Corrigé Maths II TSI

CNC 2010

$\mathcal{ELHOR}$

1ère Partie

$\boxed{1.(a)}$ $v = (u - \lambda id_E)^2 = u^2 - 2\lambda u + \lambda^2 id_E$.

$\boxed{1.(b)}$ On a $x \in Ker\ w$ donc $w(x) = (u - \mu id_E)(x) = 0$ soit $u(x) = \mu.x$ d'où $u^2(x) = u(\mu.x) = \mu.u(x) = \mu^2.x$ et par suite $v(x) = \mu^2.x - 2\lambda\mu.x + \lambda^2.x = (\lambda - \mu)^2.x$.

$\boxed{1.(c)}$ Si $x \in Ker\ v \cap Ker\ w$ alors $v(x) = (\lambda - \mu)^2.x = 0$ et $\lambda \neq \mu$ donc $x = 0$,
et comme on a déjà $0 \in Ker\ v \cap Ker\ w$ on voit que $Ker\ v \cap Ker\ w = \{0\}$.

$\boxed{2.(a)}$ Soient e'_1 et e'_2 deux vecteurs propres de u associés respectivement aux valeurs propres distinctes μ et λ .
La famille (e'_1, e'_2) étant libre (résultat du cours) on complète en une base $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ de E .
La matrice de u dans $\mathcal{B}'$ est alors $\begin{pmatrix} \mu & 0 & \alpha \\ 0 & \lambda & \beta \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$ et en posant $e''_3 = e'_3 + \frac{\alpha}{\lambda-\mu} e'_1$ on a $\mathcal{B}'' = (e'_1, e'_2, e''_3)$ base de E
et $mat_{\mathcal{B}''}(u) = \begin{pmatrix} \mu & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & \beta \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$ d'où $mat_{\mathcal{B}''}(w) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda-\mu & \beta \\ 0 & 0 & \lambda-\mu \end{pmatrix}$
et $mat_{\mathcal{B}''}(v) = \begin{pmatrix} \mu-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\mu-\lambda)^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
on voit alors clairement que $Im\ v = Vect(e'_1) = Ker\ w$ et $Im\ w = Vect(e'_2, e''_3) = Ker\ v$.

$\boxed{2.(b)}$ $(X - \lambda)^2 = (X - \mu)(X - 2\lambda + \mu) + (\lambda - \mu)^2$
ce qui donne $(u - \lambda id_E)^2 = (u - \mu id_E)(u - (2\lambda - \mu)id_E) + (\lambda - \mu)^2 id_E$
et donc pour tout $x \in E$, $(\lambda - \mu)^2.x = v(x) + w((2\lambda - \mu).x - u(x))$
ou encore pour tout $x \in E$, $x = \underbrace{v\left(\frac{x}{(\lambda-\mu)^2}\right)}_{\in Ker\ w} + \underbrace{w\left(\frac{(2\lambda-\mu).x - u(x)}{(\lambda-\mu)^2}\right)}_{\in Ker\ v}$
et ceci , ajouté au résultat de $\boxed{1.(c)}$, donne $E = Ker\ v \bigoplus Ker\ w$.

$\boxed{2.(c)}$ On sait d'après le cours que $1 \leq dim(E_\mu) \leq m$ où m est l'ordre de multiplicité de μ dans χ_u
et comme μ est une racine simple de χ_u on voit que $dim(Ker\ w) = 1$ et par suite $dim(Ker\ v) = 3 - 1 = 2$.

$\boxed{3}$ D'après le cours une condition nécessaire et suffisante pour que u soit diagonalisable est :
- χ_u scindé sur $\mathbb{R}$ et ,
- pour toute valeur propre α de u la dimension de l'espace propre associé à α est égale à l'ordre de multiplicité de α dans χ_u .

Ceci dit on voit que : u $\mathcal{diagonalisable}$ $\Leftrightarrow$ $dim(E_\lambda) = 2$.

$\boxed{4}$ D'une part on a clairement $E_\lambda = Ker(u - \lambda id_E) \subset Ker((u - \lambda id_E)^2) = Kerv$
et d'une autre , u étant supposé non diagonalisable , on a $1 \leq dim(E_\lambda) < 2 = dim(Ker\ v)$
c'est à dire que E_λ est un sous - espace vectoriel strict (droite vectorielle) de $Ker\ v$.

