Circuit linéaire du premier ordre

8

Les intensités et tensions dans les circuits étudiés dans ce chapitre dépendent du temps. Pour les calculer, on est amené à résoudre une équation différentielle du premier ordre.

1 Exemple expérimental

1.1 Montage

On cherche à observer, puis prévoir par le calcul, le comportement du montage ci-dessous lorsqu'il est alimenté par une tension constante délivrée par un générateur basse fréquence, nommé dans la suite par son acronyme GBF. On observe simultanément les tensions délivrées par le GBF et aux bornes du condensateur sur les deux voies d'un oscilloscope.

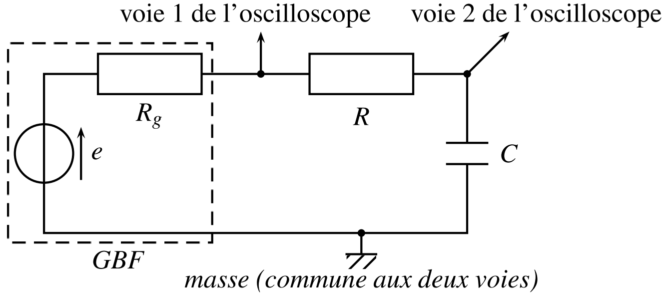


Figure 8.1 – Système étudié

1.2 Régimes transitoire puis permanent

On observe expérimentalement les formes d'onde de la figure 8.2, c'est-à-dire les graphes des tensions en fonction du temps, lorsque e passe de 0 à une tension positive (voie 1).

La tension aux bornes du condensateur (voie 2) passe de 0 à 5 carreaux, c'est-à-dire de 0 à

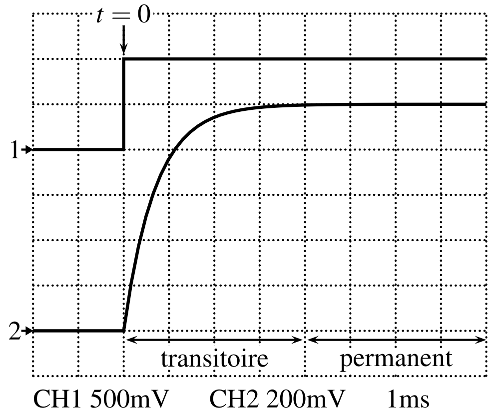


Figure 8.2 – Formes d'onde d'un essai indiciel.

$5\times$ 200 mV par carreau = 1 V, en approximativement $3,5$ carreaux $\times$ 100 ms par carreau = 350 ms. On définit alors deux régimes :

- le **régime établi**, ou **régime permanent**, pour lequel la sortie est de la même forme que l'entrée, ici constante,
- le **régime transitoire**, entre l'instant initial et le régime permanent.

Le montage est symboliquement représenté par :

entrée : tension délivrée par le *GBF* ⟶ système R, C ⟶ sortie : tension aux bornes de C

Le signal délivré par le GBF est nommé **échelon de tension**. La réponse du sytème constitué de la résistance R et du condensateur de capacité C est nommé **réponse indicielle**.

2 Modélisation

2.1 Simplification du montage

Le GBF présente une résistance de sortie R_g, en série avec la résistance R. L'ensemble forme une unique résistance $R_{tot} = R_g + R$. Or R_g est très inférieure à R, donc $R_{tot} \simeq R$. Le montage devient, avec la représentation des différences de potentiel, ou tensions, entre les 4 coins :

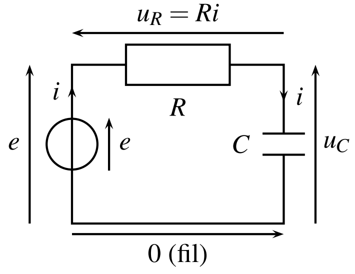


Figure 8.3 – Système simplifié.

2.2 Équation différentielle sur $u_C(t)$

La loi des mailles impose :

$$e = 0 + u_C + u_R.$$

Le GBF fait circuler un courant d'intensité i qui passe successivement à travers R et C. C'est le même courant à travers chacun des trois dipôles. Ainsi $u_R = Ri$ et $i = C\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$. La loi des mailles devient alors :

$$\boxed{e = u_C + RC\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}.}$$

À chaque instant, la tension $u_C(t)$ est reliée à sa dérivée et à la tension e imposée par le GBF. Une telle relation est une **équation différentielle d'ordre un**, car elle contient u_C et la dérivée première de u_C.

2.3 Unités et homogénéité de l'équation différentielle

e et u_C sont des tensions en volts. L'unité de la grandeur X, dans le Système International, est notée $[X]$:

$$[e] = \mathrm{V} \qquad \text{et} \qquad [u_C] = \mathrm{V}.$$

La dérivée $\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$ est en volts divisé par des secondes car u_C est en volts et t en secondes :

$$\left[\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}\right] = \mathrm{V.s^{-1}}$$

On en déduit l'unité du produit RC en écrivant les unités de chaque terme dans l'équation différentielle :

$$e = u_C + RC\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} \qquad \text{donc} \qquad \mathrm{V} = \mathrm{V} + [RC]\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{s}}.$$

L'ensemble est homogène si $[RC] = \mathrm{s}$.

