Corrigé Maths I , TSI 2011

Elhor Abdelali , CPGE Mohammedia

Premier problème

Première partie

Existence du point fixe

1.1. La bonne définition des termes de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ est assurée par la vérité de la propriété " $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in I$ " qu'on montre par récurrence ,
• *initialisation* : on a par hypothèse $u_0 \in I$.
• *hérédité* : si on suppose $u_n \in I$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$ alors , avec l'hypothèse $f(I) \subset I$, on a $u_{n+1} = f(u_n) \in I$.

1.2. Cas où $I = [a, b]$
1.2.1. Par récurrence sur n ,
• *initialisation* : la propriété est clairement vraie pour $n = 0$.
• *hérédité* : si on suppose $|u_{n+1} - u_n| \leq k^n |u_1 - u_0|$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$ alors avec l'hypothèse

$$\forall (x, y) \in I^2 , \ |f(x) - f(y)| \leq k |x - y|$$

on a $|u_{n+2} - u_{n+1}| = |f(u_{n+1}) - f(u_n)| \leq k |u_{n+1} - u_n| \leq k^{n+1} |u_1 - u_0|$ ce qui achève la récurrence . Et comme $u_0, u_1 \in I = [a, b]$ on a $|u_1 - u_0| \leq b - a$ d'où pour tout entier naturel n ona $|u_{n+1} - u_n| \leq k^n (b - a)$ ce qui s'écrit aussi ,
$\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n - k^n (b - a) \leq u_{n+1} \leq u_n + k^n (b - a)$.

1.2.2. On a pour tout entier naturel n , $v_{n+1} - v_n = (u_{n+1} - u_n) - \alpha(1 - k)k^n(b - a)$ et $w_{n+1} - w_n = (u_{n+1} - u_n) + \alpha(1 - k)k^n(b - a)$.
• *condition nécessaire* : si les deux suites $(v_n)_{n\geq 0}$ et $(w_n)_{n\geq 0}$ sont adjacentes alors on a $\forall n \in \mathbb{N}$, $(v_{n+1} - v_n)(w_{n+1} - w_n) \leq 0$ condition qui peut s'écrire aussi ,
$\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - u_n| \leq |\alpha| (1 - k)k^n(b - a)$ et donc $|\alpha| \geq \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \dfrac{|u_{n+1} - u_n|}{(1 - k)k^n(b - a)}$.
• *condition suffisante* : si $|\alpha| \geq \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \dfrac{|u_{n+1} - u_n|}{(1 - k)k^n(b - a)}$ alors pour tout entier naturel n on a , $-|\alpha| (1 - k)k^n(b - a) \leq u_{n+1} - u_n \leq |\alpha| (1 - k)k^n(b - a)$ et on voit clairement que si $\alpha \geq 0$ on a $(v_n)_{n\geq 0}$ décroissante et $(w_n)_{n\geq 0}$ croissante et si $\alpha \leq 0$ on a $(v_n)_{n\geq 0}$ croissante et $(w_n)_{n\geq 0}$ décroissante . Et comme en plus on a

$\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n - w_n = 2\alpha k^n(b-a)$ et $k \in]0,1[$ on voit que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n - w_n = 0$ et donc que les deux suites $(v_n)_{n\geq 0}$ et $(w_n)_{n\geq 0}$ sont bien adjacentes .

On conclut que les deux suites $(v_n)_{n\geq 0}$ et $(w_n)_{n\geq 0}$ sont adjacentes si et seulement si $|\alpha| \geq \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \dfrac{|u_{n+1}-u_n|}{(1-k)k^n(b-a)}$.

remarque : *D'après la question **1.2.1.** ce sup est fini et est inférieur ou égal à* $\dfrac{1}{1-k}$ *et donc le choix* $|\alpha| \geq \dfrac{1}{1-k}$ *est suffisant pour que les deux suites* $(v_n)_{n\geq 0}$ *et* $(w_n)_{n\geq 0}$ *soient adjacentes .*

1.2.3. Le réel α étant choisi tel que les suites $(v_n)_{n\geq 0}$ et $(w_n)_{n\geq 0}$ soient adjacentes soit ℓ leur limite (finie) commune . Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha k^n(b-a) = 0$ on voit que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$. Et comme $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [a,b]$ on voit que $\ell \in [a,b]$.

