Aspects énergétiques de la dynamique du point

16

L'objet de ce chapitre est de définir les notions énergétiques pour la mécanique du point. On va définir le travail et la puissance d'une force puis on établira les théorèmes de l'énergie cinétique et de l'énergie mécanique en introduisant la notion de forces conservatives et d'énergie potentielle.

1 Travail et puissance d'une force

1.1 Introduction et notations

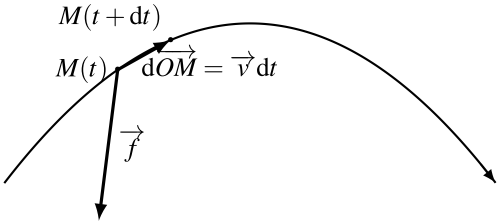


Figure 16.1 – Déplacement élémentaire d'un point M.

On étudie un point M animé d'une vitesse $\overrightarrow{v}$ dans un référentiel $\mathscr{R}$.

Le point M est soumis à une force $\overrightarrow{f}$.

À l'instant t, le point M se trouve en $M(t)$; à l'instant $t+\mathrm{d}t$, il est situé en $M(t+\mathrm{d}t)$.

Si $\mathrm{d}t$ est suffisamment petit, $M(t+\mathrm{d}t)$ est infiniment proche de $M(t)$ et on note $\mathrm{d}\overrightarrow{OM}$ le déplacement infinitésimal :

$$\mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{M(t)M(t+\mathrm{d}t)} = \overrightarrow{v}\,\mathrm{d}t.$$

1.2 Puissance d'une force

La **puissance** de la force $\overrightarrow{f}$ appliquée au point matériel M animé de la vitesse $\overrightarrow{v}$ dans un référentiel $\mathscr{R}$ est définie par le produit scalaire :

$$\mathscr{P}(\overrightarrow{f}) = \overrightarrow{f} \cdot \overrightarrow{v}.$$

Étant donné que la vitesse dépend du référentiel d'étude et que la puissance dépend de la vitesse, on en déduit que **la puissance dépend du référentiel d'étude**. Certains auteurs adoptent la notation $\mathscr{P}_{/\mathscr{R}}$ pour insister sur ce point.

Une autre conséquence est que **la puissance est une grandeur additive**. En effet, si l'on considère deux forces $\overrightarrow{f_1}$ et $\overrightarrow{f_2}$ de résultante $\overrightarrow{f} = \overrightarrow{f_1} + \overrightarrow{f}_2$, la puissance de la somme des forces :

$$\begin{aligned}\mathscr{P}(\overrightarrow{f}) = \overrightarrow{f} \cdot \overrightarrow{v} &= \left(\overrightarrow{f_1} + \overrightarrow{f_2}\right) \cdot \overrightarrow{v} \\ &= \overrightarrow{f_1} \cdot \overrightarrow{v} + \overrightarrow{f_2} \cdot \overrightarrow{v},\end{aligned}$$

est égale à la somme des puissances de chacune des deux forces :

$$\mathscr{P}(\overrightarrow{f}) = \mathscr{P}(\overrightarrow{f_1}) + \mathscr{P}(\overrightarrow{f_2}).$$

Pour qualifier la puissance d'une force $\overrightarrow{f}$, on distingue trois cas :

- la puissance de $\overrightarrow{f}$ est **motrice** si $\mathscr{P}(\overrightarrow{f}) > 0$. Cela correspond au cas où la projection de la force sur la trajectoire est dans le sens du mouvement,
- la puissance de $\overrightarrow{f}$ est **résistante** si $\mathscr{P}(\overrightarrow{f}) < 0$. Cela correspond au cas où la projection de la force sur la trajectoire est opposée au mouvement,
- la puissance de $\overrightarrow{f}$ est nulle si $\mathscr{P}(\overrightarrow{f}) = 0$. Cela correspond au cas où la force est perpendiculaire au mouvement (ou que le point M est immobile, ce qu'on n'envisage pas ici).

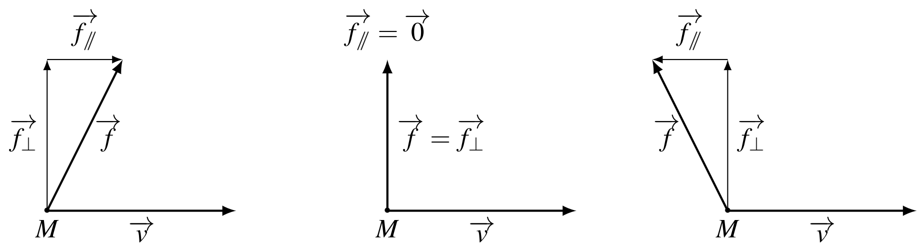


Figure 16.2 – À gauche, la projection $\overrightarrow{f_{/\!/}}$ de $\overrightarrow{f}$ sur $\overrightarrow{v}$ est dans le sens de $\overrightarrow{v}$, la puissance est motrice. À droite, $\overrightarrow{f_{/\!/}}$ est de sens opposé à $\overrightarrow{v}$, la puissance est résistante. Au centre, la force $\overrightarrow{f}$ est perpendiculaire à $\overrightarrow{v}$, la puissance est nulle.

1.3 Travail élémentaire d'une force

Le **travail élémentaire** d'une force $\overrightarrow{f}$ de puissance $\mathscr{P}(\overrightarrow{f})$ appliquée en un point M pendant un intervalle de temps dt est la quantité :

$$\delta W(\overrightarrow{f}) = \mathscr{P}(\overrightarrow{f})\mathrm{d}t.$$

Tout comme la puissance, le travail est une grandeur additive et dépend du référentiel d'étude. À partir de cette définition, on peut reformuler l'expression du travail élémentaire en introduisant le déplacement infinitésimal $\mathrm{d}\overrightarrow{OM}$:

$$\boxed{\delta W(\overrightarrow{f}) = \mathscr{P}(\overrightarrow{f})\mathrm{d}t = \overrightarrow{f} \cdot \overrightarrow{v}\mathrm{d}t = \overrightarrow{f} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{OM}.}$$

L'écriture $\delta W(\overrightarrow{f}) = \mathscr{P}(\overrightarrow{f})\mathrm{d}t$ est utilisée avec la variable temporelle alors que l'écriture $\delta W(\overrightarrow{f}) = \overrightarrow{f} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{OM}$ est utilisée avec les variables d'espace.
Le travail caractérise un échange d'énergie du système avec l'extérieur par l'intermédiaire de la force $\overrightarrow{f}$. C'est une grandeur d'échange qui n'existe ni à l'instant t ni à l'instant $t+\mathrm{d}t$ mais seulement au cours du déplacement entre t et $t+\mathrm{d}t$.

Remarque

Le travail infinitésimal δW est noté avec un δ et pas un d. La notation d est réservée aux différentielles définies comme des variations d'une fonction entre des points infiniment proches. Par exemple, on note $\mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM}(t+\mathrm{d}t) - \overrightarrow{OM}(t)$. Le travail n'est pas défini aux instants t et $t+\mathrm{d}t$, on ne peut donc pas le définir comme une différentielle. Pour s'en souvenir, on note généralement δ mais certains auteurs barrent le d et notent đ. Dans tous les cas, il faut proscrire le d.

1.4 Travail d'une force au cours d'un déplacement

Au cours d'un déplacement le long d'une trajectoire $\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$ allant de A vers B, au cours duquel le mobile M quitte A à l'instant t_A et arrive en B à l'instant $t_B > t_A$, le travail de la force $\overrightarrow{f}$ correspond à la somme des travaux élémentaires calculés sur la trajectoire $\overset{\frown}{\mathrm{AB}}$:

$$W_{A\to B}(\overrightarrow{f}) = \int_{M\in\overset{\frown}{\mathrm{AB}}} \delta W(\overrightarrow{f}).$$

La notation $\int_{M\in\overset{\frown}{\mathrm{AB}}}$ indique que le travail doit être calculé par une intégrale curviligne en suivant la trajectoire amenant le mobile de A vers B. Le travail dépend de la force $\overrightarrow{f}$ et de la manière dont on réalise le déplacement entre A et B. Le travail dépend du chemin suivi.

Avec la variable temporelle, $\delta W(\overrightarrow{f}) = \mathscr{P}(t)\mathrm{d}t$ puis $W_{A\to B}(\overrightarrow{f}) = \int_{t_A}^{t_B} \mathscr{P}(t)\mathrm{d}t$.

Avec les variables d'espace, $\delta W(\overrightarrow{f}) = \overrightarrow{f} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{OM}$ puis $W_{A\to B}(\overrightarrow{f}) = \int_{M\in\overset{\frown}{\mathrm{AB}}} \overrightarrow{f} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{OM}$.