Le produit RC est en secondes. Il représente la **constante de temps** du circuit.

Remarque

On retrouve ce résultat avec les unités des lois électrocinétiques aux bornes d'une résistance et d'un condensateur :

$$\begin{cases} u_R = Ri & \text{donc} \quad \mathrm{V} = \Omega \times \mathrm{A} \\ i = C\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} & \text{donc} \quad \mathrm{A} = \mathrm{F} \times \dfrac{\mathrm{V}}{\mathrm{s}} \end{cases} \quad \text{implique} \quad \Omega \times \mathrm{F} = \mathrm{s}.$$

Le circuit RC présenté à la figure 8.3 est un système du premier ordre, de constante de temps $\tau = RC$.

2.4 Résolution de l'équation différentielle

a) Position du problème

Pour $t < 0$, la tension délivrée par le GBF est nulle. Sans entrée, la sortie est aussi nulle :

$$u_C\,(t<0) = 0.$$

Cette solution vérifie bien l'équation différentielle : $e = 0$, $u_C = 0$ et $\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} = 0$ (car u_C est une constante).

Pour $t > 0$, le GBF délivre un signal constant E_0 de 2 carreaux $\times$ 500 mV = 1 V dans l'exemple expérimental de la section précédente :

$$e\,(t>0) = E_0 = 1 \text{ V}.$$

Il est courant d'alléger les notations en posant $RC = \tau$. Le système est alors décrit par l'équation différentielle pour $t > 0$:

$$\boxed{\tau\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + u_C = E_0.}$$

On a une équation différentielle du premier ordre. Il suffit alors d'une seule **condition initiale**, par exemple $u_C\,(0)$ pour déterminer complètement la solution. Elle est déterminée par la continuité de l'énergie dans le condensateur.

> L'énergie $\dfrac{1}{2}Cu_C^2$ contenue dans le condensateur est continue, elle ne peut pas varier instantanément. Il en résulte que la tension u_C est, elle aussi, continue.

Ainsi $u_C\,(0^+) = u_C\,(0^-) = 0$. Finalement, on cherche la solution du couple {équation différentielle, condition initiale} :

$$\begin{cases} \tau\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + u_C = E_0 \\ u_C\,(0) = 0. \end{cases}$$

b) Établissement de la solution

L'équation à résoudre est une équation différentielle du premier ordre, avec un second membre non nul. D'après l'annexe sur les outils mathématiques, la solution est la somme :

- d'une **solution particulière**, notée $u_{C,\mathrm{p}}$ (indice p pour « particulière »), cherchée sous la même forme que l'entrée E_0,
- et d'une **solution homogène**, notée $u_{C,\mathrm{h}}$ (indice h pour « homogène »), solution de l'équation homogène :

$$\tau\frac{\mathrm{d}u_{C,\mathrm{h}}}{\mathrm{d}t} + u_{C,\mathrm{h}} = 0.$$

La **solution particulière** est cherchée sous la même forme que l'entrée, ici constante : $u_{C,\mathrm{p}} =$ constante. Alors $\dfrac{\mathrm{d}u_{C,\mathrm{p}}}{\mathrm{d}t} = 0$ et l'équation différentielle devient $(\tau \times 0) + u_{C,\mathrm{p}} = E_0$, donc $u_{C,\mathrm{p}}(t) = E_0$.

La **solution homogène** est la solution de $\tau \dfrac{\mathrm{d}u_{C,\mathrm{h}}}{\mathrm{d}t} + u_{C,\mathrm{h}} = 0$. On montre dans l'annexe mathématique qu'elle s'intègre en :

$$u_{C,\mathrm{h}} = \mu \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right),$$

où μ est une constante d'intégration inconnue à ce stade.

La solution de l'équation différentielle est donc, pour $t > 0$, la somme de la solution particulière et de la solution homogène :

$$u_C(t) = u_{C,\mathrm{p}}(t) + u_{C,\mathrm{h}}(t) = E_0 + \mu \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right).$$

La constante d'intégration μ est calculée avec la **condition initiale** :

$$u_C(0) = 0 = E_0 + \mu \qquad \text{donc} \qquad \mu = -E_0.$$

Finalement, la solution du couple {équation différentielle, condition initiale} :

$$\begin{cases} \tau \dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + u_C = E_0 \\ u_C(0) = 0 \end{cases}$$

est :

$$u_C(t) = E_0\left(1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right).$$

La solution obtenue est **homogène** quant aux unités. E_0 est en volt, t et τ en seconde donc leur rapport est sans unité. L'exponentielle opère sur un nombre sans dimension $\left(-\dfrac{t}{\tau}\right)$ et renvoie un nombre sans dimension, ainsi $1 - \exp\left(-\dfrac{t}{\tau}\right)$ est sans dimension. Finalement u_C a la même unité que E_0, le volt.

2.5 Tracé et identification de la constante de temps

Le graphe obtenu sur la figure 8.4 est caractéristique d'un système du premier ordre alimenté par un échelon.

Que vaut la valeur finale ? Attendu que $\lim\limits_{t\to\infty} \exp\left(-\dfrac{t}{\tau}\right) = 0$: $\lim\limits_{t\to\infty} u_C(t) = E_0$.

