ROYAUME DU MAROC

Ministère de l'Éducation Nationale, de l'Enseignement
Supérieur, de la Formation des Cadres
et de la Recherche Scientifique

Présidence du Concours National Commun 2007
École Nationale Supérieure d'Électricité et de Mécanique
ENSEM

Concours National Commun d'Admission aux Grandes Écoles d'Ingénieurs ou Assimilées

Session 2007

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES II

Durée 4 heures

Filière **TSI**

Cette épreuve comporte 3 pages au format A4, en plus de cette page de garde
L'usage de la calculatrice est *interdit*

L'énoncé de cette épreuve, particulière aux candidats de la filière TSI,
comporte 3 pages.
L'usage de la calculatrice est interdit .

Les candidats sont informés que la qualité de la rédaction et de la présentation, la clarté et la précision des raisonnements constitueront des éléments importants pour l'appréciation des copies. Il convient en particulier de rappeler avec précision les $\boxed{\text{références}}$ *des questions abordées.*

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

PREMIER PROBLÈME

Dans tout le problème, $\mathbb{R}$ désigne le corps des réels et n un entier naturel supérieur ou égal à 2. Si $p \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices à coefficients réels, à n lignes et p colonnes ; pour toute matrice A de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, ${}^tA$ désigne la matrice transposée de A.

Si $p = n$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ est noté simplement $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, c'est l'algèbre des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels ; la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est notée I_n.

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note $C_1(A), \dots, C_n(A)$ les colonnes de A, ce sont des éléments de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$; par définition, le rang de la matrice A est la dimension du sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ engendré par les vecteurs $C_1(A), \dots, C_n(A)$. Le rang de A se note $\mathrm{rg}(A)$, on note aussi $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(A)$ l'ensemble des valeurs propres de A appartenant à $\mathbb{R}$ et $\mathrm{Tr}(A)$ sa trace.

Si $\alpha_1, \alpha_2, \dots,$ et α_n sont des réels, on note $\mathrm{diag}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ la matrice diagonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui admet pour coefficients diagonaux les réels $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ pris dans cet ordre.

1ère Partie

1. Discuter le rang de la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ selon les valeurs de $a,\ b,\ c$ et d.

2. Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
   (a) Montrer que $\mathrm{rg}(A) = 0$ si et seulement si pour tout couple (i, j) d'éléments de $\{1, \dots, n\},\ a_{i,j} = 0$. En particulier, si A n'est la matrice nulle alors $\mathrm{rg}(A) \geqslant 1$.
   (b) Montrer que A est inversible si et seulement si $\mathrm{rg}(A) = n$.

3. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$; on désigne par f_A l'endomorphisme de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A. Montrer que
$$\mathrm{rg}(A) = \dim(\mathrm{Im}\, f_A).$$

4. Soient U et V deux éléments non nuls de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$; on note $u_1, \dots, u_n$ les composantes de U et $v_1, \dots, v_n$ celles de V. On pose $A = U{}^tV$.
   (a) Exprimer les coefficients de la matrice A à l'aide des u_k et des v_k.
   (b) Que vaut la trace de A ?
   (c) Exprimer les colonnes de A à l'aide de $v_1, \dots, v_n$ et U.
   (d) On suppose que $U \neq 0$ et $V \neq 0$; montrer que le rang de A est égal à 1.

5. On considère ici une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de rang 1.
   (a) Montrer qu'il existe $i_0 \in \{1, \dots, n\}$ tel que $C_{i_0}(A) \neq 0$.
   (b) Justifier que pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$, il existe un réel λ_j tel que $C_j(A) = \lambda_j C_{i_0}(A)$.

(c) En déduire que $A = X^tY$ où $X = C_{i_0}(A)$ et Y est un élément non nuls de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ à préciser.

(d) On suppose que $A = X_0\,{}^tY_0$; Trouver tous les couples (X_1, Y_1) d'éléments de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ tels que $A = X_1\,{}^tY_1$.

6. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice de rang $r > 0$; montrer que A peut s'écrire comme somme de r matrices de rang 1.

7. (a) Soient $(Y_1, \ldots, Y_p)$ une famille libre de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, et $Z_1, \ldots, Z_p$ des vecteurs arbitraires de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Montrer que l'égalité $\sum_{i=1}^{p} Y_i^t Z_i = 0$ a lieu si et seulement si les vecteurs $Z_1, \ldots, Z_p$ sont tous nuls.

   (b) En déduire que si $(X_1, \ldots, X_n)$ et $(Y_1, \ldots, Y_n)$ sont deux bases de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ alors la famille $(X_i\,{}^tY_j)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ est une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ formée de matrices de rang 1.

8. (a) Montrer que l'application $<,>$: $(M, N) \mapsto \mathrm{Tr}({}^tMN)$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

   (b) À quelle condition sur les vecteurs X, X', Y, Y' de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, les matrices X^tY et X'^tY' sont-elle orthogonales dans $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), <,>)$?

   (c) En déduire une méthode de construction de familles orthonormées, de l'espace euclidien $(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), <,>)$, de la forme $(X_i^tY_j)_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$.