2 Premiers exemples de calculs de travaux

2.1 Travail d'une force constamment perpendiculaire au mouvement

On considère une force $\overrightarrow{f}$ qui reste en permanence perpendiculaire au mouvement. Parmi les forces vues au chapitre précédent, la force magnétique d'expression $\overrightarrow{f} = q\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{B}$ rentre dans cette catégorie ; les forces de contact normales au support également lorsque le support est fixe dans le référentiel d'étude.

La force $\overrightarrow{f}$ reste toujours perpendiculaire au mouvement. Dans ces conditions, sa puissance est nulle à chaque instant : $\mathscr{P}(\overrightarrow{f}) = \overrightarrow{f} \cdot \overrightarrow{v} = 0.$ Son travail l'est également :

$$\delta W(\overrightarrow{f}) = \mathscr{P}\mathrm{d}t = 0 \quad \Longrightarrow \quad W_{A\to B}(\overrightarrow{f}) = 0.$$

2.2 Travail d'une force constante

On considère une force $\overrightarrow{f_0}$ constante. Parmi les forces vues au chapitre précédent, le poids rentre dans cette catégorie et alors $\overrightarrow{f_0} = m\overrightarrow{g}$; la force électrique également, à condition que le champ électrique $\overrightarrow{E}$ soit uniforme, et alors $\overrightarrow{f_0} = q\overrightarrow{E}$.

On peut poser $f_0 = \|\overrightarrow{f_0}\|$ et définir un axe (Oz) tel que $\overrightarrow{u_z} = \dfrac{\overrightarrow{f_0}}{f_0}$. En notant z la coordonnée de M sur l'axe (Oz), la puissance de $\overrightarrow{f_0}$ s'écrit : $\mathscr{P}(\overrightarrow{f_0}) = \overrightarrow{f_0} \cdot \overrightarrow{v} = f_0\overrightarrow{u_z} \cdot \overrightarrow{v} = f_0\dot{z}.$

On en déduit que son travail infinitésimal vaut : $\delta W(\overrightarrow{f_0}) = \mathscr{P}(\overrightarrow{f_0})\mathrm{d}t = f_0\dot{z}\mathrm{d}t = f_0\mathrm{d}z.$

En notant z_A et z_B les coordonnées de A et B sur l'axe (Oz), on obtient alors :

$$W_{A\to B}(\overrightarrow{f_0}) = \int_{M\in\overset{\frown}{\mathrm{AB}}} f_0\mathrm{d}z = f_0\Big[\mathrm{d}z\Big]_{z_A}^{z_B} = f_0\,(z_B - z_A)\,.$$

Dans ce cas, le travail infinitésimal est la dérivée d'une fonction : $\delta W(\overrightarrow{f_0}) = \mathrm{d}\,(f_0 z)$, et le travail sur une trajectoire partant de A et revenant en A est nul : $W_{A\to A}(\overrightarrow{f_0}) = f_0\,(z_A - z_A) = 0.$ Une telle force est une force conservative.

2.3 Travail d'une force de frottement de norme constante

On considère maintenant une force de frottement $\overrightarrow{f}$ dont seule la norme f est constante.

La force de frottement $\overrightarrow{f}$ étant opposée à la vitesse, sa puissance est toujours négative et s'exprime ainsi : $\mathscr{P}(\overrightarrow{f}) = \overrightarrow{f} \cdot \overrightarrow{v} = -f\|\overrightarrow{v}\| < 0.$ Son travail infinitésimal s'écrit :

$$\delta W(\overrightarrow{f}) = -f\|\overrightarrow{v}\|\mathrm{d}t = -f\|\overrightarrow{v}\mathrm{d}t\| = -f\mathrm{d}l$$

où $\mathrm{d}l$ est la longueur du déplacement infinitésimal. On en déduit :

$$W_{A\to B}(\overrightarrow{f}) = -f\,l_{\overset{\frown}{\mathrm{AB}}} \quad \text{où } l_{\overset{\frown}{\mathrm{AB}}} \text{ est la longueur du trajet } \overset{\frown}{\mathrm{AB}}.$$

Dans ce cas, le travail infinitésimal ne s'écrit pas comme une différentielle. Le travail sur une trajectoire fermée partant de A et revenant en A est strictement négatif. Une telle force est une force dissipative.

3 Théorème de l'énergie cinétique

3.1 Définition de l'énergie cinétique

L'**énergie cinétique** d'un point matériel de masse m animée d'une vitesse $\overrightarrow{v}$ dans le référentiel $\mathscr{R}$ est définie par la quantité scalaire :

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2.$$

Étant donné que la vitesse dépend du référentiel d'étude et que l'énergie cinétique dépend de la vitesse, on en déduit que **l'énergie cinétique dépend du référentiel d'étude**. Certains auteurs adoptent la notation $E_{c_{/\mathscr{R}}}$ pour insister sur ce point.

Par ailleurs, il faut noter que l'énergie cinétique ne dépend que de la norme de la vitesse et pas de sa direction. Elle est particulièrement utile lorsque l'on veut connaître uniquement la norme de la vitesse (soit parce que la direction est connue, soit parce qu'on restreint le problème à cet aspect des choses).

3.2 Théorème de l'énergie cinétique en référentiel galiléen

a) Énoncé du théorème

La variation d'énergie cinétique d'un point matériel entre deux instants est égale au travail des forces qui s'exercent sur ce point entre les deux instants considérés.

b) Démonstration du théorème

Il s'agit d'une conséquence du principe fondamental de la dynamique qui s'écrit :

$$m\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{v}}{\mathrm{d}t} = \sum_i \overrightarrow{f_i}.$$

En multipliant scalairement cette relation par $\overrightarrow{v}$, on obtient :

$$m\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{v}}{\mathrm{d}t}\cdot\overrightarrow{v} = \left(\sum_i \overrightarrow{f_i}\right)\cdot\overrightarrow{v} = \sum_i\left(\overrightarrow{f_i}\cdot\overrightarrow{v}\right) = \sum_i \mathscr{P},(\overrightarrow{f_i})$$

où $\mathscr{P}(\overrightarrow{f_i})$ est la puissance de la force $\overrightarrow{f_i}$. Or :

$$m\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{v}}{\mathrm{d}t}\cdot\overrightarrow{v} = m\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{v}}{2}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = \frac{\mathrm{d}E_c}{\mathrm{d}t},$$

soit finalement :

$$\frac{\mathrm{d}E_c}{\mathrm{d}t} = \sum_i \mathscr{P}(\overrightarrow{f_i}).$$

On intègre alors cette relation par rapport au temps entre l'instant t_A où le mobile quitte A avec une vitesse v_A et l'instant t_B où il atteint B avec la vitesse v_B :

$$\int_{t_A}^{t_B} \frac{\mathrm{d}E_c}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t = \int_{t_A}^{t_B} \left(\sum_i \mathscr{P}(\overrightarrow{f_i})\right)\mathrm{d}t.$$

Or, d'une part : $$\int_{t_A}^{t_B} \left(\sum_i \mathscr{P}(\overrightarrow{f_i})\right)\mathrm{d}t = \sum_i \int_{t_A}^{t_B} \mathscr{P}(\overrightarrow{f_i})\mathrm{d}t = \sum_i W_{A\to B}(\overrightarrow{f_i})$$
est égal à la somme des travaux des forces agissant sur M entre A et B et d'autre part :

$$\int_{t_A}^{t_B} \frac{\mathrm{d}E_c}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t = \Big[E_c(t)\Big]_{t_A}^{t_B} = E_c(t_B) - E_c(t_A) = \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2$$

est la variation d'énergie cinétique de M entre A et B que l'on note souvent ΔE_c.

Le théorème de l'énergie cinétique peut se formuler de deux manières :

- Loi de l'énergie cinétique :

$$\Delta E_c = E_c(t_B) - E_c(t_A) = \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2 = \sum_i W_{A\to B}(\overrightarrow{f_i})$$

  que l'on peut également écrire au niveau infinitésimal : $\mathrm{d}E_c = \sum_i \delta W(\overrightarrow{f_i})$.