1.2.4. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on a $|u_n - f(\ell)| = |f(u_{n-1}) - f(\ell)| \leq k\,|u_{n-1} - \ell|$. Et en faisant tendre n vers $+\infty$ on voit que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = f(\ell)$. Et par unicité de la limite on a $f(\ell) = \ell$ c'est à dire que ℓ est un point fixe de f .

1.3. Cas où $I = [a, +\infty[$

1.3.1. Le système $\begin{cases} y = f(a) + k(x-a) \\ y = x \end{cases}$ se résoud à l'équation linéaire du premier degré $x = f(a) + k(x-a)$ qui admet une solution unique $x = \dfrac{f(a)-ka}{1-k}$ ce qui prouve que les deux droites D et Δ d'équations respectives $y = f(a)+k(x-a)$ et $y = x$ sont concourantes au point (c,c) où $c = \dfrac{f(a)-ka}{1-k}$. Et on voit que $c - a = \dfrac{f(a)-a}{1-k} \geq 0$ puisque $f(I) \subset I$ et $k < 1$.

1.3.2. D'une part on a $c \geq a$ donc si $c \neq a$ c'est que $a < c$. Et d'une autre pour $x \in [a,c]$ on a $f(x) - f(a) \leq k(x-a) \leq k(c-a)$ et donc $f(x) \leq f(a) + k(c-a) = c$ et comme on a par hypothèse $f(x) \geq a$ on conclut que $f([a,c]) \subset [a,c]$.

1.3.3. Si $c = a$ c'est que $f(a) = a$ et donc f admet $a \in I$ pour point fixe .

Sinon on sait d'après **1.3.2.** que $f([a,c]) \subset [a,c]$ et en utilisant le résultat de la question **1.2.** on a l'existence de $\ell \in [a,c]$ tel que $f(\ell) = \ell$.

On conclut alors que f admet un point fixe dans I .

1.4. Cas où $I =]-\infty, a]$

- Pour $x \in J$ on a $g(x) = -f(-x)$ et comme $-x \in I$ et $f(I) \subset I$ on voit que $-g(x) \in I$ c'est à dire $g(x) \in J$. On a donc $g(J) \subset J$.
- Pour tout $(x,y) \in J^2$ on a $|g(x) - g(y)| = |f(-y) - f(-x)| \leq k\,|x-y|$.

La fonction g vérifie donc sur $J = [-a, +\infty[$ les hypothèses de la question **1.3.**

précédente . D'où l'existence de $\ell \in J$ tel que $g(\ell) = \ell$ ce qui s'écrit aussi $-\ell \in I$ et $f(-\ell) = -\ell$ ce qui veut dire que f admet un point fixe dans I .

1.5. Cas où $I = \mathbb{R}$

1.5.1. D'une part c (resp. d) étant l'abscisse du point d'intersection de la droite d'équation $y = f(0) - kx$ (resp. $y = f(0) + kx$) avec la première bissectrice on a $\begin{cases} c = f(0) - kc \\ d = f(0) + kd \end{cases}$ et donc $c = \dfrac{f(0)}{1+k}$ et $d = \dfrac{f(0)}{1-k}$. Et d'une autre pour $x \in [c, d]$ (*remarquer que* $x > 0$) on a $f(x) - f(0) \leq kx \leq kd$ et donc $f(x) \leq f(0) + kd = d$.

Mais on n'a pas (en général) $f(x) \geq c$ pour tout $x \in [c, d]$ comme le montre l'exemple $f : x \mapsto 1 + \dfrac{cosx}{2}$ où on a $f(0) = \dfrac{3}{2}$, $k = \dfrac{1}{2}$, $c = 1$ et $d = 3$ mais on n'a pas $f(x) \geq 1$ pour tout $x \in [1, 3] \Rightarrow$ *erreur d'énoncé !*

Par contre on a $f([-d, d]) \subset [-d, d]$ vu que pour tout $x \in [-d, d]$ on a ,
$f(x) - f(0) \geq -k|x| \geq -kd$ et donc $f(x) \geq f(0) - kd \geq -kd \geq -d$.