On retrouve la solution particulière. Au bout d'un temps « suffisamment » long, à préciser dans la suite, le système a oublié la condition initiale ; la sortie ne dépend plus que de la valeur E_0, imposée par l'entrée.

Quand le régime permanent, ou établi, débute-t-il ?

La valeur finale E_0 est atteinte à 1% près à la date θ telle que $u_C(\theta) = 0{,}99 \times E_0$:

$$u_C(\theta) = 0{,}99 \times E_0 = E_0\left(1 - \exp\left(-\frac{\theta}{\tau}\right)\right) \qquad \text{donc} \qquad \theta = 4{,}6 \times \tau.$$

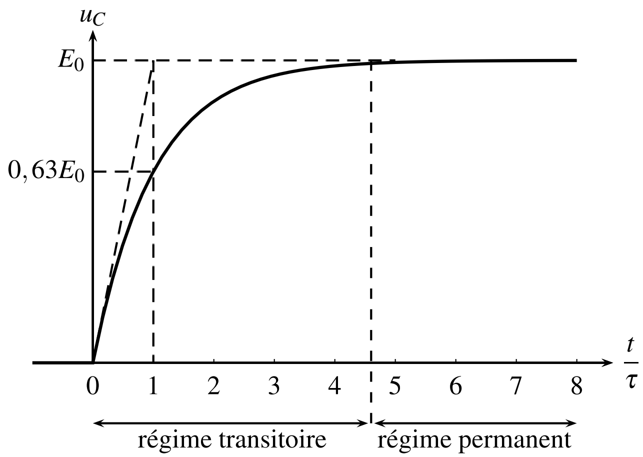


Figure 8.4 – Tension aux bornes du condensateur d'un système RC soumis à un échelon de tension.

Au bout d'une durée de $4,6\tau$, le système a atteint la valeur finale, à 1% près.

Le **temps de réponse** du système, c'est-à-dire la durée du régime transitoire, est conventionellement de $4,6\,\tau$.

De plus, à la date $t = \tau$, $u_C(t)$ vaut $u_C(\tau) = E_0(1 - \exp(-1)) = E_0 \times 0,63$.

On en déduit une méthode d'**identification** de la valeur de τ pour un système du premier ordre :

- on repère la valeur finale de u_C, ici E_0,
- on note la date à laquelle u_C vaut $0,63\ \times$ cette valeur finale : c'est τ.

Remarque

Il existe, en théorie, une autre méthode de détermination de τ, basée sur la valeur de la dérivée en $t = 0$:

$$\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} = \frac{E_0}{\tau}\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \qquad \text{d'où} \qquad \left(\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}\right)_0 = \frac{E_0}{\tau}.$$

La tangente à l'orgine, en pointillés sur le graphe, a donc pour équation $E_0\frac{t}{\tau}$; elle prend la valeur E_0 en $t = \tau$. On en déduit qu'il suffit de tracer la tangente à l'origine et de déterminer quand elle vaut E_0 pour trouver la valeur τ. Toutefois, cette méthode est peut pratique expérimentalement. D'une part, la tracé de la tangente n'est pas possible sur un oscilloscope ; d'autre part, l'incertitude sur la position exacte de cette tangente est important lorsqu'on la trace avec des points expérimentaux.

2.6 Portrait de phase

Le **portrait de phase** du montage est la représentation graphique de la dérivée de u_C, notée $\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$ ou $\dot{u}_C$, en fonction de u_C.

Notons $y = \dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$ et $x = u_C$. Alors l'équation différentielle $\tau\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + u_C = e$ devient $\tau y + x = e$, soit :

$$y = -\frac{x}{\tau} + \frac{e}{\tau} \quad \text{et pour } t > 0 : \quad y = -\frac{x}{\tau} + \frac{E_0}{\tau},$$

qui est l'équation d'une droite :

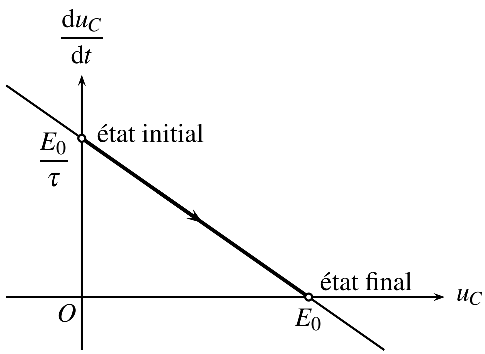


Figure 8.5 – Portrait de phase.

L'observation du portrait de phase permet de prévoir l'évolution du système avant toute résolution de l'équation différentielle. L'équation différentielle montre que le système se déplace sur une droite. La condition initiale, $u_C(0) = 0$, permet de placer le système à $t = 0$. Le système évolue ensuite jusqu'au point final où $\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$ est nul, c'est à dire avec l'intersection avec l'axe des absisses ; il parcourt donc le segment de la gauche vers la droite.

Toutefois, le portrait de phase élimine le facteur temps. On ignore la durée prise par le système pour passer de l'état initial à l'état final.