- Loi de la puissance cinétique :

$$\frac{\mathrm{d}E_c}{\mathrm{d}t} = \sum_i \mathscr{P}(\overrightarrow{f_i}).$$

c) Discussion suivant le signe de $W_{A\to B}(\overrightarrow{f})$

- Si $\sum_i W_{A\to B}(\overrightarrow{f_i}) > 0$, le travail est moteur, l'énergie cinétique augmente donc la norme de la vitesse augmente. Le mouvement est accéléré.
- Si $\sum_i W_{A\to B}(\overrightarrow{f_i}) < 0$, le travail est résistant, l'énergie cinétique diminue donc la norme de la vitesse diminue. Le mouvement est décéléré.
- Si $\sum_i W_{A\to B}(\overrightarrow{f_i}) = 0$, le travail est nul, l'énergie cinétique est conservée donc la norme de la vitesse est constante. Le mouvement est uniforme.

✎ Pour montrer qu'un mouvement est uniforme, il faut avoir le réflexe d'utiliser le théorème de l'énergie cinétique. Plus généralement, c'est souvent le théorème à utiliser pour déterminer si un mouvement est accéléré, décéléré ou uniforme.

3.3 Utilisation du théorème de l'énergie cinétique

L'utilisation du théorème de l'énergie cinétique est de deux sortes :
- on déduit le travail de la somme des forces appliquées à partir de la connaissance de la variation d'énergie cinétique,
- on déduit la variation de l'énergie cinétique connaissant les travaux des forces.

Cette deuxième utilisation est souvent délicate car le travail des forces s'exprime rarement de façon simple. En revanche, il est particulièrement efficace dans le cas où une expression du travail est connue.

3.4 Intérêt d'une approche énergétique

En mécanique du point, le théorème de l'énergie cinétique est une conséquence du principe fondamental de la dynamique et n'introduit pas de nouveau postulat. Une approche énergétique revient implicitement à utiliser le principe fondamental de la dynamique.

En revanche, l'expression vectorielle du principe fondamental de la dynamique conduit par projection à trois équations scalaires tandis que le théorème de l'énergie cinétique ne fournit qu'une équation scalaire. En passant du principe fondamental de la dynamique au théorème de l'énergie cinétique, on a perdu deux équations scalaires. Dans la démonstration, cette perte a lieu lorsque l'on multiplie le principe fondamental de la dynamique par $\overrightarrow{v}$, ce qui conduit implicitement à projeter sur la trajectoire.

Lorsque l'on traite un problème dont la résolution ne concerne qu'une variable, une seule équation suffit et une méthode énergétique est appropriée. Les problèmes de ce type sont appelés problèmes à un degré de liberté. Si le problème a plus d'un degré de liberté, la seule utilisation du théorème de l'énergie cinétique ne permet pas la résolution complète du problème et on doit alors recourir au principe fondamental de la dynamique.

On retiendra qu'une méthode énergétique est adaptée aux cas où un seul paramètre de position suffit à décrire l'évolution du système.

3.5 Étude d'un problème à l'aide du théorème de l'énergie cinétique

a) Énoncé du problème

On considère un pratiquant de saut à ski qui s'élance sur un tremplin (figure 16.3). Il part sans élan du sommet A de la piste et parcourt la distance $e = 100$ m jusqu'à la tête de tremplin B d'où il saute. Au cours de la prise d'élan, il descend une dénivellation $h = 50$ m. Pour des raisons de sécurité, la vitesse du sauteur en B ne doit pas dépasser $v_{max} = 30\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$. Dans un premier temps, on veut savoir si les conditions de sécurité sont respectées lorsque les conditions de neige et de vent sont tellement bonnes que l'on peut négliger tout frottement. Ensuite, on va évaluer le travail des forces de frottement dans des conditions de glisse normales.

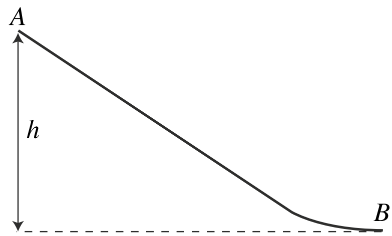


Figure 16.3 – Profil d'un tremplin de saut à ski.

b) Mise en équation et résolution du problème en l'absence de frottement

- Système : on modélise le skieur par un point matériel M de masse m.
- Référentiel : on étudie le mouvement de M dans le référentiel terrestre supposé galiléen.
- Bilan des forces : le skieur est soumis à :
  - son poids $\overrightarrow{P} = m\overrightarrow{g}$;
  - la force de contact normale de la neige sur ses skis $\overrightarrow{R}$ qui assure son mouvement le long de la piste ;
  - des forces de frottements solides (sous les skis) et fluides (résistance de l'air) de résultante $\overrightarrow{f}$ opposée au mouvement que l'on néglige car les conditions de glisse sont idéales.
- Méthode de résolution : on utilise le théorème de l'énergie cinétique.

On applique le théorème de l'énergie cinétique entre le point A et le point B :

$$E_c(B) - E_c(A) = W_{A\to B}(\overrightarrow{R}) + W_{A\to B}(\overrightarrow{P}) \tag{16.1}$$

et on détermine les deux membres de cette égalité.

Le sauteur part de A avec une vitesse $\overrightarrow{v_A} = \overrightarrow{0}$. Il atteint le point B avec une vitesse $\overrightarrow{v_B}$ de norme v_B. La variation d'énergie cinétique entre A et B vaut donc :

$$\Delta E_c = E_c(B) - E_c(A) = \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2 = \frac{1}{2}mv_B^2.$$

Le travail de la force de contact est nul puisqu'elle est en permanence perpendiculaire au mouvement ce qui implique que :

$$\mathscr{P}(\overrightarrow{R}) = \overrightarrow{R}\cdot\overrightarrow{v} = 0 \qquad \text{puis} \qquad W_{A\to B}(\overrightarrow{R}) = 0.$$

Il ne reste qu'à calculer le travail du poids entre le point A et le point B. Pour cela, on définit l'axe (Oz) vertical ascendant de sorte que $\overrightarrow{P} = -mg\overrightarrow{u_z}$ et on trouve alors :

$$\delta W(\overrightarrow{P}) = -mg\overrightarrow{u_z}\cdot \mathrm{d}\overrightarrow{OM} = -mg\mathrm{d}z,$$

puis :

$$W_{A\to B}(\overrightarrow{P}) = \int_{z_A}^{z_B} -mg\mathrm{d}z = -mg\Big[z\Big]_{z_A}^{z_B} = -mg(z_B - z_A) = mg(z_A - z_B) = mgh.$$

Le travail du poids est positif : c'est le moteur du mouvement du skieur vers le bas. En injectant les relations précédentes dans l'équation (16.1), on obtient alors :

$$\frac{1}{2}mv_B^2 = mgh \qquad \text{puis} \qquad v_B = \sqrt{2gh}.$$

Numériquement, $v_B = \sqrt{2\times 10\times 50} = 32\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$ qui est supérieure à la vitesse limite de sécurité de $30\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$. Le tremplin n'est pas sûr par conditions idéales de glisse.

c) Calcul des forces de frottement lors d'une prise d'élan chronométrée

Lors d'un essai pour lequel les conditions de glisse ne sont pas idéales, les responsables de la sécurité du tremplin mesurent la vitesse en tête du tremplin : $v_B = 25\ \text{m}\cdot\text{s}^{-1}$. On veut évaluer le travail des forces de frottement au cours de cette descente pour un sauteur de masse $m = 75$ kg équipé.

Comme précédemment, on applique le théorème de l'énergie cinétique :

$$E_c(B) - E_c(A) = W_{A\to B}(\overrightarrow{R}) + W_{A\to B}(\overrightarrow{P}) + W_{A\to B}(\overrightarrow{f}),$$

d'où on tire :

$$W_{A\to B}(\overrightarrow{f}) = E_c(B) - E_c(A) - W_{A\to B}(\overrightarrow{R}) - W_{A\to B}(\overrightarrow{P}),$$

et, en injectant les expressions des travaux trouvées précédemment, on obtient :

$$W_{A\to B}(\overrightarrow{f}) = \frac{1}{2}mv_B^2 - mgh.$$

Numériquement, on trouve alors $W_{A\to B}(\overrightarrow{f}) = 0{,}5 \times 75 \times 25^2 - 75 \times 10 \times 50 = -14$ kJ.

Le travail des forces de frottement est négatif, ce qui correspond bien à une force résistante. Il est en général très difficile de distinguer la part dissipée par les frottements des skis sur la neige de la part dissipée par la résistance de l'air.

4 Énergie potentielle et forces conservatives

4.1 Définitions

On dit qu'une force $\overrightarrow{f}$ **dérive d'un potentiel** ou encore qu'elle est **conservative** si son travail $W_{A\to B}(\overrightarrow{f})$ entre deux points A et B ne dépend pas du chemin suivi mais uniquement des points A et B. On peut alors écrire le travail $W_{A\to B}(\overrightarrow{f})$ comme la différence $E_p(A) - E_p(B)$ où E_p est une fonction de la variable de position. Au niveau élémentaire, la relation devient :

$$\delta W(\overrightarrow{f}) = -\mathrm{d}E_p.$$

On appelle alors **énergie potentielle de la force** cette fonction E_p.

