L'énoncé de cette épreuve, particulière aux candidats de la filière TSI,
comporte 3 pages.
L'usage de la calculatrice est interdit .

Les candidats sont informés que la qualité de la rédaction et de la présentation, la clarté et la précision des raisonnements constitueront des éléments importants pour l'appréciation des copies. Il convient en particulier de rappeler avec précision les références *des questions abordées.*

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Notations

Pour tout $(p, q) \in \mathbb{N}^{*2}$, on note $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices à coefficients réels, à p lignes et q colonnes ; si $M \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, ${}^{t}M$ désigne la matrice transposée de M et $\mathrm{rg}\,(M)$ son rang.

Pour tout entier naturel k, $\mathcal{P}_k$ désigne l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels et de degré $\leqslant k$.

Dans ce problème, n désigne un entier naturel non nul et $x_0, x_1, \ldots, x_n$ des réels **deux à deux distincts** ; on note π le polynôme $\pi = (X - x_0)(X - x_1) \cdots (X - x_n)$.

Enfin, pour tout entier naturel m, on définit l'application

$$f_m : \begin{array}{ccc} \mathcal{P}_m & \longrightarrow & \mathbb{R}^{n+1} \\ P & \longmapsto & \big(P(x_0), \ldots, P(x_n)\big) \end{array}$$

1ère Partie : Étude de l'application f_m

Sot m un entier naturel.

1. Si $R \in \mathcal{P}_n$ est tel que pour tout $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$, $R(x_i) = 0$, montrer que R est le polynôme nul.

2. Vérifier que f_m est une application linéaire.

3. Dans cette question, on suppose que $m \geqslant n + 1$.

   (a) Montrer que $\mathrm{Ker}\, f_m = \{Q\pi \ ; \ \ Q \in \mathcal{P}_{m-n-1}\}$; on pourra effectuer une division euclidienne.

   (b) Montrer que les sous-espaces vectoriels $\mathrm{Ker}\, f_m$ et $\mathcal{P}_n$ sont supplémentaires dans $\mathcal{P}_m$.

   (c) En déduire la dimension de $\mathrm{Ker}\, f_m$ puis en donner une base.

   (d) Déterminer le rang de f_m ; l'application f_m est-elle surjective ?

4. Dans cette question, on suppose que $m \leqslant n$.

   (a) Montrer que f_m est injective.

   (b) Quel est le noyau de f_m ? Quel est son rang ?

   (c) À quelle condition sur les entiers n et m l'application f_m est-elle surjective ?

5. On définit les polynômes $L_0, L_1, \ldots, L_n$ par $L_i = \displaystyle\prod_{\substack{0 \leqslant j \leqslant n \\ j \neq i}} \frac{(X - x_j)}{(x_i - x_j)}$, $i \in \{0, 1, \ldots, n\}$.

(a) Pour $i \in \{0,1,\ldots,n\}$, quel est le degré de L_i ? Vérifier que pour tout $k \in \{0,1,\ldots,n\}$, $L_i(x_k) = \delta_{i,k}$ avec $\delta_{i,k} = 1$ si $i = k$ et 0 sinon.

(b) Calculer $f_n(L_i)$, $i \in \{0,1,\ldots,n\}$. Que représente la famille $\big(f_n(L_0), f_n(L_1), \ldots, f_n(L_n)\big)$ pour l'espace vectoriel $\mathbb{R}^{n+1}$?

(c) Montrer que la famille $(L_0, L_1, \ldots, L_n)$ est une base de $\mathcal{P}_n$.

(d) Soit $y = (y_0, y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$.

i. Montrer qu'il existe un unique polynôme $P_y \in \mathcal{P}_n$ tel que $f_n(P_y) = (y_0, y_1, \ldots, y_n)$.

ii. Exprimer le polynôme P_y en fonction de $L_0, L_1, \ldots, L_n$ et $y_0, y_1, \ldots, y_n$.

2ème Partie : Approximation polynômiale au sens des moindres carrés

On considère des réels $y_0, y_1, \ldots, y_n$ qui sont respectivement les images des réels $x_0, x_1, \ldots, x_n$ par une fonction φ, et on cherche à déterminer les polynômes $P \in \mathcal{P}_m$ tels que la quantité

$$\Phi_m(P) := \sum_{i=0}^{n} \big(y_i - P(x_i)\big)^2$$

soit minimale, et à préciser la valeur minimale λ_m de ladite quantité.

On parle alors d'approximation polynômiale au sens des moindres carrés de la fonction φ aux points $x_0, x_1, \ldots, x_n$; ce type d'approximation est particulièrement utilisé dans les problèmes d'optimisation et de contrôle de qualité.

A. Étude dans le cas $m \geqslant n+1$

1. Donner un polynôme $Q_0 \in \mathcal{P}_m$ tel que $f_m(Q_0) = (y_0, y_1, \ldots, y_n)$. Que vaut $\Phi_m(Q_0)$?

2. En déduire la valeur minimale λ_m de $\Phi_m(P)$ lorsque P décrit $\mathcal{P}_m$, et préciser à l'aide de Q_0 et $\operatorname{Ker} f_m$ l'ensemble des polynômes en lesquels cette valeur minimale est atteinte.