2.7 Bilan de puissance

Multiplions la loi des mailles vue précédemment $(e = u_C + Ri)$ par i :

$$e \times i = u_C \times i + Ri \times i.$$

Avec $i = C\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$, $u_C \times i = Cu_C\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{1}{2}Cu_C^2\right)$, ainsi :

$$ei = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}Cu_C^2\right) + Ri^2.$$

La puissance délivrée par le GBF (ei) se répartit en puissance stockée par le condensateur (l'énergie stockée par condensateur, sous forme électrique, est $\frac{1}{2}Cu_C^2$) et en puissance dissipée dans la résistance par effet Joule $\left(Ri^2\right)$. Toutes ces puissances s'expriment en watt.

2.8 Bilan d'énergie

Attendu que la tension aux bornes du condensateur est $u_C(t) = E_0\left(1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right)$, l'intensité du courant qui la traverse vaut :

$$i(t) = C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} = \frac{CE_0}{\tau}\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) = \frac{E_0}{R}\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right).$$

La puissance délivrée par le générateur est ei, donc l'énergie que délivre celui-ci entre l'instant initial, $t = 0$, et l'instant final $t \to \infty$, est :

$$\mathscr{E}_{\text{géné}} = \int_0^\infty E_0 i \mathrm{d}t = \int_0^\infty \frac{E_0^2}{R}\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\mathrm{d}t = \frac{E_0^2}{R}\left[-\tau\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right]_0^\infty = \frac{\tau E_0^2}{R} = CE_0^2.$$

L'énergie électrique stockée par le condensateur est :

$$\mathscr{E}_{\text{élec}} = \int_0^\infty \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}Cu_C^2\right)\mathrm{d}t = \frac{C}{2}\left[u_C^2\right]_0^\infty = \frac{CE_0^2}{2},$$

car $u_C(0) = 0$ et $u_C(\infty) = E_0$.
L'énergie dissipée par effet Joule dans la résistance est :

$$\mathscr{E}_{\text{Joule}} = \int_0^\infty Ri^2\mathrm{d}t = \frac{E_0^2}{R}\left[-\frac{\tau}{2}\exp\left(-2\frac{t}{\tau}\right)\right]_0^\infty = \frac{CE_0^2}{2}.$$

On retrouve le bilan :

$$\mathscr{E}_{\text{géné}} = \mathscr{E}_{\text{élec}} + \mathscr{E}_{\text{Joule}}.$$

Ainsi, quelles que soient les valeurs de R et de C, l'énergie délivrée par le générateur se répartit à parts égales entre l'énergie stockée par le condensateur et celle dissipée par effet Joule.

3 Réalisation concrète de l'échelon

3.1 Réponse à un signal créneau

Le GBF fournit une tension créneau, T-périodique, qui vaut E_0 sur une demi-période et 0 sur l'autre. On observe simultanément e et u_C sur la figure 8.6.

Pour $t \in \left[0, \frac{T}{2}\right]$, $e(t) = E_0$ et l'on observe la réponse indicielle. On laisse le temps au système de réagir afin de parvenir en régime permanent. C'est le cas dès que :

$$T \gg \tau$$

Puis, sur $t \in \left[\frac{T}{2}, T\right]$, e passe à zéro. On laisse le système évoluer sans entrée, ce qui correspond au **régime libre**.

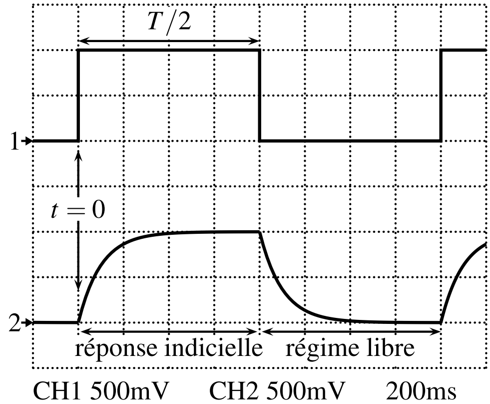


Figure 8.6 – Formes des signaux d'entrée et de sortie.

3.2 Modélisation du régime libre

L'équation différentielle qui régit l'évolution du système est toujours valable, avec $e = 0$:

$$\tau \frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + u_C = 0.$$

Cette équation différentielle est homogène. Sa solution, déjà calculée précédemment, est :

$$u_C(t) = \lambda \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right).$$

La constante d'intégration λ se calcule avec la condition initiale de ce régime, c'est à dire la valeur de u_C en $t = \frac{T}{2}$. Elle correspond à la fin de la réponse indicielle précédemment étudiée :

$$u_C\left(\frac{T}{2}\right) \simeq E_0 \quad \text{(ici 1 V).}$$

Alors $u_C\left(\frac{T}{2}\right) = E_0 = \lambda \exp\left(-\frac{T}{2\tau}\right)$, donc $\lambda = E_0 \exp\left(\frac{T}{2\tau}\right)$. Finalement :

$$u_C(t) = E_0 \exp\left(\frac{T}{2\tau}\right) \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) = E_0 \exp\left(-\frac{t - \frac{T}{2}}{\tau}\right).$$

Le système réagit encore avec une constante de temps τ. Il atteint le régime permanent au bout de $4,6\tau$. En effet, en $t = \frac{T}{2} + 4,6\tau$ (instant origine + temps de réaction), le signal a perdu 99% de sa valeur initiale : $u_C\left(\frac{T}{2} + 4,6\tau\right) = E_0 \exp(-4,6) = E_0 \times 1,0.10^{-2}$.