> Une force $\overrightarrow{f}$ est dite conservative si on peut trouver une fonction énergie potentielle E_p telle que
>
> $$\overrightarrow{f} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \delta W(\overrightarrow{f}) = -\mathrm{d}E_p.$$

L'énergie potentielle est définie à partir de sa variation, elle n'est donc déterminée qu'à une constante près : si E_p est une énergie potentielle possible, $E_p + K$ où K est une constante est également une énergie potentielle possible. On peut donc fixer une position arbitraire O pour laquelle $E_p(O) = 0$. Le point O est alors le point de **référence de l'énergie potentielle**.

> **Remarque**
>
> Lors de la définition du travail, on a insisté sur le fait que le travail n'est en général pas une différentielle. C'est pour cela qu'on le note δW avec un δ plutôt qu'un d. Les forces conservatives sont les forces singulières pour lesquelles le travail est une différentielle.

4.2 Exemples de forces conservatives

a) Poids d'un corps

Le poids d'un point matériel de masse m dans le champ de pesanteur $\overrightarrow{g}$ vaut : $m\overrightarrow{g}$, soit en projection dans un système de coordonnées cartésiennes dont l'axe (Oz) est vertical et dirigé vers le haut : $-mg\overrightarrow{u_z}$. Le travail de cette force s'écrit donc :

$$\delta W = m\overrightarrow{g}\cdot \mathrm{d}\overrightarrow{OM} = (-mg\overrightarrow{u_z})\cdot \mathrm{d}\overrightarrow{OM} = -mg(\overrightarrow{u_z}\cdot \mathrm{d}\overrightarrow{OM}).$$

Or $\overrightarrow{u_z}\cdot \mathrm{d}\overrightarrow{OM}$ est la composante du déplacement infinitésimal selon $\overrightarrow{u_z}$ donc $\overrightarrow{u_z}\cdot \mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \mathrm{d}z$. On en déduit :

$$\delta W = -mg\mathrm{d}z = -\mathrm{d}\left(mgz\right) = -\mathrm{d}E_p \qquad \text{puis} \qquad E_p = mgz + C$$

où C est une constante d'intégration que l'on peut choisir de manière arbitraire.

Dans cette expression, l'axe (Oz) est dirigé selon la verticale ascendante. Il s'agit donc d'un axe des altitudes, et l'énergie potentielle augmente lorsque l'altitude augmente. On peut alors retenir la formule ci-dessus sous la forme :

$$\boxed{E_p = mg\cdot \text{altitude.}}$$

Le choix arbitraire de l'altitude 0, c'est-à-dire de la référence des altitudes, correspond au choix arbitraire de la constante C.

b) Force gravitationnelle exercée par un astre ponctuel

On considère un point matériel M de masse m soumis à la force gravitationnelle exercée par un astre de centre P et de masse m_p. M est soumis à la force gravitationnelle :

$$\overrightarrow{F}_{P\to M} = -\mathscr{G}\frac{mm_p}{r^2}\overrightarrow{u_r},$$

où $r = \|\overrightarrow{PM}\|$ et $\overrightarrow{u_r} = \dfrac{\overrightarrow{PM}}{r}$. Le travail élémentaire de cette force s'écrit :

$$\delta W = \overrightarrow{F}_{P\to M}\cdot \mathrm{d}\overrightarrow{PM} = -\mathscr{G}\frac{mm_p}{r^2}\overrightarrow{u_r}\cdot \mathrm{d}\overrightarrow{PM} = -\mathscr{G}\frac{mm_p}{r^2}\left(\frac{\overrightarrow{PM}}{r}\cdot \mathrm{d}\overrightarrow{PM}\right).$$

Or $\overrightarrow{PM}\cdot \mathrm{d}\overrightarrow{PM} = \mathrm{d}\left(\dfrac{\overrightarrow{PM}^2}{2}\right) = \mathrm{d}\left(\dfrac{r^2}{2}\right) = r\mathrm{d}r$ donc

$$\delta W = -\mathscr{G}\frac{mm_p}{r^2}\mathrm{d}r = \mathscr{G}mm_p\left(-\frac{\mathrm{d}r}{r^2}\right) = \mathscr{G}mm_p\mathrm{d}\left(\frac{1}{r}\right) = \mathrm{d}\left(\frac{\mathscr{G}mm_p}{r}\right) = -\mathrm{d}E_p.$$

On en déduit l'énergie potentielle associée : $E_p = -\dfrac{\mathscr{G}mm_p}{r} + C$, où C est une constante. On prend généralement comme référence des énergies potentielles $E_p \to 0$ lorsque $r \to \infty$, ce qui revient à choisir $C = 0$ et on obtient :

$$\boxed{E_p = -\frac{\mathcal{G} m m_p}{r}.}$$

Remarque

Pour établir cette relation, on peut également remarquer que l'expression de la force $\overrightarrow{F}_{P \to M} = -\mathcal{G}\frac{m m_p}{r^2}\overrightarrow{u_r}$ suppose de travailler en coordonnées sphériques d'origine P. Or, le déplacement infinitésimal radial en sphérique vaut dr d'où $\overrightarrow{u_r} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{PM} = dr$.

c) Force de rappel d'un élastique d'un ressort

Un ressort de raideur k ayant subi un allongement $\Delta l = l - l_0$ exerce une force de rappel élastique dans la direction de l'allongement :

$$\overrightarrow{f} = -k\Delta l \overrightarrow{u}_{ext}.$$

où le vecteur unitaire $\overrightarrow{u}_{ext}$ est dirigé du ressort vers le système. Lors d'un déplacement infinitésimal $\mathrm{d}\overrightarrow{OM}$ du point M, le travail élémentaire de la force de rappel élastique vaut :

$$\delta W = \overrightarrow{f} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{OM} = -k\,(l - l_0)\,\overrightarrow{u}_{ext} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{OM}.$$

Le produit scalaire $\overrightarrow{u}_{ext} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{OM}$ est la projection du déplacement infinitésimal dans la direction du ressort et conduit à un variation de la longueur du ressort de dl. On en déduit le travail élémentaire :

$$\delta W = -k\,(l - l_0)\,\mathrm{d}l = -\mathrm{d}E_p$$

puis

$$E_p = \frac{1}{2}k\,(l - l_0)^2 + C \qquad \text{où } C \text{ est une constante.}$$

On prend généralement comme référence des énergies potentielles $E_p = 0$ lorsque le ressort est à sa longueur à vide donc que $l = l_0$. Cela revient à choisir $C = 0$ et on obtient alors l'expression l'énergie potentielle élastique dont dérive la force de rappel du ressort :

$$\boxed{E_p = \frac{1}{2}k\,(l - l_0)^2.}$$

d) Force électrique

Force coulombienne exercée par une charge ponctuelle On considère un point matériel M de charge q soumis à la force coulombienne exercée par une charge q_p placée en P. M est soumis à la force coulombienne :

$$\overrightarrow{F}_{P \to M} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q q_p}{r^2}\overrightarrow{u_r},$$

où $r = \|\overrightarrow{PM}\|$ et $\overrightarrow{u_r} = \dfrac{\overrightarrow{PM}}{r}$. Le travail élémentaire de cette force s'écrit :

$$\delta W = \overrightarrow{F}_{P\to M} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{PM} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qq_P}{r^2}\overrightarrow{u_r} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{PM} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qq_P}{r^2}\left(\frac{\overrightarrow{PM}}{r} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{PM}\right).$$

Comme pour la force gravitationnelle, $\overrightarrow{PM} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{PM} = r\mathrm{d}r$ donc :

$$\delta W = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qq_P}{r^2}\mathrm{d}r = -\frac{qq_P}{4\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{\mathrm{d}r}{r^2}\right) = -\frac{qq_P}{4\pi\varepsilon_0}\mathrm{d}\left(\frac{1}{r}\right) = -\mathrm{d}\left(\frac{qq_P}{4\pi\varepsilon_0 r}\right) = -\mathrm{d}E_p.$$

On déduit alors l'énergie potentielle correspondante :

$$E_p = \frac{qq_P}{4\pi\varepsilon_0 r} + C \qquad \text{où } C \text{ est une constante.}$$

On prend généralement comme référence des énergies potentielles $E_p \to 0$ lorsque $r \to \infty$, ce qui revient à choisir $C = 0$ et on obtient :

$$\boxed{E_p = \frac{qq_P}{4\pi\varepsilon_0 r}.}$$

Force exercée par un champ électrique uniforme On étudie un point matériel de charge électrique q placé dans un champ électrique uniforme $\overrightarrow{E}$. Il est soumis à la force

$$\overrightarrow{F} = q\overrightarrow{E},$$

dont le travail élémentaire s'écrit :

$$\delta W = \overrightarrow{F} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{OM} = q\overrightarrow{E} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{OM}.$$

On note $E = \|\overrightarrow{E}\|$ et on choisit l'axe (Oz) de telle sorte que $\overrightarrow{E} = E\overrightarrow{u_z}$.
Le travail élémentaire de cette force s'écrit alors :

$$\delta W = (qE\overrightarrow{u_z}) \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{OM} = qE\left(\overrightarrow{u_z} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{OM}\right).$$

Or $\overrightarrow{u_z} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \mathrm{d}z$ d'où :

$$\delta W = qE\mathrm{d}z = \mathrm{d}(qEz) = -\mathrm{d}E_p.$$

On déduit l'énergie potentielle correspondante :

$$\boxed{E_p = -qEz + C,}$$

où C est une constante.

