ROYAUME DU MAROC

Ministère de l'Éducation Nationale, de l'Enseignement
Supérieur, de la Formation des Cadres
et de la Recherche Scientifique

Présidence du Concours National Commun 2008
École Nationale de l'Industrie Minérale
ENIM

Concours National Commun d'Admission aux Grandes Écoles d'Ingénieurs ou Assimilées

Session 2008

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES I

Durée 4 heures

Filière **TSI**

Cette épreuve comporte 3 pages au format A4, en plus de cette page de garde
L'usage de la calculatrice est *autorisé*

L'énoncé de cette épreuve, particulière aux candidats de la filière TSI,
comporte 3 pages.
L'usage de la calculatrice est autorisé .

Les candidats sont informés que la qualité de la rédaction et de la présentation, la clarté et la précision des raisonnements constitueront des éléments importants pour l'appréciation des copies. Il convient en particulier de rappeler avec précision les références *des questions abordées.*

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Définitions et notations

Dans ce problème, $\mathbb{R}$ désigne l'ensemble des nombres réels. Par "solution d'une équation différentielle", on fait référence *aux solutions à valeurs réelles définies sur* $\mathbb{R}$.

Les trois parties du problème sont largement indépendantes ; seul le résultat de la question 2 de la première partie est utile pour la suite.

I. Résultats préliminaires

1. Soit $h:\ \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue telle que, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $h(x+y) = h(x) + h(y)$; on pose
$$H(x) = \int_0^x h(t)\,dt, \quad x \in \mathbb{R}.$$
   (a) Montrer que, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\displaystyle\int_0^y h(x+t)\,dt = yh(x) + H(y)$.
   (b) En déduire que , pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, $H(x+y) - H(x) - H(y) = yh(x)$.
   (c) Exprimer de même la quantité $xh(y),\ (x,y) \in \mathbb{R}^2$.
   (d) Justifier alors que, pour tout réel x, $h(x) = xh(1)$

2. Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $x_0 \in I$ et $f:\ I \longrightarrow \mathbb{R}$ continue ; pour tout $x \in I$ on pose
$$F(x) = \int_{x_0}^x f(t)\,dt.$$
   (a) Justifier que F est dérivable sur I et préciser sa dérivée.
   (b) Soit J un intervalle de $\mathbb{R}$, et soient $u:\ J \longrightarrow \mathbb{R}$, $v:\ J \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables à valeurs dans I. On pose
$$F_1(x) = \int_{x_0}^{v(x)} f(t)\,dt \quad \text{et} \quad F_2(x) = \int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\,dt,\ x \in J.$$
      i. Montrer que F_1 est dérivable sur J et préciser sa dérivée.
      ii. En déduire que F_2 est dérivable sur J et préciser sa dérivée.
      iii. Si de plus u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$, justifier que F_1 et F_2 le sont aussi.

3. **Application**

   Soit $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue et soit (a, b) un couple de réels avec $a < b$. En effectuant un changement de variable, montrer que l'application $G : x \longmapsto \displaystyle\int_a^b g(x+t)\cos t\, dt$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et que, pour tout réel x,

$$G'(x) = g(b+x)\cos b - g(a+x)\cos a + \int_a^b g(x+t)\sin t\, dt.$$

II. Étude d'une équation fonctionnelle

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue telle que

$$\forall\, (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x)f(y) = \int_{x-y}^{x+y} f(t)\, dt. \tag{1}$$

On suppose de plus que f n'est pas la fonction nulle et on considère un réel a tel que $f(a) \neq 0$.

1. Justifier que $f(0) = 0$.
2. (a) Vérifier que, pour tout réel x, $f(x) = \dfrac{1}{f(a)} \displaystyle\int_{x-a}^{x+a} f(t)\, dt$.
   (b) Montrer alors que f est dérivable et calculer sa dérivée.
   (c) En déduire que f est de classe $\mathcal{C}^2$.
3. Montrer que, pour tout couple (x, y) de réels,

$$f'(x)f(y) = f(x+y) - f(x-y) \quad \text{et} \quad f(x)f'(y) = f(x+y) + f(x-y).$$