B. Étude dans le cas $m \leqslant n$

Dans cette section, on pose

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & \cdots & x_0^m \\ 1 & x_1 & \cdots & x_1^m \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^m \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+1,m+1}(\mathbb{R}), \quad b = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+1,1}(\mathbb{R}).$$

1. Montrer que si $M, N \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ alors ${}^t(M+N) = {}^tM + {}^tN$ et que, si $M' \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ et $N' \in \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{R})$, alors ${}^t(M'N') = {}^tN'\,{}^tM'$; p, q et r étant des entiers naturels non nuls.

2. Soit $v = \begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m+1,1}(\mathbb{R})$; on lui associe le polynôme $P_v \in \mathcal{P}_m$ défini par $P_v(x) = \sum_{k=0}^{m} v_k x^k$.

(a) Calculer le produit Av et l'exprimer à l'aide des valeurs prises par P_v aux points $x_0, x_1, \ldots, x_n$.

(b) Montrer alors que si $Av = 0$ alors $v = 0$.

3. Soit $u = \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+1,1}(\mathbb{R})$; calculer le produit scalaire ${}^t uu$ en fonction de $u_0, u_1, \ldots, u_n$ puis en déduire que ${}^t uu \geqslant 0$ et que ${}^t uu = 0$ si et seulement si $u = 0$.

4. (a) Soit $v = \begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \\ \vdots \\ v_m \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{m+1,1}(\mathbb{R})$ tel que ${}^t AAv = 0$; on pose $u = Av$. Calculer ${}^t uu$, en déduire que $Av = 0$ puis que $v = 0$.
   (b) Déterminer le rang de la matrice ${}^t AA$ et justifier qu'elle est inversible.
   (c) Expliciter les coefficients de la matrice ${}^t AA$ en fonction de $x_0, x_1, \ldots, x_n$.

5. On pose $M = {}^t AA$ et $c = {}^t Ab$; justifier que le système linéaire $MZ = c$, d'inconnue Z, admet une unique solution qu'on exprimera en fonction de M^{-1} et c.

   Dans la suite, cette solution se notera w, on lui associe le polynôme P_w défini comme à la question 2. précédente.

6. Pour tout $v \in \mathcal{M}_{m+1,1}(\mathbb{R})$, on pose $g(v) = {}^t(b - Av)(b - Av)$.
   (a) Montrer que pour tout $v \in \mathcal{M}_{m+1,1}(\mathbb{R})$, $g(v) = {}^t bb - {}^t bAv - {}^t v\, {}^t Ab + {}^t v\, {}^t AAv$ et que $g(w) = {}^t bb - {}^t bAw$; on rappelle que ${}^t AAw = {}^t Ab$.
   (b) Montrer que pour tout $v \in \mathcal{M}_{m+1,1}(\mathbb{R})$, $g(v) - g(w) = {}^t(w - v)\, {}^t AA(w - v)$.
   (c) En déduire que pour tout $v \in \mathcal{M}_{m+1,1}(\mathbb{R})$, $g(v) \geqslant g(w)$ et que $g(v) = g(w)$ si et seulement si $v = w$. On pourra utiliser les questions 2.(b) et 3. précédentes.

7. On muni $\mathcal{M}_{n+1,1}(\mathbb{R})$ de son produit scalaire canonique noté $< .,. >$; montrer que Aw est la projection orthogonale de b sur le sous-espace vectoriel $F := \{Av \;;\; v \in \mathcal{M}_{m+1,1}(\mathbb{R})\}$. Que représente $g(w)$?

8. Soit $P = \sum_{k=0}^{m} a_k X^k \in \mathcal{P}_m$, on pose $V_P = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}$. Calculer les composantes du vecteur $b - AV_P$ et en déduire que $\Phi_m(P) = g(V_P)$.

9. (a) Déduire de ce qui précède que pour tout $P \in \mathcal{P}_m$, $\Phi_m(P) \geqslant \Phi_m(P_w)$ avec égalité si et seulement si $P = P_w$.
   (b) Que vaut λ_m ?

10. **Application**

    On prend $n = 3, m = 2, x_0 = -1, x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 2, y_0 = 1, y_1 = 2, y_2 = 1$ et $y_3 = 0$
   (a) Calculer les matrices A et ${}^t AA$.
   (b) Calculer le vecteur ${}^t Ab$.
   (c) Résoudre le système linéaire ${}^t AAZ = {}^t Ab$, d'inconnue Z, par la méthode du pivot de Gauss.
   (d) Quel est le polynôme P_0 de degré $\leqslant 2$ qui minimise Φ_2 sur $\mathcal{P}_2$? Que vaut λ_2 ? Tracer le graphe de la fonction $t \longmapsto P_0(t)$ et représenter les points (x_i, y_i) sur le même graphique.

FIN DE L'ÉPREUVE