Le **temps de réponse** du système, c'est à dire la durée du régime transitoire, est conventionnellement de $4,6\,\tau$, comme pour l'essai indiciel. C'est une caractéristique d'un système du premier ordre, quel que soit le signal d'entrée.

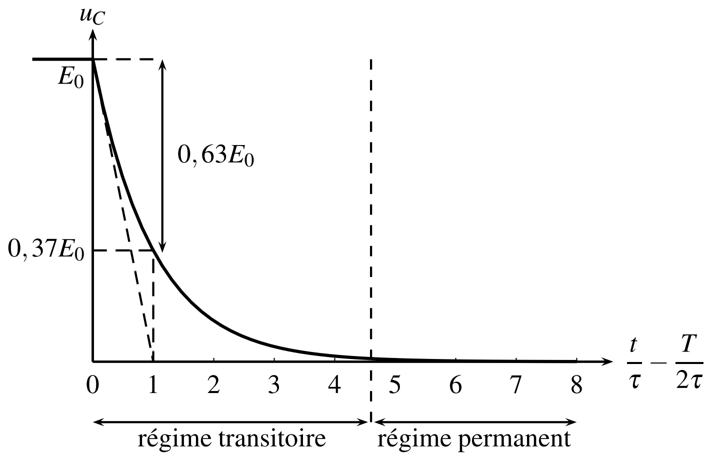


Figure 8.7 – Régime libre d'un circuit RC.

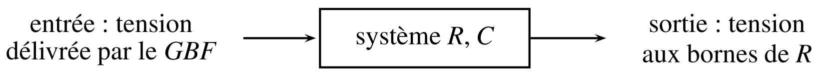
On retrouve la méthode d'**identification** de la valeur de τ :
- on repère la valeur initiale de u_C, ici E_0,
- on note la date à laquelle u_C a perdu $0,63\%$ de cette valeur : c'est τ.

La valeur de τ peut théoriquement être trouvée avec la tangente à l'origine à la courbe, en pointillés sur le graphe, de la même manière que plus haut.

4 Étude de la tension $u_R(t)$

4.1 Montage étudié et observations expérimentales

On change de point de vue pour étudier la tension aux bornes de la résistance, dans le montage du paragraphe 1.1 :



On observe simultanément la tension aux bornes de la résistance, u_R, sur la voie 2, et la tension e délivrée par le GBF, sur la voie 1. On peut encore définir :
- le **régime établi**, ou **régime permanent**, pour lequel la sortie est de la même forme que l'entrée, ici une constante, mais de valeur nulle,
- le **régime transitoire**, entre l'instant initial et le régime permanent.

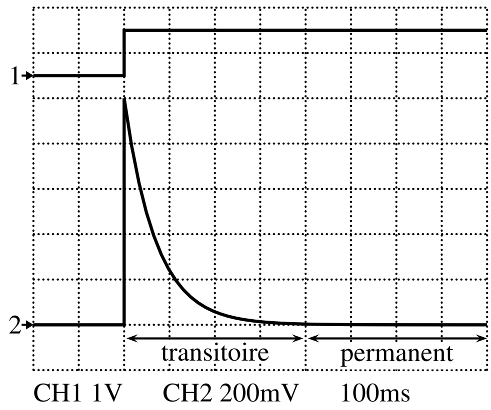


Figure 8.8 – Tensions d'entrée et aux bornes de la résistance.

4.2 Équation différentielle sur $u_R(t)$

L'entrée du montage est e, sa sortie est u_R. Pour $t < 0$, l'entrée est nulle et u_R aussi. On cherche, pour $t > 0$, un couple $\{$équation différentielle sur u_R, condition initiale$\}$.

Pour établir l'**équation différentielle**, on applique la loi des mailles :

$$e = 0 + u_R + u_C.$$

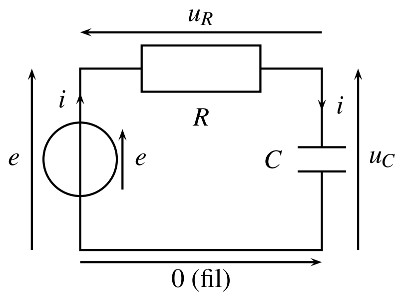


Figure 8.9 – Montage étudié.

Le même courant d'intensité i traverse le GBF, la résistance et le condensateur :

$$i = C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} \quad \text{et} \quad u_R = Ri.$$

On dérive la loi des mailles par rapport au temps :

$$\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}u_R}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}u_R}{\mathrm{d}t} + \frac{i}{C},$$

Ainsi :

$$\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}u_R}{\mathrm{d}t} + \frac{u_R}{RC}.$$

Comme $e(t)$ est constante pour $t > 0$, sa dérivée est nulle. Ainsi, avec $RC = \tau$, le système obéit à l'équation différentielle homogène, c'est-à-dire sans second membre :

$$\tau \frac{\mathrm{d}u_R}{\mathrm{d}t} + u_R = 0.$$

4.3 Portrait de phase

On trace $\frac{\mathrm{d}u_R}{\mathrm{d}t}$ en fonction de u_R, afin de prévoir l'évolution du montage avant toute résolution de l'équation différentielle.