$\boxed{5.(a)}$ On a $(u - \lambda id_E)(e_1) = (u - \lambda id_E)^2(e_2) = v(e_2) = 0$ et donc $u(e_1) = \lambda.e_1$ ($e_1 \in E_\lambda$) .
Comme $e_2 \notin E_\lambda$ on a $(u - \lambda id_E)(e_2) = e_1 \neq 0$ et par suite $E_\lambda = Vect(e_1)$ et $e_2 \notin Vect(e_1)$,
la famille (e_1, e_2) est donc libre et par suite base du plan vectoriel $Ker\ v$.

$\boxed{5.(b)}$ On a (e_1, e_2) base de $Ker\ v$, e_3 base de $Ker\ w$ et $E = Ker\ v \bigoplus Ker\ w$ donc (e_1, e_2, e_3) est une base de E ,
et il est clair que la matrice de u dans cette base est $\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix}$.

$\boxed{\text{6.(a)}}$ $\chi_f = \begin{vmatrix} -X & 1 & 1 \\ 1 & 2-X & -1 \\ -1 & 1 & 2-X \end{vmatrix}$, $C_1 \leftarrow C_1 + C_3$, $\chi_f = \begin{vmatrix} 1-X & 1 & 1 \\ 0 & 2-X & -1 \\ 1-X & 1 & 2-X \end{vmatrix} = (1-X) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2-X & -1 \\ 1 & 1 & 2-X \end{vmatrix}$

$L_3 \leftarrow L_3 - L_1$, $\chi_f = (1-X) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2-X & -1 \\ 0 & 0 & 1-X \end{vmatrix} = (1-X)^2(2-X)$.

$\boxed{\text{6.(b)}}$ Le système linéaire $\underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{A-I_3} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ se résoud à $x = z$, $y = 0$

d'où $E_1 = Ker(f - id_{\mathbb{R}^3}) = \mathbb{R}.(1,0,1) = \{(x,0,x) \ / \ x \in \mathbb{R}\}$.

Le système linéaire $\underbrace{\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{A-2I_3} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ se résoud à $x = y = z$

d'où $E_2 = Ker(f - 2id_{\mathbb{R}^3}) = \mathbb{R}.(1,1,1) = \{(x,x,x) \ / \ x \in \mathbb{R}\}$.

L'espace propre E_1 associé à la valeur propre double 1 n'étant pas de dimension 2 , l'endomorphisme f n'est pas diagonalisable .

$\boxed{\text{6.(c)}}$ $(A - I_3)^2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Le système linéaire $\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}}_{(A-I_3)^2} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ se résoud à $x + y - z = 0$ équation d'un plan vectoriel de $\mathbb{R}^3$,

on en déduit que $dim \ Ker(f - id_{\mathbb{R}^3})^2 = 2$.

$\boxed{\text{6.(d).i}}$ Le vecteur propre cherché ne pouvant appartenir à E_1 on a $e_3 \in E_2$ et donc $e_3 = (1,1,1)$,
et comme on a clairement $e_2 = (1,-1,0) \in Ker(f - id_{\mathbb{R}^3})^2 - E_1$ le résultat de la question $\boxed{\text{5.(b)}}$ s'applique :
(e_1, e_2, e_3) est une base de $\mathbb{R}^3$.

$\boxed{\text{6.(d).ii}}$ D'après $\boxed{\text{5.(b)}}$ on a $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

La relation $e_1 = (f - id_{\mathbb{R}^3})(e_2) = (x,y,z)$ s'écrit matriciellement $\underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{A-I_3} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

ce qui donne $e_1 = (-2, 0, -2)$ d'où la matrice de passage $P = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

la formule de changement de base donne alors $A = PBP^{-1}$.

$\boxed{\text{6.(d).iii}}$ On montre facilement par récurrence que $B^n = \begin{pmatrix} 1 & n & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

En exprimant x , y et z en fonction de x' , y' et z' dans le système $P \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ on trouve $P^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$

d'où pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = PB^nP^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & n & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$

tout calcul fait on trouve $A^n = \begin{pmatrix} 2^n - 2n & 2^n - 1 & -2^n + 2n + 1 \\ 2^n - 1 & 2^n & -2^n + 1 \\ 2^n - 2n - 1 & 2^n - 1 & -2^n + 2n + 2 \end{pmatrix}$.

2ème Partie

$\boxed{1}$ En écrivant $M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{pmatrix}$ on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\begin{cases} a_{n+1} = m_{11}a_n + m_{12}b_n + m_{13}c_n \\ b_{n+1} = m_{21}a_n + m_{22}b_n + m_{23}c_n \\ c_{n+1} = m_{31}a_n + m_{32}b_n + m_{33}c_n \end{cases}$.

