ROYAUME DU MAROC

Ministère de l'Éducation Nationale, de l'Enseignement
Supérieur, de la Formation des Cadres
et de la Recherche Scientifique

Présidence du Concours National Commun 2006
École Mohammadia d'Ingénieurs
EMI

Concours National Commun d'Admission aux Grandes Écoles d'Ingénieurs ou Assimilées

Session 2006

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES II

Durée 4 heures

Filière **TSI**

Cette épreuve comporte 3 pages au format A4, en plus de cette page de garde
L'usage de la calculatrice est *interdit*

L'énoncé de cette épreuve, particulière aux candidats du concours TSI, comporte 3 pages. L'usage de la calculatrice est interdit .

Les candidats sont informés que la précision des raisonnements ainsi que le soin apporté à la rédaction et à la présentation des copies seront des éléments pris en compte dans la notation. Il convient en particulier de rappeler avec précision les références *des questions abordées*

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

EXERCICE

Soit A une matrice réelle d'ordre 3 telle que $A \neq 0$ et $A^3 + A = 0$. On note E le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de E et u l'endomorphisme de E dont la matrice relativement à la base $\mathcal{B}$ est A.

1. Vérifier que $u^3 + u = 0$ et que u n'est pas l'endomorphisme nul.
2. (a) On suppose que u est injectif ; montrer que $u^2 = -id_E$ et trouver une contradiction.
   (b) Justifier alors que $\dim \operatorname{Ker} u \in \{1, 2\}$.
3. Montrer que E est somme directe des sous-espaces vectoriels $\operatorname{Ker} u$ et $\operatorname{Ker}(u^2 + id_E)$. Quelles sont alors les valeurs possibles de la dimension du sous-espace vectoriel $\operatorname{Ker}(u^2 + id_E)$?
4. On pose $F = \operatorname{Ker}(u^2 + id_E)$.
   (a) Vérifier que F est stable par u. On note v l'endomorphisme induit par u sur F.
   (b) Vérifier que $v^2 = -id_F$.
   (c) Préciser le déterminant de v^2 en fonction de la dimension de F et en déduire que $\dim F = 2$.
   (d) Montrer que l'endomorphisme v n'a aucune valeur propre.
5. On considère un vecteur e'_1 non nul de $\operatorname{Ker} u$, un vecteur e'_2 non nul de F et on pose $e'_3 = u(e'_2)$.
   (a) Montrer que la famille (e'_2, e'_3) d'éléments de F est libre.
   (b) Montrer que la famille $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$ est une base de E et écrire la matrice B de u dans cette base.
   (c) Que peut-on alors dire des matrices A et B ?

PROBLÈME

Définitions et notations

Dans tout le problème, E désigne un espace vectoriel euclidien de dimension $n \geqslant 2$ muni d'un produit scalaire noté $(.|.)$; la norme euclidienne sur E associée à ce produit scalaire est notée $\|.\|$.

On rappelle qu'un endomorphisme f de E est dit symétrique si

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad (f(x)|y) = (x|f(y)).$$

Un endomorphisme symétrique de E est dit positif si, pour tout $x \in E$, $(f(x)|x) \geqslant 0$.

On note $\mathcal{L}(E)$ l'algèbre des endomorphismes de E, $\mathcal{S}(E)$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$ formé des endomorphismes symétriques et $O(E)$ le groupe orthogonal de E.

Si $p \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices à coefficients réels, à n lignes et p colonnes ; si $p = n$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ est noté simplement $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, c'est l'algèbre des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels. La matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ se notera I_n.

Pour toute matrice A de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, ${}^tA$ désigne la matrice transposée de A et rg(A) son rang. Si $p = n$, $\mathrm{Sp}(A)$ représente l'ensemble des valeurs propres réelles de A, $\mathrm{Tr}\,(A)$ sa trace et P_A son polynôme caractéristique ; il est défini par

$$\forall\, \lambda \in \mathbb{R}, \quad P_A(\lambda) = \det(A - \lambda\, I_n).$$