4.3 Exemples de forces non conservatives

On considère une force de frottement fluide proportionnelle à la vitesse $\overrightarrow{f} = -\lambda \overrightarrow{v}$. Le travail élémentaire de cette force s'écrit :

$$\delta W = \overrightarrow{f} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{OM} = -\lambda \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{v}\mathrm{d}t = -\lambda v^2 \mathrm{d}t < 0.$$

Ce travail dépend non seulement du déplacement $\mathrm{d}\overrightarrow{OM}$, mais aussi de la vitesse à laquelle il est fait. On ne peut pas l'écrire sous la forme d'une différentielle : il ne s'agit donc pas d'une force conservative. Les forces de frottement dissipant de l'énergie, on parle de **forces dissipatives**.

> **Remarque**
>
> Dans le cas d'une force conservative, on a : $W_{A \to B} = E_p(A) - E_p(B) = -W_{B \to A}$.
> Ceci ne peut pas être réalisé pour les forces de frottement car le travail est toujours négatif : $W_{A \to B} < 0$ et $W_{B \to A} < 0$. Les frottements ne sont pas conservatifs.

5 Énergie mécanique

5.1 Définition de l'énergie mécanique

> La quantité E_m qui est la somme de l'énergie cinétique et des énergies potentielles est appelée **énergie mécanique** du point matériel :
>
> $$E_m = E_c + E_p.$$

Dans cette définition, E_p est l'énergie potentielle du système, c'est-à-dire la somme des énergies potentielles des différentes forces conservatives.

5.2 Conservation de l'énergie mécanique

On considère un système soumis à un ensemble de forces $\overrightarrow{f_i}$. Dans le cas où ces forces sont conservatives ou ne travaillent pas, on peut écrire pour chacune des forces :

$$W(\overrightarrow{f_i}) = -\Delta E_{pi}.$$

On définit alors l'énergie potentielle du système comme la somme des énergies potentielles dont dérive chacune des forces :

$$E_p = \sum_i E_{pi}.$$

Le théorème de l'énergie cinétique implique alors que :

$$\Delta E_c = \sum_i W(\overrightarrow{f_i}) = \sum_i -\Delta E_{pi} = -\Delta E_p \qquad \text{soit} \qquad \Delta(E_c + E_p) = 0.$$

On en déduit :

$$E_c + E_p = E_m \qquad \text{où } E_m \text{ est une constante.}$$

L'énergie mécanique d'un point matériel soumis uniquement à des forces conservatives ou qui ne travaillent pas est une constante du mouvement.

Lorsque toutes les forces sont conservatives, le mouvement est qualifié de mouvement conservatif car l'énergie mécanique est conservée.

Dans le cas d'un mouvement conservatif, l'énergie mécanique est une quantité qui se conserve au cours du mouvement et qui n'est fonction que de la position et de ses dérivées premières par rapport au temps. L'énergie mécanique est alors une **intégrale première du mouvement**.

L'énergie mécanique est répartie sous deux formes : énergie cinétique et énergie potentielle. L'énergie potentielle peut être convertie en énergie cinétique et réciproquement, mais, pour un mouvement conservatif, la somme des deux formes d'énergie reste constante. La conservation de l'énergie mécanique et l'échange permanent entre les deux formes d'énergies ont été mis en évidence lors de l'étude de l'oscillateur harmonique.

5.3 Cas général : non conservation de l'énergie mécanique

Dans le cas général, il est nécessaire de distinguer les forces conservatives notées $\overrightarrow{f_C}$ de celles qui ne le sont pas que l'on notera $\overrightarrow{f_{NC}}$. En notant leurs travaux respectifs $W(\overrightarrow{f_C})$ et $W(\overrightarrow{f_{NC}})$, on sait, d'après ce qui précède, que $W(\overrightarrow{f_C})$ peut se mettre sous la forme : $W(\overrightarrow{f_C}) = -\Delta E_p$ où E_p est l'énergie potentielle du système. En revanche, il n'est pas aisé d'avoir une expression simple de $W(\overrightarrow{f_{NC}})$. L'expression du travail total vaut alors :

$$W_{tot} = W(\overrightarrow{f_C}) + W(\overrightarrow{f_{NC}}) = -\Delta E_p + W(\overrightarrow{f_{NC}}).$$

En appliquant le théorème de l'énergie cinétique à cette situation, on a donc :

$$\Delta E_c = W_{tot} = -\Delta E_p + W(\overrightarrow{f_{NC}})$$

puis

$$\Delta E_m = \Delta(E_c + E_p) = W(\overrightarrow{f_{NC}})$$

ou sous forme élémentaire :

$$\mathrm{d}E_m = \mathrm{d}(E_c + E_p) = \delta W(\overrightarrow{f_{NC}}).$$

Parfois ce résultat est appelé « théorème de l'énergie mécanique ».

La variation d'énergie mécanique au cours du mouvement est égale au travail des forces qui ne dérivent pas d'un potentiel, autrement dit des forces non conservatives.

C'est une autre formulation du théorème de l'énergie cinétique.

Il est à noter que le problème de la conservation de l'énergie fait partie d'un cadre beaucoup plus général que celui de la mécanique. On reviendra sur ce point dans le cours de thermodynamique et plus précisément lors de l'étude du premier principe qui postule la conservation de l'énergie totale. Le résultat qui vient d'être établi sera alors généralisé.

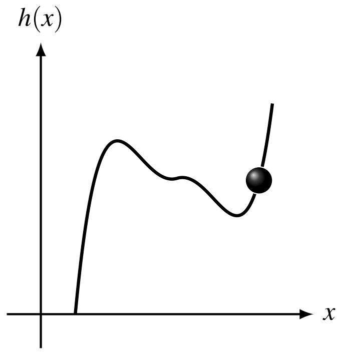
6 Étude qualitative des mouvements et des équilibres

6.1 Exemple introductif

On considère un jeu dans lequel une perle est enfilée sur une tige rigide formant des puits et des bosses (figure 16.4). Le profil d'altitude de la tige est noté $h(x)$ et la pesanteur dérive de l'énergie potentielle $E_p = mg \cdot \text{altitude} = mgh(x)$. La courbe d'altitude $h(x)$ est, à un facteur d'échelle près, identique à la courbe d'énergie potentielle de pesanteur. Tous ceux qui ont joué à ce jeu savent que :

- si on lâche la perle sans vitesse initiale, elle glisse spontanément vers le fond du puits le plus proche ;
- les positions où la perle peut rester en équilibre sont les sommets des bosses (positions instables) et les fonds des puits (positions stables) ;
- pour pouvoir sortir la perle d'un puits, il faut lui procurer une vitesse (une énergie cinétique) de norme suffisante pour pouvoir gravir la bosse d'à côté sur son élan.

Dans ce paragraphe, on va modéliser, expliquer et généraliser ces observations.



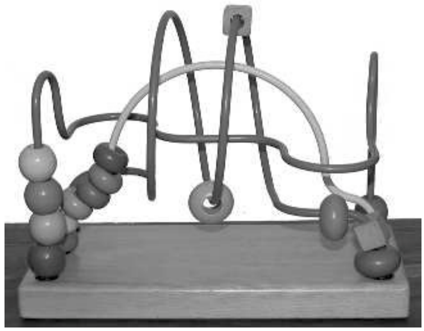


Figure 16.4 – Jeu constitué d'une perle enfilée sur une tige rigide. Le profil d'altitude $h(x)$ coïncide, à un facteur d'échelle près, au profil d'énergie potentielle.