Avec $y = \mathrm{d}u_R/\mathrm{d}t$ et $x = u_R$, l'équation différentielle devient $\tau y + x = 0$. Le portrait de phase est donc une droite d'équation :

$$y = -\frac{x}{\tau}.$$

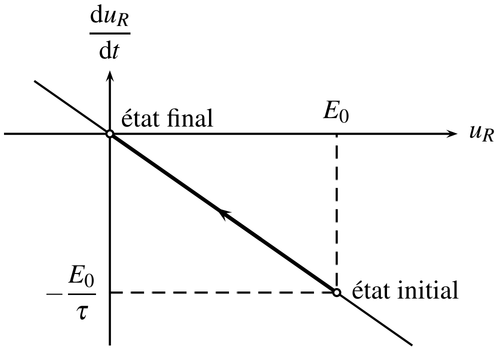


Figure 8.10 – Portrait de phase.

Où est l'état initial ? La tension u_R vaut, à l'origine, E_0. On peut donc placer la point origine.

Dans quel sens est parcourue la courbe ? Tant que le système évolue, sa dérivée est différente de zéro ; lorsque qu'elle atteint 0, le système ne varie plus. Ainsi le segment est parcouru de la droite vers la gauche :

- u_R décroît de E_0 à 0,
- $\frac{\mathrm{d}u_R}{\mathrm{d}t}$ décroît de $-\frac{E_0}{\tau}$ à 0, qui marque l'état final.

⚠ Les systèmes pour lesquels le portrait de phase est calculable, décrit par une courbe dont l'équation $y(x)$ est analytiquement connue, demeurent des exceptions. Dans l'immense majorité des cas, on se contente de résolutions informatiques, comme dans le chapitre suivant.

4.4 Solution de l'équation différentielle

La solution générale de $\tau \frac{\mathrm{d}u_R}{\mathrm{d}t} + u_R = 0$ est :

$$u_R(t) = \mu \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right).$$

où μ est une constante d'intégration que l'on calcule en utilisant la condition initiale. Celle-ci est imposée par la continuité de la tension aux bornes du condensateur en $t = 0$:

$$u_C\left(0^-\right) = u_C\left(0^+\right).$$

D'après la loi des mailles, $u_C = e - u_R$, donc :

$$\underbrace{e\left(0^-\right)}_{0} - \underbrace{u_R\left(0^-\right)}_{0} = \underbrace{e\left(0^+\right)}_{E_0} - u_R\left(0^+\right) \quad \text{soit} \quad u_R\left(0^+\right) = E_0.$$

On observe bien que si le potentiel d'une borne du condensateur varie brutalement de E_0, alors le potentiel de l'autre borne varie de la même valeur. Dès lors : $u_R\left(0^+\right) = E_0 = \mu$. Finalement :

$$u_R(t) = E_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right).$$

4.5 Régime libre

On observe successivement l'essai indiciel puis le régime libre en alimentant le circuit par un créneau, valant alternativement 0 et E_0, de période T telle que :

$$T \gg \tau,$$

afin de laisser le temps au système d'atteindre, à la fin de chaque demi-période, le régime permanent.

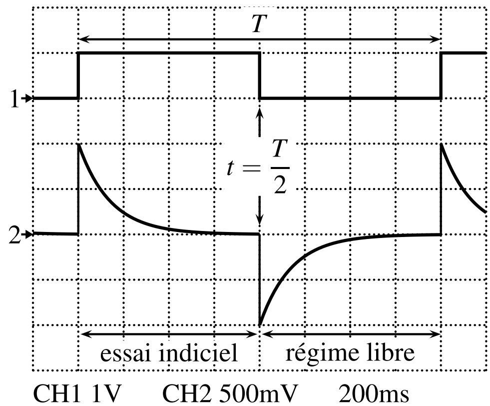


Figure 8.11 – Essai indiciel et régime libre aux bornes de la résistance.

L'**équation différentielle** qui régit l'évolution du système est, indépendamment de $e(t)$:

$$\tau \frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + u_C = 0,$$

pour laquelle la solution est :

$$u_C(t) = \lambda \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right).$$

La valeur de λ est trouvée avec la **condition initiale** en $t = \dfrac{T}{2}$.
La tensions aux bornes du condensateur est continue :

$$u_C\left(\frac{T^-}{2}\right) = u_C\left(\frac{T^+}{2}\right).$$

D'après la loi des mailles, $u_C = e - u_R$:

$$\underbrace{e\left(\frac{T^-}{2}\right)}_{E_0} - \underbrace{u_R\left(\frac{T^-}{2}\right)}_{0} = \underbrace{e\left(\frac{T^+}{2}\right)}_{0} - u_R\left(\frac{T^+}{2}\right).$$