La question **1.2.** permet donc de conclure à l'existence d'un point fixe ℓ de f , $\ell \in [-d, d]$ et comme on a $-k|\ell| \leq \ell - f(0) \leq k|\ell|$ on voit que $f(0) \leq \ell + k|\ell|$ et ainsi si ℓ était négatif on aurait $f(0) \leq (1-k)\ell$ ce qui contredit $f(0) > 0$, ℓ est donc positif et par suite $-k\ell \leq \ell - f(0) \leq k\ell$ ce qui donne $\dfrac{f(0)}{1+k} \leq \ell \leq \dfrac{f(0)}{1-k}$ c'est à dire $\ell \in [c, d]$.

1.5.2.

- Si $f(0) = 0$ c'est que 0 est un point fixe pour f .
- Si $f(0) < 0$ la fonction $g : x \to -f(-x)$ vérifie les hypothèses de la question **1.5.1.** et donc admet un point fixe ℓ dans $I = \mathbb{R}$ et il s'en suit que f admet un point fixe $-\ell$ dans $I = \mathbb{R}$.

Deuxière partie

Unicité du point fixe

2.1. Soient ℓ_1 et ℓ_2 dans I tels que $f(\ell_1) = \ell_1$ et $f(\ell_2) = \ell_2$. On doit donc avoir , $|\ell_1 - \ell_2| = |f(\ell_1) - f(\ell_2)| \leq k|\ell_1 - \ell_2|$ soit $(1-k)|\ell_1 - \ell_2| \leq 0$ et comme on a $1 - k > 0$ on voit que $|\ell_1 - \ell_2| \leq 0$ c'est à dire $|\ell_1 - \ell_2| = 0$ soit $\ell_1 = \ell_2$.

2.2. *Approximation du point fixe*

2.2.1 En utilisant un résultat de la question **1.2.1** on peut écrire ,

$$\forall (n, p) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^* \text{ , } |u_{n+p} - u_n| = |\sum_{i=0}^{p-1} u_{n+i+1} - u_{n+i}| \leq \sum_{i=0}^{p-1} |u_{n+i+1} - u_{n+i}|$$

soit $\forall (n,p) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}^*$, $|u_{n+p}-u_n| \leq \sum_{i=0}^{p-1} k^{n+i}|u_1-u_0| = k^n\left(\sum_{i=0}^{p-1} k^i\right)|u_1-u_0|$

soit $\forall (n,p) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}^*$, $|u_{n+p}-u_n| \leq k^n\dfrac{1-k^p}{1-k}|u_1-u_0|$ et cette dernière inégalité restant valable pour $p=0$ on a le résultat demandé .

2.2.2. En faisant tendre p vers $+\infty$ dans l'inégalité ci-dessus on voit que , $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n-\ell| \leq \dfrac{k^n}{1-k}|u_1-u_0|$ vu que $\lim\limits_{p\to+\infty} u_{n+p}=\ell$ et $\lim\limits_{p\to+\infty} k^p=0$.

2.3. *Un exemple*

2.3.1. On a $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $|f(x)-f(y)| = \dfrac{1}{2}|sinx - siny|$ et le théorème des accroissements finis appliqué à la fonction sinus donne l'existence d'un réel z tel que $sinx - siny = cos(z)(x-y)$ et on voit que pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ on a , $|f(x)-f(y)| \leq \dfrac{1}{2}|x-y|$ ce qui signifie que la fonction f satisfait aux hypothèses de la question **1.5.** (avec $k=\dfrac{1}{2}\in]0,1[$) . f admet donc un point fixe $\ell\in\mathbb{R}$ qui est unique d'après **2.1.** .

2.3.2. On a d'après **2.2.2.** $\forall n\in\mathbb{N}$, $|u_n-\ell| \leq \dfrac{\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}}|f(0)-0| = \dfrac{1}{2^{n-1}}$ et ainsi pour que u_n soit une valeur approchée de ℓ à 10^{-3} près il suffit de choisir n tel que $\dfrac{1}{2^{n-1}} \leq 10^{-3}$ c'est à dire tel que $2^{n-1}\geq 1000$ et comme $2^{10}=1024$ et $2^9=512$ on choisira donc l'entier naturel n tel que $n\geq 11$.

