ROYAUME DU MAROC

Ministère de l'Éducation Nationale, de l'Enseignement
Supérieur, de la Formation des Cadres
et de la Recherche Scientifique

Présidence du Concours National Commun 2007
École Nationale Supérieure d'Électricité et de Mécanique
ENSEM

Concours National Commun d'Admission aux Grandes Écoles d'Ingénieurs ou Assimilées

Session 2007

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES I

Durée 4 heures

Filière **TSI**

Cette épreuve comporte 3 pages au format A4, en plus de cette page de garde
L'usage de la calculatrice est *interdit*

L'énoncé de cette épreuve, particulière aux candidats de lafilière TSI,
comporte 3 pages.
L'usage de la calculatrice est interdit .

Les candidats sont informés que la qualité de la rédaction et de la présentation, la clarté et la précision des raisonnements constitueront des éléments importants pour l'appréciation des copies. Il convient en particulier de rappeler avec précision les $\boxed{\text{références}}$ *des questions abordées.*

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

PREMIER PROBLÈME

Soient a et b deux réels strictement positifs ; pour tout entier naturel non nul n, P_n désigne la fonction polynômiale définie par

$$P_n(x) = \frac{x^n(a-bx)^n}{n!},\ x \in \mathbb{R}.$$

Première partie

Soit n un entier naturel non nul.

1. (a) Quel est le degré de P_n ?
   (b) Que peut-on dire de la dérivée k-ième $P_n^{(k)}$ de la fonction P_n pour tout entier $k \geqslant 2n+1$?
2. (a) Préciser les racines de P_n et donner l'ordre de multiplicité de chacune d'elles.
   (b) Donner la valeur de $P_n^{(k)}(0)$ et $P_n^{(k)}(\frac{a}{b})$ pour tout entier $k \in \{0, \ldots, n-1\}$.
3. Soit k un entier compris au sens large entre n et $2n$.
   (a) Montrer que, pour tout réel x,
   $$P_n^{(k)}(x) = \frac{1}{n!}\sum_{p=k-n}^{n} C_k^p \frac{n!}{(n-p)!}\frac{n!}{(n-k+p)!}(-b)^{k-p}x^{n-p}(a-bx)^{n-k+p}.$$
   On pourra utiliser la formule de Leibniz donnant la dérivée k-ième d'un produit.
   (b) En déduire les valeurs de $P_n^{(k)}(0)$ et $P_n^{(k)}(\frac{a}{b})$ en fonction de a, b, n et k.
   (c) Vérifier que si a et b sont des entiers, il en est de même de $P_n^{(k)}(0)$ et $P_n^{(k)}(\frac{a}{b})$.

Deuxième partie

1. Soit n un entier naturel non nul.
   (a) Étudier la fonction P_n sur le segment $[0, \frac{a}{b}]$; dresser son tableau de variations.
   (b) En déduire que P_n est positive et bornée sur le segment $[0, \frac{a}{b}]$ puis déterminer sa borne supérieure notée β_n : $\beta_n = \sup\limits_{0 \leqslant x \leqslant \frac{a}{b}} P_n(x)$.
2. α étant un réel strictement positif, on considère la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ définie par : $u_n = \dfrac{\alpha^n}{n!}, n \geqslant 1$.

(a) Montrer que la suite $\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)_{n\geqslant 1}$ converge vers 0.

(b) En déduire que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers 0.

(c) Que peut-on alors dire de la suite $(\beta_n)_{n\geqslant 1}$?

3. Soit $(x_n)_{n\geqslant 1}$ une suite d'entiers qui converge vers 0. Montrer que ses termes sont nuls à partir d'un certain rang.

Troisième partie

On se propose de montrer l'irrationalité de π ; on suppose donc qu'il existe deux entiers naturels non nuls, notés c et d, tels que $\pi = \frac{c}{d}$.

Pour tout entier naturel non nul n, on pose

$$Q_n(x) = \frac{x^n(c-dx)^n}{n!},\ x \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad I_n = \int_0^{\pi} Q_n(x)\sin x\,dx.$$

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leqslant I_n \leqslant \dfrac{\pi}{n!}\left(\dfrac{c^2}{4d}\right)^n$, puis en déduire la limite de $(I_k)_{k\geqslant 1}$.

2. Montrer soigneusement que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n \neq 0$.

3. En utilisant des intégrations par partie, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$I_n = \sum_{k=n}^{2n}\Big(Q_n^{(k)}(\frac{c}{d})\cos(\frac{c}{d}+k\frac{\pi}{2}+\pi) - Q_n^{(k)}(0)\cos(k\frac{\pi}{2}+\pi)\Big).$$

4. Justifier alors que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, I_n est un entier.

5. Conclure au sujet de l'hypothèse $\pi = \frac{c}{d} \in \mathbb{Q}$.

DEUXIÈME PROBLÈME

Dans ce problème, E désigne un plan affine euclidien orienté de direction $\overrightarrow{E}$, et $(O,\vec{i},\vec{j})$ un repère orthonormée direct de E ; le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{e_1}$ et $\vec{e_2}$ de $\overrightarrow{E}$ se notera $(\vec{e_1}|\vec{e_2})$.