2ème Partie

Soit $A = U^tV$ une matrice de rang 1, où U et V sont deux éléments non nuls de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On pose $\alpha = {}^tVU$ et $W = ({}^tVV)U$.

1. Calculer A^2 en fonction du réel α et de A.

2. À quelle condition nécessaire et suffisante sur α la matrice A est-elle nilpotente ?

3. On suppose que A n'est pas nilpotente ; montrer qu'il existe λ, réel non nul, tel que la matrice λA soit celle d'un projecteur.

4. (a) Justifier que 0 est valeur propre de A et montrer que le sous-espace propre associé n'est rien d'autre que $\{Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ {}^tVY = 0\}$. Quelle est sa dimension ?

   (b) On suppose que $\alpha \neq 0$; calculer le produit AU et en déduire que α est une autre valeur propre de A. Déterminer le sous-espace propre associé et donner sa dimension.

   (c) Préciser selon les valeurs de α le nombre de valeurs propres de A.

5. Montrer que si $\alpha \neq 0$, alors la matrice A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

   Justifier alors, dans ce cas, que A est semblable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ à la matrice $\mathrm{diag}(0, \ldots, 0, \alpha)$.

6. On suppose que $\alpha = 0$ et on désigne par f l'endomorphisme de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ canoniquement associé à A.

   (a) A est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?

   (b) Montrer que $U \in \mathrm{Ker}\, f$ et justifier l'existence d'une base de $\mathrm{Ker}\, f$ de la forme $(E_1, \ldots, E_{n-2}, W)$.

   (c) Montrer que $(E_1, \ldots, E_{n-2}, W, V)$ est une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et écrire la matrice de f dans cette base.

   (d) En déduire que deux matrices de rang 1 et de trace nulle sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

DEUXIÈME PROBLÈME

Le théorème de d'Alembert-Gauss appelé aussi théorème fondamental de l'algèbre affirme que "*tout polynôme non constant à coefficients complexes admet au moins une racine complexe*".

L'objectif de ce problème est d'établir ce résultat fondamental par deux méthodes analytiques.

I. Résultats préliminaires

Soit P un polynôme à coefficients complexes s'écrivant $P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k$ avec $d \geqslant 1$ et $a_d \neq 0$.

1. (a) Montrer que $|P(z)| \underset{|z|\to+\infty}{\sim} |a_d||z|^d$, la variable z étant complexe.

   (b) En déduire qu'il existe $R > 0$ tels que, pour tout $z \in \mathbb{C}$,
$$|z| \geqslant R \Longrightarrow \frac{1}{2}|a_d||z|^d \leqslant |P(z)| \leqslant 2|a_d||z|^d.$$

2. (a) Justifier que l'application $(x, y) \longmapsto |P(x+iy)|$ est bornée sur tout disque fermé borné de $\mathbb{R}^2$ et y atteint sa borne inférieure.

   (b) Montrer alors que l'application $z \longmapsto |P(z)|$ est minorée sur $\mathbb{C}$ et atteint sa borne inférieure. *On pourra appliquer la question précédente sur un disque bien choisi* .

II. Première méthode analytique

1. Soient b un complexe non nul et Q un polynôme à coefficients complexes tel $Q(0) = 0$; on pose $Q_1 = 1 + bX^k + X^k Q$, $k \in \mathbb{N}^*$. Soit enfin α une racine k-ième de $-\frac{1}{b}$.

   (a) Montrer qu'il existe $t_0 \in]0, 1[$ tel que $|\alpha^k Q(\alpha t_0)| \leqslant \frac{1}{2}$.

   (b) Un tel t_0 étant choisi ; montrer que $|Q_1(\alpha t_0)| < 1$.

2. **Inégalité d'Argand** : Soient P un polynôme *non constant* à coefficients complexes, et γ un nombre complexe tel que $P(\gamma) \neq 0$. Montrer qu'il existe δ, complexe tel que $|P(\delta)| < |P(\gamma)|$. *On pourra considérer le polynôme Q_1 tel que* $Q_1(z) = \frac{P(\gamma+z)}{P(\gamma)}$, $z \in \mathbb{C}$.

3. **Application** : Soit P un polynôme *non constant* à coefficients complexes ; on note z_0 un complexe où l'application $z \longmapsto |P(z)|$ atteint sa valeur minimale. Montrer que z_0 est un zéro du polynôme P.

II. Deuxième méthode analytique

Soit P un polynôme *non constant* à coefficients complexes ; on va montrer par l'absurde que P possède au moins une racine dans $\mathbb{C}$. Supposons le contraire et considérons la fonction f, à valeurs complexes, définie sur $\mathbb{R}^2$ par
$$(r, \theta) \longmapsto f(r, \theta) = \frac{1}{P(re^{i\theta})}.$$

1. Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ et calculer ses dérivées partielles premières.

2. Pour tout réel r, on pose $\quad F(r) = \displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{P(re^{i\theta})}$.

   (a) Justifier que F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.

   (b) Montrer que F tend vers 0 en $+\infty$. *On pourra utiliser les préliminaires*.

   (c) Calculer $F(0)$ et trouver une contradiction puis conclure.

FIN DE L'ÉPREUVE