Ainsi $u_R\left(\dfrac{T^+}{2}\right) = -E_0$ et :

$$u_R\left(\frac{T^+}{2}\right) = -E_0 = \lambda.$$

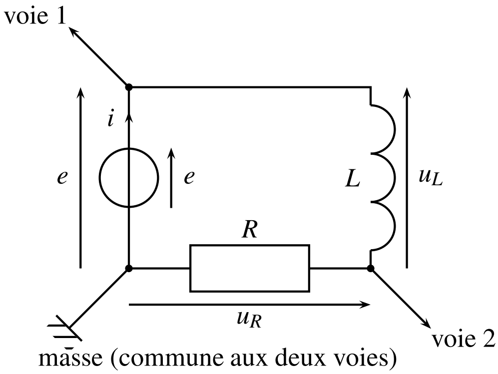
Finalement :

$$u_R(t) = -E_0 \exp\left(-\frac{t-\dfrac{T}{2}}{\tau}\right).$$

5 Exemple de circuit inductif

5.1 Schéma du montage

Le montage de la figure 8.12 suivante permet de visualiser en même temps à l'oscilloscope la tension e délivrée par le GBF et l'intensité i du courant, *via* la tension $u_R = Ri$ aux bornes de la résistance.



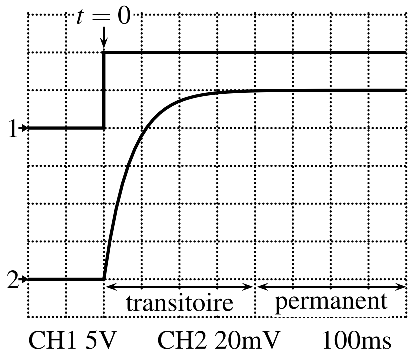


Figure 8.12 – Montage *RL* étudié et intensité du courant lors de l'essai indiciel.

On s'intéresse au courant $i(t)$ qui circule dans le montage alimenté par e. L'entrée du système est e, sa sortie est i :

entrée : tension délivrée par le *GBF* $\longrightarrow$ $\boxed{\text{système } R, C}$ $\longrightarrow$ sortie : intensité i du courant

On observe expérimentalement la réponse indicielle sur la figure 8.12.

5.2 Équation différentielle sur $i(t)$

L'entrée du montage est e, sa sortie est u_L. On cherche un couple $\{$équation différentielle sur u_L, condition initiale$\}$ pour $t > 0$. Pour $t < 0$, l'entrée est nulle et u_L aussi.

Pour établir l'**équation différentielle**, appliquons la loi des mailles :

$$e = 0 + u_L + u_R.$$

Le même courant d'intensité i traverse le GBF, la résistance et le condensateur :

$$u_L = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} \quad \text{et} \quad u_R = Ri.$$

Ainsi :

$$e = Ri + L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}.$$

Soit :

$$\frac{L}{R}\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + i = \frac{e}{R}.$$

C'est une équation différentielle du premier ordre. Ce montage est donc un système du premier ordre, pour lequel on peut définir une constante de temps τ :

$$\tau = \frac{L}{R},$$

afin d'écrire l'équation différentielle :

$$\tau\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + i = \frac{e}{R}.$$

5.3 Homogénéité de l'équation différentielle

Les trois termes s'expriment en ampères A :

$$[i] = \mathrm{A} \quad \text{et} \quad \left[\frac{e}{R}\right] = \frac{\mathrm{V}}{\Omega} = \mathrm{A}.$$

Or la dérivée $\mathrm{d}i/\mathrm{d}t$ est en ampères divisé par des secondes $\mathrm{A.m}^{-1}$. L'ensemble est homogène si τ est en secondes :

$$[\tau] = \mathrm{s}.$$

Le quotient $\dfrac{L}{R}$ est en seconde. Il représente la constante de temps du circuit.

> **Remarque**
>
> On retrouve ce résultat avec les unités des lois électrocinétiques aux bornes d'une résistance et d'une bobine :
>
> $$\begin{cases} u_R = Ri & \text{donc} \quad \mathrm{V} = \Omega \times \mathrm{A} \\ u_L = L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} & \text{donc} \quad \mathrm{V} = \mathrm{H} \times \dfrac{\mathrm{A}}{\mathrm{s}} \end{cases} \quad \text{implique} \quad \frac{\mathrm{H}}{\Omega} = \mathrm{s}.$$

5.4 Solution de l'équation différentielle

Le montage n'est pas alimenté pour $t < 0$, $e = 0$ et $i = 0$ de même.
Pour $t > 0$, $e = E_0$. Le montage est décrit par l'équation différentielle :

$$\tau\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + i = \frac{E_0}{R}.$$

Cette équation différentielle se résoud comme précédemment. Elle est la somme :

- d'une **solution particulière** i_p, cherchée sous la même forme que l'entrée, ici une constante. Avec $i_\mathrm{p} =$ constante, $\dfrac{\mathrm{d}i_\mathrm{p}}{\mathrm{d}t} = 0$ et l'équation devient $(\tau \times 0) + i_\mathrm{p} = \dfrac{E_0}{R}$.
- d'une **solution homogène** $i_\mathrm{h}(t)$, solution de l'équation homogène $\tau\dfrac{\mathrm{d}i_\mathrm{h}}{\mathrm{d}t} + i_\mathrm{h} = 0$:

$$i_\mathrm{h}(t) = \mu \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right).$$

La solution générale de l'équation différentielle du circuit est donc :

$$i(t) = i_\mathrm{p}(t) + i_\mathrm{h}(t) = \frac{E_0}{R} + \mu \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right).$$

La constante μ est déterminée par la **condition initiale**. Elle est imposée par la continuité du courant qui traverse la bobine d'inductance L.