Première partie

Soit u un vecteur unitaire de E ; on note p l'endomorphisme de E défini par

$$\forall\, x \in E,\ p(x) = (u|x).u.$$

1. (a) Justifier que $p \circ p = p$.
   (b) Déterminer $\mathrm{Ker}\, p$ et $\mathrm{Im}\, p$ et les exprimer moyennant le vecteur u. En déduire la nature de l'endomorphisme p .
   (c) Établir que p est un endomorphisme symétrique et positif.
   (d) Justifier que p est diagonalisable et déterminer ses valeurs propres ainsi que les sous-espaces propres associés.
2. Soit $\mathcal{B}_E = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une base orthonormale de E. On suppose que l'expression du vecteur u dans cette base s'écrit $u = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} u_i e_i$ et on note $U = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$.
   (a) Calculer les coefficients de la matrice $U\,{}^tU$.
   (b) Exprimer la matrice de p dans la base $\mathcal{B}_E$ en fonction de U.
3. Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, on pose $f_\alpha = id_E + \alpha p$.
   (a) Quelle condition doit vérifier α pour que f_α soit un automorphisme de E ?
   (b) On note $G = \{f_\alpha,\ \alpha \in \mathbb{R} \text{ et } \alpha \neq -1\}$. Montrer que G est un groupe pour la composition des applications.
   (c) Déterminer les éléments de $G \cap O(E)$ en précisant la nature de chacun d'entre eux.
4. On suppose ici que α est non nul.
   (a) Justifier que f_α est diagonalisable et préciser ses valeurs propres ainsi que les sous-espaces propres associés.
   (b) Déterminer le polynôme caractéristique P_{f_α} de f_α.
   (c) Calculer $\|f_\alpha\| = \sup\{\|f_\alpha(x)\|,\ x \in E \text{ et } \|x\| = 1\}$
5. Soient a et b deux réels non nuls, et g l'endomorphisme de E dont la matrice relativement à la base $\mathcal{B}_E$ est $aI_n + bJ_n$, où J_n la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1.
   (a) Déterminer toutes les matrices colonnes $V \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ telles que $J_n = nV\,{}^tV$.
   (b) Exprimer l'endomorphisme g en fonction de $f_{\frac{nb}{a}}$ puis déterminer les valeurs propres ainsi que le polynôme caractéristique et les sous-espaces propres de la matrice $aI_n + bJ_n$.

Deuxième partie

Dans cette partie, F désigne un espace euclidien de dimension $m \geqslant 2$ muni d'un produit scalaire noté $<,>$ et $\mathcal{B}_F = (e'_1, e'_2, \dots, e'_m)$ une base orthonormale de F.

1. Soit h un endomorphisme symétrique de F.
   (a) Justifier qu'il existe une base orthonormale de F formée de vecteurs propres de h.
   (b) Montrer que h est positif si et seulement si toutes ses valeurs propres sont positives.
2. Soit f une application linéaire de F vers E. On note $\tilde{f}$ l'application de E vers F définie par
$$\forall\, x \in E, \quad \tilde{f}(x) = \sum_{k=1}^{m} (f(e'_k)|x).e'_k.$$
   (a) Montrer que $\tilde{f}$ est linéaire et que c'est l'unique application linéaire de E vers F vérifiant
$$\forall\, (x, y) \in E \times F, \quad < \tilde{f}(x), y >= (x|f(y)).$$
   (b) Montrer que $\tilde{f} \circ f$ est un endomorphisme symétrique et positif de F
   (c) Vérifier que $\operatorname{Ker} \tilde{f} = (\operatorname{Im} f)^{\perp}$ et que $\operatorname{Ker}(\tilde{f} \circ f) = \operatorname{Ker} f$.
   (d) En déduire que $\operatorname{rg}(\tilde{f} \circ f) = \operatorname{rg}(f) \leqslant \min(n, m)$.
   (e) On note A la matrice de f relativement aux bases $\mathcal{B}_F$ et $\mathcal{B}_E$.
      i. Exprimer, en fonction de A, la matrice $\tilde{A}$ de $\tilde{f}$ relativement aux bases $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$
      ii. Exprimer, en fonction de A, la matrice de $\tilde{f} \circ f$ relativement à la bases $\mathcal{B}_F$ de F.
3. f désigne toujours une application linéaire de F vers E. Pour tout $k \in \{1, \dots, m\}$, on pose $f(e'_k) = u_k$ et on note p_k l'endomorphisme de E défini par
$$\forall\, x \in E, \quad p_k(x) = (u_k|x).u_k.$$
   (a) Exprimer $f \circ \tilde{f}$ comme combinaison linéaire de $p_1, \dots, p_m$.
   (b) Montrer que l'endomorphisme $f \circ \tilde{f}$ est symétrique et positif.
   (c) Soit λ un réel non nul. Montrer que λ est valeur propre de $f \circ \tilde{f}$ si et seulement si λ est valeur propre de $\tilde{f} \circ f$; dans ce cas, montrer que l'ordre de multiplicité de la valeur propre λ est le même pour ces deux endomorphismes.
   (d) Exprimer la matrice G de $\tilde{f} \circ f$ dans la base $\mathcal{B}_F$ à l'aide des vecteurs u_k puis l'écrire en fonction de la matrice A de f relativement aux bases $\mathcal{B}_F$ et $\mathcal{B}_E$.
   (e) Montrer que $\operatorname{rg}(G) = \operatorname{rg}(f)$ et que 0 est valeur propre de $\tilde{f} \circ f$ si et seulement si la famille $(u_1, \dots, u_m)$ est liée.
4. Avec les notations de la question 3. précédente, on pose $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{R})$ avec $a_{i,j} = 1$ si $i \leqslant j$ et 0 sinon ; on note $B = {}^{t}AA$ et on suppose de plus que $m \leqslant n$.
   (a) Donner une expression du terme général $b_{i,j}$ de la matrice B.
   (b) Déterminer une famille $(u_1, \dots, u_m)$ d'éléments de E telle que $B = G$.
   (c) Est-ce que 0 est valeur propre de B ?

FIN DE L'ÉPREUVE