Deuxième problème

Première partie

Étude d'une fonction

1.1. Pour $u\in]-1,1[$ on sait que $\dfrac{1}{1-u} = \sum_{n=0}^{+\infty} u^n$ d'où en posant $u=-t^2$ on voit que pour tout $t\in]-1,1[$ on a $\dfrac{1}{1+t^2} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n t^{2n}$ ce qui prouve que la dérivée de la fonction arctangente admet au voisinage de 0 un développement en série entière de rayon de convergence 1 et on conclut alors d'après le cours que la fonction arctangente admet au voisinage de 0 un développement en série entière de même rayon de convergence que celui de sa dérivée et qui s'obtient par intègration terme à terme : $arctan\, t = \sum_{n=0}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n}{2n+1}t^{2n+1}$.

1.2. La fonction g est clairement continue sur $\mathbb{R}^*$ comme produit de deux fonctions continues sur $\mathbb{R}^*$.

On a $\lim\limits_{t\to 0} g(t) = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{arctan\, t}{t} = \lim\limits_{t\to 0} \dfrac{arctan\, t - arctan\, 0}{t-0} = arctan^{'} 0 = \dfrac{1}{1+0} = 1$ donc la fonction g admet un prolongement par continuité en 0 avec , si on note encore g ce prolongement , $g(0) = 1$.

1.3. Pour $x \in \mathbb{R}^*$ on pose $f(x) = \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x g(t)dt$.

1.3.1. Si on note pour tout réel x , $G(x) = \displaystyle\int_0^x g(t)dt$ (remarquer que G n'est autre que la primitive sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 0 de la fonction g) on a $f(x) = \dfrac{G(x)}{x}$ pour tout réel non nul x d'où f est continue sur $\mathbb{R}^*$ comme produit de deux fonctions continues sur $\mathbb{R}^*$.

Et comme en plus on a $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{G(x) - G(0)}{x-0} = G^{'}(0) = g(0) = 1$ on voit que la fonction f se prolonge en une fonction continue sur $\mathbb{R}$ avec , si on note encore f ce prolongement , $f(0) = 1$.

1.3.2. Pour $z \in \mathbb{C}^*$ on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{|\frac{(-1)^{n+1}z^{2n+2}}{(2n+3)^2}|}{|\frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n+1)^2}|} = |z|^2$ et la règle de D'Alembert donne que la série numérique $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} z^{2n}$ est divegente si $|z| > 1$ et absolument convergente si $|z| < 1$ ce qui prouve que la série entière $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} z^{2n}$ est de rayon de convergence 1 .

1.3.3. D'une part la série entière $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} z^{2n}$ est de rayon de convergence 1 donc la série $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} x^{2n}$ est convergente pour tout réel $x \in]-1,1[$.

Et d'une autre , en utilisant **1.1.** , on a $\forall t \in]-1,1[\,,\ g(t) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} t^{2n}$ et par intégration terme à terme on a $\forall x \in]-1,1[\,,\ \displaystyle\int_0^x g(t)dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} x^{2n+1}$ et on voit que $\forall x \in]-1,1[\,,\ f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} x^{2n}$.

1.3.4. D'une part f est clairemnt de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$ comme produit de deux fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$. Et d'une autre , d'après **1.3.3.** , elle est développable en série entière au voisinage de 0 et donc de classe $\mathcal{C}^\infty$ dans un voisinage de 0 . On conclut alors que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

1.4. *Expression de $f(1)$ comme somme d'une série .*

1.4.1. Comme la suite $n \mapsto \dfrac{1}{(2n+1)^2}$ est décroissante et de limite 0 en $+\infty$ on voit que la série **alternée** $\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}$ vérifie le **critère de Leibniz** et est donc convergente d'après le cours qui donne en plus la majoration du module du reste $\left| S - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2} \right| = \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2} \right| \leq \left| \frac{(-1)^{n+1}}{(2(n+1)+1)^2} \right| = \frac{1}{(2n+3)^2}$.

1.4.2. Pour $k \in \mathbb{N}^*$ et $x \in]0,1[$ montrons d'abord que $0 \leq 1 - x^{2k} \leq k(1-x^2)$, en effet le théorème des accroissements finis appliqué à la fonction $t \mapsto t^k$ sur le segment $[x^2, 1]$ donne l'existence d'un réel $\xi \in]0,1[$ tel que $1 - x^{2k} = k\xi^{k-1}(1-x^2)$.

remarque :

Ce résultat peut s'obtenir aussi en utilisant l'identité $1 - x^{2k} = (1-x^2)\sum_{i=0}^{k-1} x^{2i}$.

Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in]0,1[$ on peut écrire ,
$\left| \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}(1-x^{2k}) \right| \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1-x^{2k}}{(2k+1)^2} \leq (1-x^2)\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(2k+1)^2}$ et vu que le terme $\frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}(1-x^{2k})$ est nul pour $k=0$ on a le résultat demandé .

1.4.3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in]0,1[$ on a en utilisant **1.3.3.** ,
$\left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2} \right| = \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}x^{2k} - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}(1-x^{2k}) \right|$ et donc
$\left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2} \right| \leq \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}x^{2k} \right| + \left| \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}(1-x^{2k}) \right|$ soit en utilisant **1.4.2.** $\left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2} \right| \leq \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}x^{2k} \right| + (1-x^2)\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(2k+1)^2}$
d'une part on a clairement $\frac{k}{(2k+1)^2} \leq \frac{1}{k}$ pour tout entier naturel k et donc $(1-x^2)\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(2k+1)^2} \leq (1-x^2)\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in]0,1[$ et d'une autre la série $\sum_{k\geq 0} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}x^{2k}$ est clairement **alternée** pour $x \in]0,1[$ et satisfait au **critère de Leibniz** vu que la suite $k \mapsto \frac{x^{2k}}{(2k+1)^2}$ décroit vers 0 (comme produit de deux suites décroissantes vers 0) , et on a donc la majoration en valeur absolue du reste $\left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}x^{2k} \right| \leq \left| \frac{(-1)^{n+1}x^{2(n+1)}}{(2(n+1)+1)^2} \right| \leq \frac{1}{(2n+3)^2}$ d'où le résultat demandé $\left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2} \right| \leq (1-x^2)\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} + \frac{1}{(2n+3)^2}$.

1.4.4. Du fait de la décroissance de la fonction $t \mapsto \frac{1}{t}$ sur $]0,+\infty[$ on a pour tout entier $k \geq 2$, $\frac{1}{k} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{dt}{t} = \ell n(k) - \ell n(k-1)$ d'où pour tout entier $n \geq 2$,

$\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k}\leq\sum_{k=2}^{n}\ell n(k)-\ell n(k-1)=\ell n(n)$ et donc $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\leq 1+\ell n(n)$ et cette dernière inégalité restant valable pour $n=1$ on a le résultat souhaité .

1.4.5. D'une part on a pour tout entier $n\geq 1$, $x_n=\sqrt{1-\frac{1}{n}}$ d'où $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=1$ et d'une autre , vu que $x_n\in]0,1[$ pour $n\geq 2$, on a d'après **1.4.3.** et **1.4.4.**

$$\left|f(x_n)-\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}\right|\leq(1-x_n^2)\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}+\frac{1}{(2n+3)^2}\leq\frac{1+\ell n(n)}{n}+\frac{1}{(2n+1)^2}$$

et finalement , f étant continue en 1 d'après **1.3.1.** , on voit en faisant $n\to+\infty$ que $f(1)=\lim\limits_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}=S$.

1.4.6. On a en utilisant **1.4.1.** pour tout entier naturel n ,

$\left|f(1)-\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}\right|\leq\frac{1}{(2n+3)^2}$ donc pour que la somme partielle $S_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}$ soit une valeur approchée de $f(1)$ à 10^{-3} près il suffit qu'on ait $\frac{1}{(2n+3)^2}\leq 10^{-3}$ soit $n\geq 15$, S_{15} est donc une valeur approchée de $f(1)$ à 10^{-3} près .

En dérivant la relation $xf(x)=\int_0^x g(t)dt$ on a $f(x)+xf^{'}(x)=g(x)$ ce qui donne $f^{'}(1)=g(1)-f(1)=\frac{\pi}{4}-f(1)$ et donc $\frac{\pi}{4}-S_{15}$ est une valeur approchée à 10^{-3} près de $f^{'}(1)$.

remarque : *une valeur approchée à* 10^{-2} *près de* $f(1)$ *est* $S_4\approx 0.92$ *et une valeur approchée à* 10^{-2} *près de* $f^{'}(1)$ *est* $\frac{\pi}{4}-S_4\approx -0.13$.

1.5. *Étude de f au voisinage de* $+\infty$.