6.2 Position du problème

Pour simplifier l'analyse, on considère que le point matériel M de masse m n'est soumis qu'à une force conservative notée $\overrightarrow{F}$ qui dérive de l'énergie potentielle E_p. On suppose que le problème est paramétré par une variable d'espace cartésienne notée x. La force $\overrightarrow{F}$ est alors de la forme $\overrightarrow{F} = F_x(x)\overrightarrow{u_x}$ et l'énergie potentielle une fonction de la variable x : $E_p(x)$.

D'après le théorème de l'énergie cinétique, l'énergie mécanique se conserve soit :

$$E_c + E_p = E_m = \text{constante}.$$

Par ailleurs, l'énergie cinétique est une quantité positive : $E_c = \frac{1}{2}mv^2 = E_m - E_p \geq 0$, ce qui entraîne que l'énergie mécanique est supérieure ou égale à l'énergie potentielle :

$$\boxed{E_m \geq E_p.}$$

On peut généraliser cette situation au cas où toutes les forces qui travaillent sont conservatives. $\overrightarrow{F}$ est alors la résultante des forces et E_p l'énergie potentielle totale. Par ailleurs, les résultats que l'on démontre ici sont transposables au cas où la variable est une variable angulaire qui sera traitée en exercice.

6.3 Analyse du mouvement à l'aide d'un graphe énergétique

La connaissance de l'énergie potentielle $E_p(x)$ en fonction de la variable de position x permet de distinguer les différents mouvements possibles. Pour cela, on trace le graphe de l'énergie potentielle $E_p(x)$ et la droite horizontale d'ordonnée E_m.

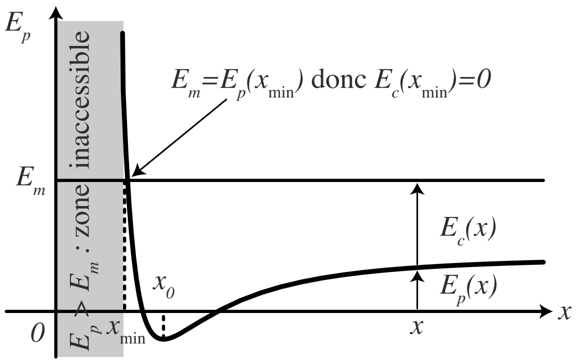


Figure 16.5 – Graphe d'énergie potentielle. Avec l'énergie mécanique E_m, le mobile peut atteindre l'ensemble des positions telles que $x > x_{\min}$. En $x = x_{\min}$, sa vitesse s'annule, en $x = x_0$, elle est maximale.

a) Positions accessibles

Graphiquement, l'inégalité $E_m \geq E_p(x)$ entraîne que le mobile ne peut accéder qu'aux positions pour lesquelles la courbe d'énergie potentielle est en dessous de la droite horizontale d'ordonnée E_m.

b) Vitesse en un point

Graphiquement, l'égalité $E_m = E_c + E_p$ permet de déterminer l'énergie cinétique E_c en un point d'abscisse x : c'est l'écart entre la droite d'ordonnée E_m et la courbe $E_p(x)$. On en déduit la norme de la vitesse $v(x)$ par la relation :

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 \qquad \Longleftrightarrow \qquad v(x) = \sqrt{\frac{2E_c}{m}} = \sqrt{\frac{2(E_m - E_p(x))}{m}}.$$

En un point où $E_p = E_m$, l'énergie cinétique est nulle. Cette position représente un point de vitesse nulle. C'est le cas en $x = x_{\min}$ sur la figure 16.5.

En un point où l'énergie potentielle est minimale, l'énergie cinétique du mobile est maximale. En ce point, le mobile atteint sa vitesse maximale. C'est le cas en $x = x_0$ sur la figure 16.5.

Exemple

Considérons l'énergie potentielle décrite par la figure 16.6 ci-dessous : $E_p(x)$ est une fonction décroissante puis croissante de x qui admet un minimum en x_0 et tend vers E_∞ lorsque $x \to \infty$. On veut établir graphiquement les différents types de mouvements que l'on peut observer suivant la valeur de l'énergie mécanique du mobile.

- Si $E_m < E_0$, alors $E_m < E_p$ quelle que soit la position. Aucun mouvement n'est possible avec une énergie mécanique aussi basse.
- Si $E_m = E_0$, le point matériel ne peut être qu'en $x = x_0$ et son énergie cinétique (donc sa vitesse) est nulle. Le point matériel est en équilibre en $x = x_0$.
- Si $E_0 < E_m < E_\infty$ ($E_m = E_1$ dans l'exemple considéré) alors le point matériel ne peut évoluer qu'entre les positions x_1 et x'_1. Il reste dans une zone bornée de l'espace et ne peut pas s'en aller à l'infini. Il est dans un **état lié**. Lorsqu'il passe en x_0, son énergie potentielle est minimale, sa vitesse est alors maximale. En x_1 et x'_1, la vitesse du mobile s'annule, il fait demi-tour et repart dans l'autre sens.
- Si $E_m \geq E_\infty$ ($E_m = E_2$ dans l'exemple considéré) alors le point matériel peut évoluer aux positions d'abscisses x vérifiant $x \geq x_3$. Le point matériel peut s'échapper à l'infini. Il est dans un **état libre** ou **état de diffusion**. x_3 est une position de vitesse nulle et x_0 une position de vitesse maximale.

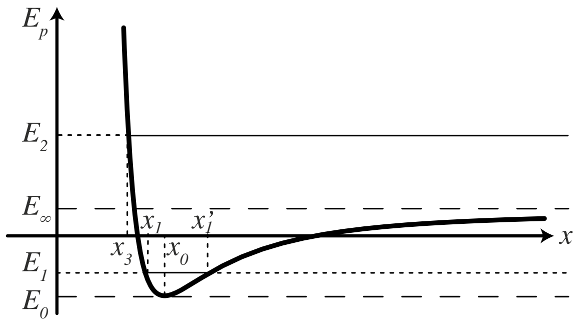


Figure 16.6 – Analyse graphique des positions accessibles au mobile en fonction de son énergie mécanique.

6.4 Analyse des équilibres à l'aide d'un graphe énergétique

a) Définitions

Un point matériel est en équilibre lorsque sa vitesse est nulle à tout instant. On en déduit que son accélération est nulle à tout instant puis, d'après le principe fondamental de la dynamique, que la somme des forces qui s'appliquent sur ce point est nulle.

En une position d'équilibre, la somme des forces qui s'appliquent au mobile est nulle :

$$\sum_i \overrightarrow{f_i} = \overrightarrow{0}.$$

Le mobile peut rester indéfiniment en une position d'équilibre.

Quand on écarte le mobile de sa position d'équilibre,

- s'il revient vers sa position d'équilibre initiale, la position d'équilibre est **stable** ;
- s'il s'éloigne définitivement de sa position d'équilibre initiale, la position d'équilibre est **instable**.

Pour qu'une position d'équilibre soit stable, il est donc nécessaire que, au voisinage de cette position d'équilibre, la résultante des forces soit dirigée vers cette dernière.

b) Lien entre la force et l'énergie potentielle

Lorsqu'on considère uniquement la force $\overrightarrow{F} = F_x(x)\overrightarrow{u_x}$ qui dérive de l'énergie potentielle $E_p(x)$, le travail s'écrit :

$$\delta W = \overrightarrow{F} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{OM} = F_x(x)\overrightarrow{u_x} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{OM} = F_x(x)\mathrm{d}x = -\mathrm{d}E_p$$

puis la force :

$$F_x(x) = -\frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}x}.$$

Cette relation explique pourquoi l'on dit que la force $\overrightarrow{F}$ *dérive d'une énergie potentielle*. Cette relation montre également que :

- aux endroits où E_p est croissante, sa dérivée par rapport à x est positive et la force est dirigée vers les x décroissants et donc vers les énergies potentielles décroissantes,
- aux endroits où E_p est décroissante, sa dérivée par rapport à x est négative et la force est dirigée vers les x croissants et donc vers les énergies potentielles décroissantes,
- aux endroits où E_p admet une tangente horizontale, sa dérivée par rapport à x est nulle et la force également.

Ceci est illustré sur la figure 16.7.