4. On pose $\lambda = -\frac{f''(a)}{f(a)}$; déduire de ce qui précède que f est solution de l'équation différentielle

$$z'' + \lambda z = 0. \tag{$\mathcal{E}_\lambda$}$$

5. **Étude de l'équation différentielle** $(\mathcal{E}_\lambda)$
   (a) On suppose que $\lambda > 0$ et on pose $\mu = \sqrt{\lambda}$.
      i. Donner la dimension et une base de l'espace vectoriel des solutions de l'équation différentielle $(\mathcal{E}_\lambda)$.
      ii. En déduire que dans ce cas, il existe un réel non nul A tel que $f(x) = A\sin(\mu x),\ x\in\mathbb{R}$, puis justifier que $A = \frac{2}{\mu}$.
   (b) On suppose que $\lambda < 0$ et on pose $\mu = \sqrt{-\lambda}$.
      i. Donner de même une base de l'espace vectoriel des solutions de l'équation différentielle $(\mathcal{E}_\lambda)$.
      ii. En déduire que dans ce cas, il existe un réel non nul A' tel que $f(x) = A'\,\mathrm{sh}(\mu x),\ x\in\mathbb{R}$, puis justifier que $A' = \frac{2}{\mu}$.
   (c) Si $\lambda = 0$ montrer que, pour tout réel x, $f(x) = 2x$.
6. Vérifier que les fonctions trouvées ci-dessus vérifient bien l'équation fonctionnelle (1).

III. Étude d'une fonction

On considère la fonction f définie par $f(x) = \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln t}$, où $\ln$ désigne le logarithme népérien.

1. Justifier que si $x > 0$ et différent de 1 alors x et x^2 sont d'un même côté de 1 sur la droite réelle.
2. En déduire que le domaine de définition de la fonction f, noté D_f, est égal à $]0, 1[\cup]1, +\infty[$.
3. Justifier que la fonction f est dérivable en tout point de son domaine de définition et exprimer sa dérivée en tout point de D_f.
4. (a) Écrire le développement limité à l'ordre 2 de la fonction $\ln$ au voisinage de 1.

   (b) Justifier alors que $\dfrac{1}{\ln x} = \dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{2} + \underset{x\to 1}{\circ}(1)$.

   (c) En déduire que les fonctions f' et $x \longmapsto \dfrac{1}{\ln x} - \dfrac{1}{x-1}$ possèdent des limites finies en 1 à préciser.
5. **Étude de f au voisinage de 1**

   (a) Justifier qu'il existe $\alpha \in]0, 1[$ tel que , pour tout $x \in]1-\alpha, 1+\alpha[\setminus\{1\}$, $\left|\dfrac{1}{\ln x} - \dfrac{1}{x-1}\right| \leqslant 3/2$.

   (b) En déduire que, pour tout $x \in]1-\alpha, 1+\alpha[\setminus\{1\}$, $\big|f(x) - \ln(1+x)\big| \leqslant \dfrac{3|x^2-x|}{2}$ puis trouver la limite de f en 1.

   (c) On prolonge f par continuité en 1 et on note encore f la fonction ainsi obtenue. Montrer que cette fonction est dérivable en 1 et préciser sa dérivée. On énoncera le théorème utilisé.
6. **Étude de f au voisinage de 0**

   (a) Montrer que, pour tout $x \in]0, 1[$, $0 \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{-x}{\ln x}$ et en déduire que f est prolongeable par continuité à droite en 0.

   (b) On note encore f la fonction ainsi prolongée en 0. Préciser $f(0)$ et montrer que f est dérivable à droite en 0 ; quelle est la valeur de $f'(0)$?
7. **Étude de f au voisinage de $+\infty$**

   Montrer qu'au voisinage de $+\infty$, la courbe représentative de f présente une branche parabolique de direction asymptotique l'axe des y.
8. Dresser le tableau de variations de f sur $[0, +\infty[$.
9. Montrer que la dérivée de f est strictement croissante sur $[0, +\infty[$.
10. Tracer la courbe représentative de f (unité 2 cm).
11. **Calcul d'une intégrale**

    (a) Montrer soigneusement que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{t-1}{\ln t}\,dt$ est convergente.

    (b) Montrer que, pour tout couple (x, y) d'éléments de l'intervalle $]0, 1[$, $\displaystyle\int_{y^2}^{x^2} \frac{dt}{\ln t} = \int_y^x \frac{u}{\ln u}\,du$ et en déduire que $\displaystyle f(x) - f(y) = \int_x^y \frac{1-t}{\ln t}\,dt$.

    (c) En déduire la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{t-1}{\ln t}\,dt$.

FIN DE L'ÉPREUVE