1.5.1. Pour $t\in]0,+\infty[$ posons $\varphi(t)=arctan\,t+arctan\,\frac{1}{t}$. En dérivant la fonction φ ainsi définie on a , $\forall t>0$, $\varphi^{'}(t)=\frac{1}{1+t^2}-\frac{1}{t^2}\frac{1}{1+\frac{1}{t^2}}=0$ la fonction φ est donc constante sur l'intervalle $]0,+\infty[$ et comme $\varphi(1)=\frac{\pi}{2}$ on a le résultat demandé .

1.5.2. Pour $x>0$ on a , $f(x)=\frac{1}{x}\int_0^x g(t)dt=\frac{1}{x}\int_0^1 g(t)dt+\frac{1}{x}\int_1^x g(t)dt$

par le biais du changement de variable $t\mapsto\frac{1}{t}$ on a , $\int_1^x g(t)dt=\int_1^{\frac{1}{x}}-\frac{1}{t^2}g(\frac{1}{t})dt$

et d'après **1.5.1.** ona pour tout réel $t>0$,

$$-\frac{1}{t^2}g(\frac{1}{t})=-\frac{1}{t^2}\frac{arctan(\frac{1}{t})}{\frac{1}{t}}=-\frac{1}{t}(\frac{\pi}{2}-arctan\,t)=g(t)-\frac{\pi}{2t}$$

d'où pour tout réel $x>0$ on a ,

$$\int_1^x g(t)dt=\int_1^{\frac{1}{x}}g(t)dt-\frac{\pi}{2}\int_1^{\frac{1}{x}}\frac{dt}{t}=\int_1^{\frac{1}{x}}g(t)dt+\frac{\pi}{2}\ell n(x)$$

et donc pour tout réel $x>0$, $f(x)=\frac{1}{x}\int_0^1 g(t)dt+\frac{1}{x}\int_1^{\frac{1}{x}}g(t)dt+\frac{\pi\ell n(x)}{2x}$

c'est à dire , $f(x)=\dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^{\frac{1}{x}} g(t)dt+\dfrac{\pi\ell n(x)}{2x}=\dfrac{1}{x^2}f(\dfrac{1}{x})+\dfrac{\pi\ell n(x)}{2x}$.

1.5.3. On a d'une part par continuité de f en 0 , $\lim\limits_{x\to+\infty} f(\dfrac{1}{x})=f(0)=1$ et donc $\dfrac{1}{x^2}f(\dfrac{1}{x})\sim\dfrac{1}{x^2}$ au voisinage de $+\infty$ et d'une autre on a , $\dfrac{1}{x^2}=o(\dfrac{\pi\ell n(x)}{2x})$ au voisinage de $+\infty$. Donc on a , $f(x)\sim\dfrac{\pi\ell n(x)}{2x}$ au voisinage de $+\infty$ et par suite $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\pi\ell n(x)}{2x}=0$.

1.6. On a , d'après **1.5.2.** , $\forall x>0$, $f(x)=\dfrac{\pi\ell n(x)}{2x}+\dfrac{1}{x^2}f(\dfrac{1}{x})$ et comme pour $x>1$ on a $\dfrac{1}{x}\in]0,1[$ on voit , en utilisant **1.3.3.** , que pour tout réel $x>1$ on a ,

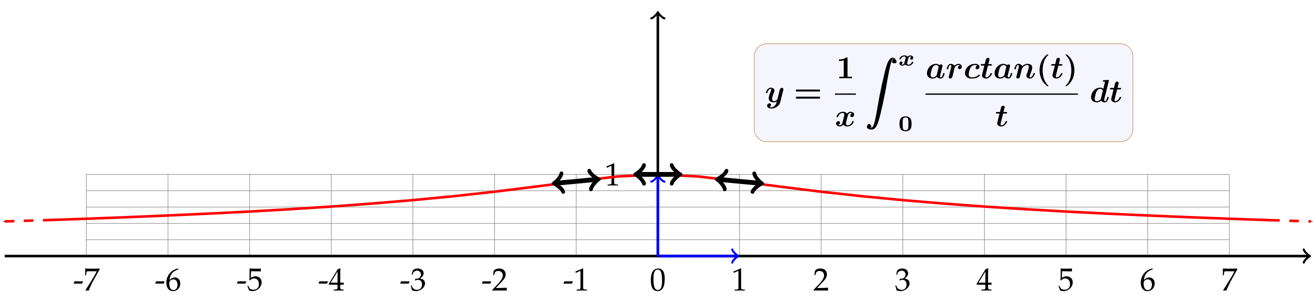
$$f(x)=\frac{\pi\ell n(x)}{2x}+\frac{1}{x^2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}\frac{1}{x^{2n}}=\frac{\pi\ell n(x)}{2x}+\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}\frac{1}{x^{2n+2}}\ .$$

