudopériode** :

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0 \sqrt{1-\xi^2}} \simeq 9,4.10^{-1} \text{ ms}.$$

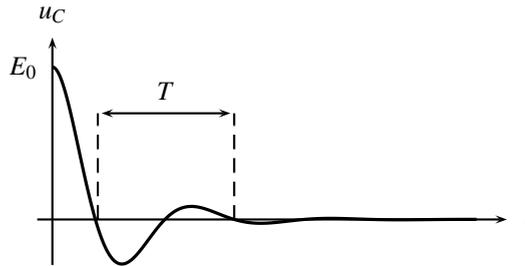


Figure 9.12 – Pseudopériode d'un système du deuxième ordre.

6 Bilan énergétique

Multiplions par $i(t)$ la loi des mailles qui permet d'établir l'équation différentielle modélisant le comportement du circuit au paragraphe 2.1 pour obtenir :

$$e \times i = u_C \times i + u_L \times i + u_R \times i,$$

soit :

$$ei = u_C \times C \frac{du_C}{dt} + L \frac{di}{dt} \times i + Ri \times i = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} C u_C^2 + \frac{1}{2} L i^2 \right) + R i^2.$$

Apparaissent dans cette équation l'énergie du condensateur, stockée sous forme électrique,

$\mathcal{E}_{\text{élec}} = \frac{1}{2} C u_C^2$, ainsi que l'énergie de la bobine, stockée sous forme magnétique,

$\mathcal{E}_{\text{magné}} = \frac{1}{2} L i^2$.

Dans le cas de l'**essai indiciel**, où le système est alimenté par une tension $e(t) = E_0$, le bilan de puissance s'écrit :

$$E_0 i = \frac{d}{dt} (\mathcal{E}_{\text{élec}} + \mathcal{E}_{\text{magné}}) + Ri^2.$$

La puissance délivrée par le générateur ($E_0 i$) alimente les pertes par effet Joule (Ri^2) et délivre de la puissance au condensateur et à la bobine. Le condensateur se charge, son énergie augmente au cours du temps.

Quant au **régime libre**, pour lequel le système évolue librement, lorsque le GBF ne délivre aucune tension ($e = 0$) :

$$\frac{d}{dt} (\mathcal{E}_{\text{élec}} + \mathcal{E}_{\text{magné}}) = -Ri^2.$$

Dans ce cas, toute l'énergie contenue dans le condensateur et la bobine est dissipée par effet Joule. L'état final est décrit par une énergie totale nulle, c'est à dire par $u_C(t) = 0$ et $i(t) = 0$, conformément aux observations expérimentales.

7 Analogies

Il existe de nombreux systèmes, tant en sciences physiques qu'en SII, décrits par des équations différentielles du deuxième ordre. Ces systèmes sont nommés **systèmes du deuxième ordre**.

Un exemple mécanique est celui d'une masse attachée à un ressort, qui oscille verticalement, freinée par des frottements fluides avec l'air. La position $x(t)$ de la masse est repérée par rapport à sa position d'équilibre. Ce système est étudié dans la partie mécanique. Son mouvement obéit à l'équation différentielle :

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx - f \frac{dx}{dt}.$$

Cette équation différentielle peut être écrite sous forme canonique :

$$\frac{m}{k} \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{f}{k} \frac{dx}{dt} + x(t) = 0 \quad \text{soit} \quad \frac{1}{\omega_0^2} \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{2\xi}{\omega_0} \frac{dx}{dt} + x(t) = 0$$

sur laquelle on détermine la pulsation caractéristique ω_0 et le facteur d'amortissement ξ :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\omega_0^2} = \frac{m}{k} \\ \frac{2\xi}{\omega_0} = \frac{f}{k} \end{array} \right. \quad \text{donc} \quad \left\{ \begin{array}{l} \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \\ \xi = \frac{f}{2\sqrt{km}} \end{array} \right.$$

Le formalisme est alors totalement analogue entre électricité et mécanique.

SYNTHÈSE

SAVOIRS

- distinguer le régime transitoire du régime permanent ou établi
- équation différentielle canonique du deuxième ordre
- pulsation caractéristique d'un système du deuxième ordre
- coefficient d'amortissement d'un système du deuxième ordre
- facteur de qualité d'un système du deuxième ordre
- temps de réponse d'un système du deuxième ordre

SAVOIR-FAIRE

- tracer l'allure de la réponse indicielle ou du régime libre en fonction des valeurs de ξ et de Q
- établir l'équation différentielle du circuit
- écrire l'équation différentielle sous forme canonique
- résoudre une équation différentielle du deuxième ordre
- déterminer un ordre de grandeur de la durée du régime transitoire
- prévoir l'évolution d'un système avec son portrait de phase
- prévoir l'évolution d'un système à partir de considérations énergétiques
- réaliser un bilan de puissance

MOTS-CLÉS

- | | | |
|-----------------------------------|-----------------------------|----------------------|
| • régime transitoire | • réponse indicielle | ment |
| • régime permanent ou éta-
bli | • réponse libre | • facteur de qualité |
| • échelon | • pulsation caractéristique | • portrait de phase |
| | • coefficient d'amortisse- | |