> L'énergie $Li^2/2$ contenue dans la bobine est continue, elle ne peut pas varier instantanément. L'intensité i dans une bobine est donc, elle aussi, continue

Ainsi $\underbrace{i\left(0^-\right)}_{0} = i\left(0^+\right)$. D'où : $i(0) = \dfrac{E_0}{R} + \mu = 0$ donc $\mu = -\dfrac{E_0}{R}$.

Finalement :

$$i(t) = \frac{E_0}{R}\left(1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right).$$

Cette solution est mathématiquement analogue à celle obtenue lors de l'étude de u_C pour le circuit RC.

5.5 Bilan de puissance

Multiplions la loi des mailles par i :

$$e \times i = u_L \times i + u_R \times i \quad \text{soir} \quad ei = Li\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + Ri^2$$

Or : $Li\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{1}{2}Li^2\right)$. Ainsi :

$$ei = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}Li^2\right) + Ri^2.$$

On reconnaît :
- la puissance ei délivrée par le GBF,
- la dérivée de l'énergie $\mathscr{E}_{\text{magné}} = \dfrac{1}{2}Li^2$ emmagasinée dans la bobine d'inductance L,
- la puissance Ri^2 dissipée par effet Joule dans la résistance.

La puissance délivrée par le générateur se répartit entre une puissance magnétique stockée par la bobine et une puissance perdue par effet Joule.

6 Généralisation : systèmes du premier ordre

Tous les systèmes du premier ordre sont décrits par une équation différentielle canonique :

$$\tau\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} + s = s_\infty,$$

où s_∞ est imposé par l'entrée, τ est la **constante de temps** du système et s est la **sortie** du système.

Le **temps de réponse** d'un système du premier ordre, c'est à dire la durée du régime transitoire, ou temps de réponse à 99%, est de $4,6\,\tau$.

7 Régime permanent (PTSI)

Chaque circuit étudié dans ce chapitre a été modélisé par une équation différentielle, dont la solution est la somme :
- d'une **solution particulière**, cherchée sous la même forme que l'entrée,
- et d'une **solution homogène**, solution de l'équation homogène.

Dans le cas d'un système du premier ordre, la solution homogène est systématiquement sous la fome d'une exponentielle décroissante du temps, $\exp\left(-\dfrac{t}{\tau}\right)$, où τ est la constante de temps du système. La solution homogène est négligeable devant la solution particulière au bout d'une durée de $4,6\tau$. Ainsi :

Le régime permanent est entièrement décrit par la solution particulière.

Dans le cas de la réponse à un échelon, cette solution particulière est cherchée sous la même forme que l'entrée, c'est-à-dire constante. Pour des signaux constants, les liens entre l'intensité du courant qui traverse un condensateur ou une bobine, et la tension à leurs bornes se simplifient. En effet, $u_L = L\dfrac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t} = 0$ dès que i_L est constant ; $i_C = C\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} = 0$ dès que u_C est constant. Ainsi, en régime permanent, la tension aux bornes d'une bobine est nulle, alors que le courant qui traverse un condensateur est nul.

Pour un système soumis à un échelon, on en déduit les équivalents en régime permanent, qui assurent $u_L = 0$ et $i_C = 0$:

Lors de la réponse à un échelon, une bobine est équivalente, lors du régime permament, à un fil.

Lors de la réponse à un échelon, un condensateur est équivalent, lors du régime permament, à un interrupteur ouvert.

Par exemple, pour le circuit de la figure 8.3, remplacer le condensateur par un interrupteur ouvert impose $i = 0$. Alors $u_R = Ri = 0$ et $u_C = e = E_0$, qui représente bien la solution en régime permanent.

Dans le circuit de la figure 8.12, remplacer la bobine par un fil impose $u_L = 0$. Ainsi la loi des mailles mène à $e = u_R = Ri$ et donc $i = \dfrac{e}{R} = \dfrac{E_0}{R}$, qui est la solution en régime permanent.

SYNTHÈSE

SAVOIRS

- distinguer le régime transitoire du régime permanent ou établi
- continuité de u aux bornes de C
- continuité de i à travers L
- définition d'un échelon et de la réponse indicielle
- définition d'une réponse libre
- définition d'un portrait de phase
- équation différentielle canonique et constante de temps
- temps de réponse d'un système du premier ordre

SAVOIR-FAIRE

- établir l'équation différentielle du circuit
- résoudre une équation différentielle du premier ordre
- prévoir l'évolution d'un système avec son portrait de phase
- réaliser un bilan de puissance
- déterminer les grandeurs électriques en régime permanent en remplaçant les bobines et les condensateurs par des interrupteurs fermés ou ouverts (PTSI)

MOTS-CLÉS

- régime transitoire
- régime permament ou établi
- échelon et réponse indicielle
- réponse libre
- constante de temps
- temps de réponse d'un système
- portrait de phase