On a $f(5)=\dfrac{\pi\ell n(5)}{10}+\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n}{(2n+1)^2}\dfrac{1}{5^{2n+2}}$ et la série $\displaystyle\sum_{n=\geq 0}\dfrac{(-1)^n}{(2n+1)^2}\dfrac{1}{5^{2n+2}}$ étant clairement alternée et de Leibniz on a pour tout entier naturel n , $\left|f(5)-\dfrac{\pi\ell n(5)}{10}-\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\dfrac{(-1)^k}{(2k+1)^2}\dfrac{1}{5^{2k+2}}\right|\leq\dfrac{1}{(2n+3)^2 5^{2(n+2)}}$ une valeur approchée de $f(5)$ à 10^{-3} près s'obtient dès que $n=0$ soit $f(5)\approx\dfrac{\pi\ell n(5)}{10}+\dfrac{1}{25}\approx 0.545$.

1.7.

• La parité de la fonction g étant claire en effectuant dans l'expression $\dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x g(t)dt$ le changement de variable $t\mapsto -t$ on a pour tout x réel , $f(x)=\dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^{-x} -g(-t)dt$ $=\dfrac{1}{-x}\displaystyle\int_0^{-x} g(t)dt=f(-x)$, la fonction f est donc paire .

• Pour tout $t>0$ on a , d'après le théorème des accroissements finis , l'existence de $\xi\in]0,t[$ tel que $g(t)=\dfrac{arctan\ t-arctan\ 0}{t-0}=arctan^{'}\xi=\dfrac{1}{1+\xi^2}>\dfrac{1}{1+t^2}$ d'où par intégration pour tout $x>0$, $f(x)=\dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x g(t)dt>\dfrac{arctan\ x}{x}=g(x)$ et comme pour tout $x>0$ on a , $f^{'}(x)=\dfrac{g(x)-f(x)}{x}$ on voit que la fonction f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$.



Deuxième partie

Résolution d'une équation différentielle

2.1. $t \mapsto t^\alpha$ est solution de $(\mathcal{H})$ sur $I \Leftrightarrow \forall t \in I\ ,\ t^2\alpha(\alpha-1)t^{\alpha-2} + 3t\alpha t^{\alpha-1} + t^\alpha = 0$

$$\begin{aligned}&\Leftrightarrow \forall t \in I\ ,\ (\alpha^2+2\alpha+1)t^\alpha = 0\\ &\Leftrightarrow \alpha^2+2\alpha+1=0\\ &\Leftrightarrow \alpha = -1\ .\end{aligned}$$

2.2. Si on note $\varphi : t \mapsto \dfrac{1}{t}$ on a ,

$$\begin{aligned}\varphi\lambda \text{ solution de } (\mathcal{H}) &\Leftrightarrow x^2(\varphi^{''}\lambda + 2\varphi^{'}\lambda^{'} + \varphi\lambda^{''}) + 3x(\varphi^{'}\lambda + \varphi\lambda^{'}) + \lambda\varphi = 0\\ &\Leftrightarrow \underbrace{(x^2\varphi^{''} + 3x\varphi^{'} + \varphi)}_{=0}\lambda + (2x^2\varphi^{'} + 3x\varphi)\lambda^{'} + x^2\varphi\lambda^{''} = 0\\ &\Leftrightarrow x\lambda^{''} + \lambda^{'} = 0\\ &\Leftrightarrow (x\lambda^{'})^{'} = 0\end{aligned}$$

d'où comme I est un intervalle on a ,

$\varphi\lambda$ solution de $(\mathcal{H})$ sur $I \Leftrightarrow \exists K \in \mathbb{R}\ /\ \forall t \in I\ ,\ t\lambda^{'}(t) = K$

et on voit par exemple (pour $K=1$) que la fonction $\lambda : t \mapsto \ell n|t|$ convient .