Si la force $\overrightarrow{F} = F_x(x)\overrightarrow{u_x}$ dérive de l'énergie potentielle $E_p(x)$ alors :

$$\overrightarrow{F} = -\frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}x}\overrightarrow{u_x}.$$

En un point d'abscisse x, la force $\overrightarrow{F}$ est dirigée dans le sens des énergies potentielles décroissantes donc vers le minimum d'énergie potentielle le plus proche.

c) Détermination énergétique des positions d'équilibre

Pour déterminer les positions pour lesquelles le point matériel est à l'équilibre, il faut chercher les positions où la force $\overrightarrow{F}$ s'annule. Cela implique que la dérivée de la fonction $E_p(x)$ s'annule et donc que la courbe représentative de $E_p(x)$ admet une tangente horizontale.

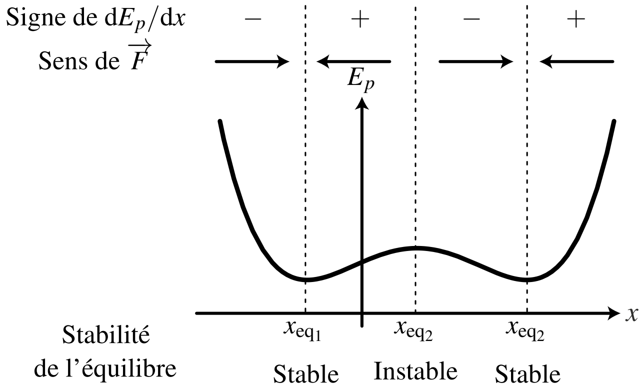


Figure 16.7 – Sens de la force $\overrightarrow{F}$ en fonction des variations de l'énergie potentielle E_p.

> Une position d'équilibre correspond à un extremum d'énergie potentielle. Son abscisse x_{eq} vérifie l'équation :
> $$\left(\frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}x}\right)_{x=x_{\mathrm{eq}}} = 0.$$

d) Étude énergétique de la stabilité des équilibres

Pour analyser la stabilité de la position d'équilibre d'abscisse x_{eq}, il faut déterminer si, au voisinage de x_{eq}, la résultante des forces est dirigée vers x_{eq} ou non.

On se place alors au voisinage de x_{eq} en un point d'abscisse $x = x_{\mathrm{eq}} + \mathrm{d}x$. La force $\overrightarrow{F}$ est dirigée vers les énergies potentielles décroissante donc :

- si x_{eq} est un minimum d'énergie potentielle, $\overrightarrow{F}$ tend à ramener le mobile vers x_{eq} qui est donc une position d'équilibre stable (positions $x_{\mathrm{eq}1}$ et $x_{\mathrm{eq}3}$ de la figure 16.7),
- si x_{eq} est un maximum d'énergie potentielle, $\overrightarrow{F}$ tend à éloigner le mobile de x_{eq} qui est donc une position d'équilibre instable (positions $x_{\mathrm{eq}2}$ de la figure 16.7).

Lorsque la fonction E_p est deux fois dérivable et que sa dérivée seconde ne s'annule pas en x_{eq}, on peut exprimer la force $\overrightarrow{F}$ au voisinage de x_{eq}. Pour cela, on utilise un développement de Taylor (voir appendice mathématique) de la fonction $F_x(x)$:

$$F_x(x_{\mathrm{eq}} + \mathrm{d}x) = F_x(x_{\mathrm{eq}}) + \left(\frac{\mathrm{d}F_x}{\mathrm{d}x}\right)_{x=x_{\mathrm{eq}}} \mathrm{d}x = \left(\frac{\mathrm{d}F_x}{\mathrm{d}x}\right)_{x=x_{\mathrm{eq}}} \mathrm{d}x = \mathrm{d}F_x,$$

puisque x_{eq} est une position d'équilibre donc $F_x(x_{\mathrm{eq}}) = 0$.

Par ailleurs, $F_x(x) = -\dfrac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}x}$ donc $\left(\dfrac{\mathrm{d}F_x}{\mathrm{d}x}\right)_{x=x_{\mathrm{eq}}} = -\left(\dfrac{\mathrm{d}^2E_p}{\mathrm{d}x^2}\right)_{x=x_{\mathrm{eq}}}$. Au voisinage de x_{eq}, le mobile est donc soumis à une force élémentaire $\mathrm{d}F_x$ telle que

$$\mathrm{d}F_x = -\left(\frac{\mathrm{d}^2E_p}{\mathrm{d}x^2}\right)_{x=x_{\mathrm{eq}}}\mathrm{d}x.$$

Si on exerce un déplacement $\mathrm{d}x > 0$, il faut que $\mathrm{d}F_x < 0$ pour ramener le point vers sa position initiale. Cela impose donc :

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2E_p}{\mathrm{d}x^2}\right)_{x=x_{\mathrm{eq}}} > 0.$$

De même, si on exerce un déplacement $\mathrm{d}x < 0$, il faut que $\mathrm{d}F_x > 0$ pour ramener le point vers sa position initiale et on retrouve le même résultat.

La position d'équilibre x_{eq} est **stable** si l'énergie potentielle est minimale en x_{eq}. Cela se traduit généralement par :

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2E_p}{\mathrm{d}x^2}\right)_{x=x_{\mathrm{eq}}} > 0.$$

La position d'équilibre x_{eq} est **instable** dans les autres cas. Généralement, l'énergie potentielle est alors maximale en x_{eq} et $\left(\frac{\mathrm{d}^2E_p}{\mathrm{d}x^2}\right)_{x=x_{\mathrm{eq}}} < 0$.

7 Portraits de phase et lien avec le profil d'énergie potentielle

Dans ce paragraphe, on définit une représentation graphique du mouvement appelée **portrait de phase**. On se limite à un **système à un degré de liberté** mécanique, c'est-à-dire à un système dont l'évolution est décrite par un seul paramètre de position. Pour un tel mouvement, la notion de trajectoire est souvent de peu d'intérêt car les trajectoires sont des portions de droites, de cercles, ou de courbes connues à l'avance. Le portrait de phase permet de représenter sur un même graphe la position de M ainsi que sa vitesse et permet une représentation plus riche. Comme dans le paragraphe précédent, on considère que le mouvement du point matériel M est paramétré par une variable d'espace cartésienne notée x pour simplifier l'analyse, mais tout est transposable au cas où la coordonnée de M n'est pas cartésienne.

7.1 Définitions

Le **plan de phase** d'un système à un degré de liberté est le plan $(x, \dot{x})$ où x est la variable de position de M et $\dot{x}$ sa dérivée. À chaque instant, le mobile M est repéré par sa position x et on peut déterminer sa vitesse $\dot{x}$. On peut le représenter par un point P de coordonnées $(x, \dot{x})$ du plan de phase. Au cours du mouvement du mobile, la succession des points P trace une courbe dans le plan de phase appelée **trajectoire de phase**. On a déjà établi et tracé une trajectoire de phase pour l'oscillateur harmonique, on va généraliser cette notion pour d'autres mouvements. On peut noter que les conditions initiales du mouvement $(x(t=0), \dot{x}(t=0))$ sont représentées par un point P_0 du plan de phase. Le déterminisme implique que chaque condition initiale donne une unique trajectoire de phase. Le **portrait de phase** d'un système est un ensemble de trajectoires de phases associées à différentes conditions initiales.

7.2 Exemple introductif

a) Position du problème

On considère un mobile M de masse m soumis à la seule force conservative $\overrightarrow{F} = F_x(x)\overrightarrow{u_x}$ qui dérive de l'énergie potentielle $E_p(x)$ tracée sur la figure 16.8. Comme la seule force qui travaille est conservative, le théorème de l'énergie cinétique implique que l'énergie mécanique E_m du système est conservée : $E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2}mv^2 + E_p(x)$.

En coordonnées cartésiennes $\overrightarrow{v} = \dot{x}\overrightarrow{u_x}$ et l'énergie cinétique vaut alors :

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\dot{x}^2.$$

Il s'en suit que l'on peut déterminer $\dot{x}$ en fonction x à partir de l'expression de l'énergie potentielle $E_p(x)$ et de la valeur de l'énergie mécanique E_m grâce à la relation :

$$\dot{x}^2 = \frac{2\left(E_m - E_p(x)\right)}{m}$$

qui admet deux solutions de signes opposés :

$$\dot{x} = \sqrt{\frac{2\left(E_m - E_p(x)\right)}{m}} > 0 \qquad \text{et} \qquad \dot{x} = -\sqrt{\frac{2\left(E_m - E_p(x)\right)}{m}} < 0.$$

On peut alors tracer une trajectoire de phase point par point en fixant une valeur pour E_m et en relevant la valeur de $E_p(x)$ sur le profil d'énergie potentielle. La fonction « racine carré » étant une fonction croissante, la norme de la vitesse $|\dot{x}|$ est une fonction croissante de l'écart $E_m - E_p(x)$.

b) Observation du portrait de phase

On a tracé sur la figure 16.8 un exemple de profil d'énergie potentielle et le portrait de phase associé. L'énergie potentielle $E_p(x)$ est une fonction décroissante puis croissante de x qui admet un minimum en O. Sa courbe représentative dessine une « cuvette » dont les bords ont une hauteur E_∞. Elle forme un **puits de potentiel** de profondeur E_∞. L'origine de l'axe (Ox), ainsi que la référence d'énergie potentielle sont choisies arbitrairement au minimum d'énergie potentielle. Sur cette courbe d'énergie potentielle, on a fait apparaître trois niveaux d'énergie mécanique E_1, E_2 et E_3 et tracé sur le graphe du dessous les trajectoires de phase associées.

c) Analyse des différents mouvements possibles

Dans tous les cas, on observe que la norme de la vitesse augmente quand le mobile s'approche du fond du puits puis diminue quand il s'en éloigne. Elle est maximale au fond du puits.