$\boxed{2}$ Si ${}^tMV = \lambda V$ alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $v_{n+1} = {}^t X_{n+1}V = {}^t (MX_n)V = {}^t X_n^t MV = \lambda^t X_n V = \lambda v_n$,
la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc géométrique de raison λ .

$\boxed{3.(a)}$ On a clairement $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $M = \begin{pmatrix} 4 & -15 & 3 \\ 1 & -4 & 1 \\ 2 & -10 & 3 \end{pmatrix}$.

$\boxed{3.(b)}$ $\chi_{{}^tM}(\lambda) = det({}^tM - \lambda I_3) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 1 & 2 \\ -15 & -4-\lambda & -10 \\ 3 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix}$, $C_1 \leftarrow C_1 - C_2 - C_3$, $\chi_{{}^tM}(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 2 \\ -1+\lambda & -4-\lambda & -10 \\ -1+\lambda & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix}$

$\chi_{{}^tM}(\lambda) = (1-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & -4-\lambda & -10 \\ -1 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix}$, $L_2 \leftarrow L_2 + L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 + L_1$, $\chi_{{}^tM}(\lambda) = (1-\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -3-\lambda & -8 \\ 0 & 2 & 5-\lambda \end{vmatrix}$

$\chi_{{}^tM}(\lambda) = (1-\lambda)^3$: 1 est valeur propre triple de ${}^tM$.

Le système linéaire $\underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -15 & -5 & -10 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}}_{{}^tM - I_3} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ se résoud à $3x + y + 2z = 0$,

le sous-espace propre de ${}^tM$ associé à la valeur propre triple 1 est le plan vectoriel de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ d'équation $3x + y + 2z = 0$.

$\boxed{3.(c)}$ En chosissant par exemple $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $V_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ on sait que les deux suies associées $(v_n^1)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n^2)_{n\in\mathbb{N}}$ sont toutes les deux géométriques de raison 1 donc constantes et on peut écrire pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$\begin{cases} v_n^1 = {}^t X_n V_1 = a_n - 3b_n = a_0 - 3b_0 = 1 \\ v_n^2 = {}^t X_n V_2 = -2b_n + c_n = -2b_0 + c_0 = 0 \end{cases}$ ce qui donne pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\begin{cases} a_n = 3b_n + 1 \\ c_n = 2b_n \end{cases}$

et comme pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $b_{n+1} = a_n - 4b_n + c_n$ on voit que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $b_{n+1} = b_n + 1$

la suite (b_n) est donc arithmétique de raison 1 et de premier terme $b_0 = 0$ ce qui donne $b_n = n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

et par suite $a_n = 3n + 1$ et $c_n = 2n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3ème Partie

$\boxed{1.(a)}$ $\chi_f(\lambda) = \begin{vmatrix} -2-\lambda & 5 & 2 \\ -1 & 4-\lambda & 2 \\ 2 & -10 & -5-\lambda \end{vmatrix}$, $L_1 \leftarrow L_1 - L_2$, $\chi_f(\lambda) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 1+\lambda & 0 \\ -1 & 4-\lambda & 2 \\ 2 & -10 & -5-\lambda \end{vmatrix}$

$\chi_f(\lambda) = -(1+\lambda)\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 4-\lambda & 2 \\ 2 & -10 & -5-\lambda \end{vmatrix}$, $C_2 \leftarrow C_2 + C_1$, $\chi_f(\lambda) = -(1+\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3-\lambda & 2 \\ 2 & -8 & -5-\lambda \end{vmatrix} = -(1+\lambda)^3$

l'unique valeur propre de f est $\alpha = -1$.

$\boxed{1.(b)}$ Le système linéaire $\underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 5 & 2 \\ -1 & 5 & 2 \\ 2 & -10 & -4 \end{pmatrix}}_{A+I_3} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ se résoud à $x - 5y - 2z = 0$,

l'espace propre de f associé à la valeur propre $\alpha = -1$ est le plan vectoriel de $\mathbb{R}^3$ d'équation $x - 5y - 2z = 0$.

$\boxed{1.(c)}$ Cet espace propre n'étant pas de dimension 3 l'endomorphisme f n'est pas diagonalisable .

$\boxed{1.(d).i}$ La relation vectorielle $u_2 = (f + id_{\mathbb{R}^3})(e_1) = (x, y, z)$ s'écrit matriciellement $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 5 & 2 \\ -1 & 5 & 2 \\ 2 & -10 & -4 \end{pmatrix}}_{A+I_3} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

donc $(x, y, z) = (-1, -1, 2)$ et comme $x - 5y - 2z = -1 + 5 - 4 = 0$ on a $u_2 \in Ker(f + id_{\mathbb{R}^3})$
et il en est de même pour $u_3 = 2e_1 + e_3 = (2, 0, 1)$.