2.3. L'équation différentielle $(\mathcal{H})$ étant de la forme $ay^{''} + by^{'} + cy = 0$ où les fonctions a , b et c sont continues sur l'intervalle I avec en plus a qui ne s'annule pas sur I , on sait d'aprés le cours que l'ensemble des solutions de $(\mathcal{H})$ sur I est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2 . Les solutions $t \mapsto \dfrac{1}{t}$ et $t \mapsto \dfrac{\ell n|t|}{t}$ étant clairement non proportionnelles elles forment un système fondamental de solutions de $(\mathcal{H})$ sur I : toute solution est de la forme $t \mapsto \dfrac{K_1 + K_2\ell n|t|}{t}\ ,\ K_1, K_2 \in \mathbb{R}$.

2.4. Si $(K_1, K_2) \neq (0,0)$ la fonction $t \mapsto \dfrac{K_1 + K_2\ell n|t|}{t}$ n'a pas de limite finie en 0 et par conséquent $(\mathcal{H})$ n'admet pas de solution sur $\mathbb{R}$ autre que la solution nulle .

2.5. $t \mapsto \dfrac{\lambda(t)}{t}$ est solution de $\mathcal{L}$ sur $I \Leftrightarrow \forall t \in I\ ,\ t\lambda^{''}(t) + \lambda^{'}(t) = \dfrac{1}{1+t^2}$

$$\Leftrightarrow \exists K \in \mathbb{R}\ /\ \forall t \in I\ ,\ t\lambda^{'}(t) = K + arctan\, t$$

et on voit par exemple (pour $K=0$) que $\lambda : x \mapsto \displaystyle\int_0^x \frac{arctan\, t}{t}dt$ convient .

2.6. On sait d'aprés le cours que l'ensemble des solutions de $(\mathcal{L})$ sur I est un espace affine de direction l'espace vectoriel des solutions de $(\mathcal{H})$ autrement dit si y_0 est une solution particulière de $(\mathcal{L})$ sur I alors toute solution de $(\mathcal{L})$ sur I est de la forme $y : x \mapsto y_0(x) + \dfrac{K_1 + K_2\ell n|x|}{x}\ ,\ K_1, K_2 \in \mathbb{R}$. Et comme , d'aprés **2.5.** , la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x \frac{arctan\, t}{t}dt$ est une solution particulière de $(\mathcal{L})$ sur I , on voit que toute solution de $(\mathcal{L})$ sur I est de la forme

$y : x \mapsto \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x \frac{arctan\, t}{t}dt + \frac{K_1 + K_2\ell n|x|}{x}\ ,\ K_1, K_2 \in \mathbb{R}$.

2.7.

Soit y une solution de $(\mathcal{L})$ telle qu'on ait dans un voisinage ouvert $]-r,r[$ de 0 , $y(x)=\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ alors on doit avoir pour tout $x\in]-r,r[$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)a_n x^n + 3\sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \frac{1}{1+x^2}$$

soit pour tout $x\in]-r,r[$, $\sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)^2 a_n x^n = \frac{1}{1+x^2}$

et comme $\forall x\in]-1,1[$, $\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^{2n}$ on doit avoir par unicité du développement en série entière $\forall n\in\mathbb{N}$, $\begin{cases} a_{2n} = \dfrac{(-1)^n}{(2n+1)^2} \\ a_{2n+1}=0 \end{cases}$.

Et comme on sait , d'après **1.3.2.** de la première partie de ce problème , que la série entière $\sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}x^{2n}$ est de rayon de convergence 1 on a nécessairement $r\leq 1$ et $\forall x\in]-r,r[$, $y(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}x^{2n}$ c'est à dire d'après **1.3.3.** ,

$\forall x\in]-r,r[$, $y(x)=f(x)=\frac{1}{x}\int_0^x \frac{arctan\ t}{t}dt$.

2.8.

Une solution y de $(\mathcal{L})$ sur $\mathbb{R}$ l'étant déjà sur I , est nécessairement de la forme $y : x\mapsto \underbrace{\frac{1}{x}\int_0^x \frac{arctan\ t}{t}dt}_{f(x)} + \frac{K_1+K_2\ell n|x|}{x}$, $K_1,K_2\in\mathbb{R}$ et comme elle se prolonge en 0 on a nécessairement $K_1=K_2=0$.

On conclut que l'unique solution de $(\mathcal{L})$ sur $\mathbb{R}$ est la fonction f étudiée dans la première partie de ce problème .

✠ FIN DU CORRIGÉ ✠