Pour l'énergie mécanique $E_1 \ll E_\infty$ ou $E_2 < E_\infty$, le mobile est piégé dans le puits de potentiel. Il est dans un état lié et suit un mouvement périodique. Sa trajectoire de phase est une courbe fermée décrite dans le sens horaire. Lorsque le mobile passe par le minimum d'énergie potentielle, sa vitesse est maximale. La trajectoire de phase admet alors une tangente horizontale.

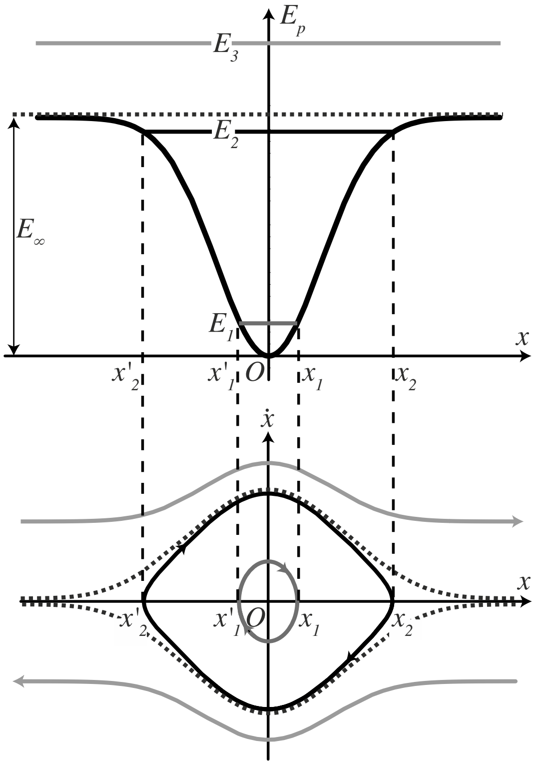


Figure 16.8 – Energie potentielle et portrait de phase. Exemple d'un puits de potentiel de profondeur E_0.

Pour $E_m = E_1$, la vitesse du mobile s'annule en x_1 et x'_1. La trajectoire de phase coupe l'axe des abscisses en x_1 et x'_1. Le mobile réalise des oscillations de faible amplitude autour de sa position d'équilibre. On démontrera qu'on peut assimiler ces oscillations à des oscillations harmoniques et la trajectoire de phase à une ellipse.

Pour $E_m = E_2$, la vitesse du mobile s'annule en x_2 et x'_2. La trajectoire de phase coupe l'axe des abscisses en x_2 et x'_2. Le mobile réalise des oscillations de grande amplitude qui ne sont pas harmoniques. Sa trajectoire de phase change de forme. On montrera que ce changement de forme est une preuve de la non-linéarité du problème.

Pour l'énergie mécanique $E_3 > E_\infty$, le mobile est libre de sortir du puits de potentiel. Il est dans un état de diffusion. Deux trajectoires de phase ouvertes sont possibles selon le signe de la vitesse : une trajectoire parcourue de gauche à droite située dans le demi-plan supérieur qui correspond à $\dot{x} > 0$ et une trajectoire parcourue de droite à gauche située dans le demi-plan inférieur qui correspond à $\dot{x} < 0$.

7.3 Caractéristiques principales des portraits de phase

Dans ce paragraphe, on cherche les caractéristiques principales des portraits de phase à partir de l'exemple ci-dessus et on les justifie brièvement.

1. **Les trajectoires de phases sont parcourues de gauche à droite dans le demi-plan supérieur et de droite à gauche dans le demi-plan inférieur.**

   Dans le demi-plan supérieur $\dot{x} > 0$ donc x est croissante et évolue de gauche à droite. Dans le demi-plan inférieur, $\dot{x} < 0$ donc x est décroissante et évolue de droite à gauche.

2. **Les mouvements périodiques correspondent à des trajectoires de phase fermées décrites dans le sens horaire.**

   Si le mouvement du mobile est périodique, il retrouve la même position et la même vitesse après une période donc le même point du plan de phase. D'après le point 1, elles sont décrites dans le sens horaire.

3. **Les trajectoires de phases ne se croisent pas.**

   Ceci se démontre par l'absurde en supposant que deux trajectoires se croisent en P_0. P_0 représente une condition initiale pour l'évolution du système. Si deux trajectoires de phases passent par P_0, c'est qu'une même condition initiale peut conduire à deux mouvements différents. C'est incompatible avec le déterminisme classique.

4. **Une trajectoire de phase coupe généralement l'axe (Ox) selon la verticale.**

   En effet, la tangente à la trajectoire de phase en un point $(x, \dot{x})$ peut être définie comme la droite passant par ce point et faisant un angle α avec l'axe Ox tel que :

   $$\tan\alpha = \frac{\mathrm{d}\dot{x}}{\mathrm{d}x} = \frac{\dfrac{\mathrm{d}\dot{x}}{\mathrm{d}t}}{\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}} = \frac{\ddot{x}}{\dot{x}}.$$

   Sur l'axe (Ox), la vitesse $\dot{x}$ est nulle. Dans le cas général, l'accélération $\ddot{x}$ est non nulle et $\tan\alpha \to \infty$ d'où $|\alpha| \to \dfrac{\pi}{2}$.

   On peut noter que les positions d'équilibres pour lesquelles $\ddot{x} = 0$ sont des exceptions à cette règle. En pratique, seules les positions d'équilibre instables posent problème car, si le mobile est sans vitesse en une position d'équilibre stable, il ne bouge plus et sa trajectoire de phase est restreinte à un point.

5. **Les positions d'équilibres stables sont entourées de trajectoires de phase elliptiques.**

   On a vu que les trajectoires de phases d'un oscillateur harmonique sont des ellipses. On démontrera dans un prochain chapitre que les mouvements de faible amplitude au voisinage d'une position d'équilibre stable sont des mouvements harmoniques. Ce point en sera la conséquence directe.

SYNTHÈSE

SAVOIRS

- puissance et travail d'une force
- savoir que la puissance dépend du référentiel
- énergie cinétique d'un système
- savoir qu'elle dépend du référentiel
- loi de l'énergie cinétique et de la puissance cinétique dans un référentiel galiléen
- définition d'une force conservative
- expressions des énergies potentielles de pesanteur (champ uniforme), gravitationnelle (champ créé par un astre ponctuel), élastique, électrique (champ uniforme et champ créé par une charge ponctuelle)
- définition d'une position d'équilibre
- savoir que les positions d'équilibre stable correspondent à des minima d'énergie potentielle et que les positions d'équilibre instable correspondent à des maxima
- définitions d'un état lié et d'un état de diffusion

SAVOIR-FAIRE

- reconnaître le caractère moteur ou résistant d'une force
- utiliser la loi de l'énergie cinétique ou la loi de la puissance cinétique à bon escient
- établir les expressions des énergies potentielles à connaître
- reconnaître les cas de conservation de l'énergie mécanique
- déterminer l'énergie mécanique initiale en exploitant les conditions initiales
- tracer un graphe d'énergie potentielle
- repérer les positions d'équilibre et déduire leur stabilité à partir d'un graphe d'énergie potentielle
- déduire d'un graphe d'énergie potentielle le comportement qualitatif d'un mobile : trajectoire bornée ou non, mouvement périodique, position de vitesse nulle
- expliquer qualitativement le lien entre le profil d'énergie potentielle et le portrait de phase

MOTS-CLÉS

- puissance
- travail
- énergie cinétique
- force conservative
- énergie potentielle
- énergie mécanique
- mouvement conservatif
- équilibre et stabilité
- état lié
- état de diffusion