Un point M de E peut être repéré par ses coordonnées cartésiennes x et y dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$, ou par ses coordonnées polaires ρ et θ (rayon et angle polaires).

Étant donné dans E un arc γ birégulier et un point M de γ, on note :
- s l'abscisse curviligne de M sur γ,
- $\overrightarrow{T}$ le vecteur unitaire tangent à γ en M et $\overrightarrow{N}$ l e vecteur unitaire vérifiant $(\widehat{\overrightarrow{T},\overrightarrow{N}}) = \frac{\pi}{2}$,
- R le rayon de courbure algébrique de γ en M et I le centre de courbure de γ en M,
- $\vec{u}(\theta)$ et $\vec{v}(\theta)$ les vecteurs de $\overrightarrow{E}$ défini par : $\vec{u}(\theta) = \cos\theta\,\vec{i} + \sin\theta\,\vec{j}$ et $\vec{v}(\theta) = \vec{u}(\theta+\frac{\pi}{2})$,
- V l'angle $(\widehat{\vec{u}(\theta),\overrightarrow{T}})$ et α l'angle $(\widehat{\vec{i},\overrightarrow{T}})$.

Première partie

On considère l'arc γ_1 de E d'équation polaire $\rho = 1+\cos\theta$ et on note φ l'application de $\mathbb{R}$ vers E définie par

$$\theta \longmapsto O + (1+\cos\theta)\vec{u}(\theta).$$

1. (a) Déterminer le domaine de définition de la fonction ρ et en préciser une période.

(b) Étudier la parité de ρ et en déduire que le support de l'arc γ_1 possède un axe de symétrie à préciser.

(c) Comment peut-on obtenir le support de l'arc γ_1 à partir de celui de l'arc $\gamma_2 = ([0, \pi], \psi)$ où ψ désigne la restriction de φ au segment $[0, \pi]$.

2. Préciser la nature du pôle O, point du support de γ_1 de paramètre π.

3. Soit $M_0 = \varphi(\theta_0)$ un point de γ_1 distinct du pôle O. Montrer que M_0 est un point birégulier et préciser la concavité de γ_1 en ce point.

4. Étudier la fonction $\rho : \theta \longmapsto 1 + \cos\theta$ sur le segment $[0, \pi]$ et dresser son tableau de variations.

5. Tracer soigneusement le support de l'arc γ_1 en précisant les tangentes aux points d'intersection de son support avec les axes des coordonnées (unité : 3cm).

6. Calculer la longueur de l'arc γ_2.

7. Calculer l'aire de la portion du plan délimité par le support de l'arc γ_1.

Deuxième partie

A- Questions de cours

Soit γ un arc birégulier de E d'équation polaire $\rho = f(\theta)$; on note s une abscisse curviligne sur γ orienté dans le sens des θ croissants.

On rappelle que $\overrightarrow{MI} = R\overrightarrow{N}$, $R = \dfrac{ds}{d\alpha}$ et $\tan V = \dfrac{f}{f'}$.

1. Faire un croquis propre et lisible en traçant une portion de l'arc γ et en plaçant en un point M de paramètre θ, distinct du pôle O, les vecteurs $\vec{u}(\theta)$, $\overrightarrow{T}$, $\overrightarrow{N}$ et les angles θ, V et α.

2. Rappeler la définition de s et exprimer $\dfrac{ds}{d\theta}$ à l'aide de f et f'.

3. Calculer $\dfrac{dV}{d\theta}$ et en déduire l'expression du rayon de courbure R.

4. Exprimer les coordonnées de I, centre de courbure de γ en M, dans le repère $(M, \vec{u}(\theta), \vec{v}(\theta))$.

B- Retour à l'arc γ_1

Soit s une abscisse curviligne sur l'arc γ_1 orientée dans le sens des θ croissants. À tout point $M(\theta)$ de l'arc γ_1, distinct du pôle O, on associe le centre de courbure noté $I(\theta)$.

1. Préciser les coordonnée de $I(\theta)$ d'abord dans le repère $(O, \vec{u}(\theta), \vec{v}(\theta))$ puis dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

2. Montrer que le point $I(\theta)$ est l'image du point $M(\theta + \pi)$ de γ_1 par une homothétie dont on précisera le centre Ω et le rapport λ .

3. On note $H(\theta)$ le projeté orthogonal du point $I(\theta)$ sur la droite $\big(OM(\theta)\big)$ joignant les points O et $M(\theta)$. Montrer que le point $H(\theta)$ est l'image du point $M(\theta)$ par une homothétie de centre O dont on précisera le rapport μ.

4. On note γ_I et γ_H les courbes décrites respectivement par le centre de courbure $I(\theta)$ et son projeté orthogonal $H(\theta)$. Tracer les supports de γ_1, γ_I et γ_H sur le même graphique, et placer un point $M(\theta)$ de γ_1 et les points $I(\theta)$ et $H(\theta)$ correspondant.

5. Donner la longueur de la courbe γ_H décrite par le point $H(\theta)$ ainsi que l'aire de la portion du plan qu'elle délimite.

FIN DE L'ÉPREUVE