$\boxed{1.(d).ii}$ On a $det_{\mathcal{B}}(u_1, u_2, u_3) = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$ donc $\mathcal{B}_1 = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

$\boxed{2.(a)}$ On a $u_2 = (f + id_{\mathbb{R}^3})(u_1)$ donc $f(u_1) = u_2 - u_1$ d'où $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

$\boxed{\text{2.(b)}}$ On a clairement $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ et en écrivant x, y et z en fonction de x', y' et z' dans le système $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ on trouve $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -5 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

$\boxed{\text{2.(c)}}$ La formule de changement de base donne $A = PBP^{-1}$.

$\boxed{\text{3.(a)}}$ On a clairement $J = I + B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = E_{21}$ et donc $J^2 = 0$.

$\boxed{\text{3.(a)}}$ On a $B = J - I$ et la formule du binôme donne pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $B^k = \sum_{i=0}^{k} C_k^i J^i (-I)^{k-i}$ et comme $J^i = 0$ dès que $i \geq 2$ on a $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $B^k = (-I)^k + kJ(-I)^{k-1} = (-1)^k (I - kJ)$.

$\boxed{\text{3.(b)}}$ On a donc pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $B^k = (-1)^k \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -k & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (valable aussi pour $k = 0$)

d'où pour tout $k \in \mathbb{N}$, $A^k = PB^kP^{-1} = (-1)^k \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -k & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -5 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

soit pour tout $k \in \mathbb{N}$, $A^k = (-1)^k \begin{pmatrix} k+1 & -5k & -2k \\ k & -5k+1 & -2k \\ -2k & 10k & 4k+1 \end{pmatrix}$.

$\boxed{\text{4.(a)}}$ Le système (S) s'écrit matriciellement : $\forall t \in \mathbb{R}$, $\begin{pmatrix} u'(t) \\ v'(t) \\ w'(t) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -2 & 5 & 2 \\ -1 & 4 & 2 \\ 2 & -10 & -5 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \\ w(t) \end{pmatrix}$

et vectoriellement : $\forall t \in \mathbb{R}$, $(u'(t), v'(t), w'(t)) = f\left((u(t), v(t), w(t)\right)$

c'est à dire que (S) est équivalent à l'équation différentielle : (E) $\varphi'(t) = f\left(\varphi(t)\right)$.

$\boxed{\text{4.(b)}}$ $x(t), y(t)$ et $z(t)$ étant les coordonnées du vecteur $\varphi(t)$ dans la base (u_1, u_2, u_3) la formule de changement de base donne $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \\ w(t) \end{pmatrix}$ d'où par dérivation $\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} u'(t) \\ v'(t) \\ w'(t) \end{pmatrix} = P^{-1}A \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \\ w(t) \end{pmatrix}$

d'où $\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix} = P^{-1}AP \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$ c'est à dire $\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$

ce qui montre que l'équation différentielle (E) est équivalente au système : (S') $\left\{ \begin{array}{l} x'(t) = -x(t) \\ y'(t) = x(t) - y(t) \\ z'(t) = -z(t) \end{array} \right.$.

$\boxed{\text{4.(c)}}$ On a $\begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \\ z(0) \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} u(0) \\ v(0) \\ w(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -5 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$\boxed{\text{4.(d)}}$ On a pour tout réel t , $x'(t) = -x(t)$ et $z'(t) = -z(t)$ donc $\forall t \in \mathbb{R}$, $x(t) = x(0)e^{-t}$, $z(t) = z(0)e^{-t}$ c'est à dire $\forall t \in \mathbb{R}$, $x(t) = -2e^{-t}$, $z(t) = e^{-t}$ d'où $\forall t \in \mathbb{R}$, $\left(y'(t) + y(t)\right) e^t = -2$ et par intégration $\forall t \in \mathbb{R}$, $y(t)e^t = -2t + y(0)$ c'est à dire $\forall t \in \mathbb{R}$, $y(t) = -2te^{-t}$.

$\boxed{\text{4.(e)}}$ On a $\begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \\ w(t) \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2e^{-t} \\ -2te^{-t} \\ e^{-t} \end{pmatrix}$ d'où la solution $(u(t), v(t), w(t))$ de (S)

satisfaisant aux conditions initiales $u(0) = v(0) = 0$ et $w(0) = 1$: $\left\{ \begin{array}{l} u(t) = 2te^{-t} \\ v(t) = 2te^{-t} \\ w(t) = (1 - 4t)e^{-t} \end{array} \right.$.

FIN DU CORRIGE