ROYAUME DU MAROC

Ministère de l'Éducation Nationale, de l'Enseignement
Supérieur, de la Formation des Cadres
et de la Recherche Scientifique

Présidence du Concours National Commun 2005
École Hassania des Travaux Publics
EHTP

Concours National Commun d'Admission aux Grandes Écoles d'Ingénieurs ou Assimilées

Session 2005

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES II

Durée 4 heures

Filière **TSI**

Cette épreuve comporte 3 pages au format A4, en plus de cette page de garde
L'usage de la calculatrice est *interdit*

L'énoncé de cette épreuve, particulière aux candidats de la filière TSI,
comporte 3 pages.
L'usage de la calculatrice est interdit .

Les candidats sont informés que la précision des raisonnements ainsi que le soin apporté à la rédaction et à la présentation des copies seront des éléments pris en compte dans la notation. Il convient en particulier de rappeler avec précision les $\boxed{\text{références}}$ *des questions abordées.*

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

EXERCICE 1

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$; on note u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice A.

1. Calculer les valeurs propres de u et justifier que A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
2. On note λ_1, λ_2 et λ_3 les valeurs propres de u avec $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$. Déterminer, pour chaque $i \in \{1, 2, 3\}$, le vecteur e_i de $\mathbb{R}^3$ dont la deuxième composante vaut 1 et vérifiant $u(e_i) = \lambda_i e_i$.
3. Justifier que (e_1, e_2, e_3) est une base de $\mathbb{R}^3$ et écrire la matrice Δ de u relativement à cette base, puis trouver une relation entre A et Δ.
4. Si $B \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ est une matrice vérifiant $B^2 = A$, on note v l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ qui lui est canoniquement associé.
   - 4-1. Vérifier que $v^2 = u$ et que $uv = vu$.
   - 4-2. Pour chaque $i \in \{1, 2, 3\}$, calculer $uv(e_i)$ et en déduire que $v(e_i)$ est colinéaire à e_i.
   - 4-3. Conclure que la matrice V de v relativement à la base (e_1, e_2, e_3) est diagonale de la forme $V = diag(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ et en déduire les valeurs possibles de α_1, α_2 et α_3.
5. Trouver alors toutes les solutions, dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, de l'équation $X^2 = A$. Combien y'en a-t-il ?

EXERCICE 2

Dans cet exercice, E désigne un espace vectoriel réel de dimension finie $n \geqslant 2$. Si u et v sont des éléments de $\mathcal{L}(E)$, l'endomorphisme composé $u \circ v$ sera noté simplement uv et l'identité se notera I_E. Pour $u \in \mathcal{L}(E)$, on pose $u^0 = I_E$ et si $k \in \mathbb{N}^*$, $u^k = uu^{k-1}$.

On considère un endomorphisme nilpotent u de E, c'est à dire un endomorphisme tel qu'il existe $r \in \mathbb{N}^*$ avec $u^r = 0$; on pose alors $p = \min\{k \in \mathbb{N}^* \,;\ \ u^k = 0\}$.

1.
   - 1-1. Justifier qu'il existe $x_0 \in E$ tel que $u^{p-1}(x_0) \neq 0$.
   - 1-2. Montrer que la famille $(x_0, u(x_0), \ldots, u^{p-1}(x_0))$ est libre.
   - 1-3. En déduire que $p \leqslant n$ et que $u^n = 0$.
2. On suppose qu'il existe $v \in \mathcal{L}(E)$ tel que $v^2 = u$.
   - 2-1. Calculer v^{2p} et $v^{2(p-1)}$, puis en déduire que $p \leqslant \frac{n+1}{2}$.
   - 2-2. Donner alors un exemple de matrice $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que l'équation $X^2 = M$ n'ait pas de solution dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

3. Dans cette question, on suppose que $p = n$; on a donc $u^{n-1} \neq 0$ et $u^n = 0$. On considère un endomorphisme g de E tel que $g^2 = I_E + u$.

   3-1. Soit $x_1 \in E$ tel que $u^{n-1}(x_1) \neq 0$. Justifier que $(x_1, u(x_1), \ldots, u^{n-1}(x_1))$ est une base de E et qu'il existe $(\alpha_0, \ldots, \alpha_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$ tel que $g(x_1) = \alpha_0 x_1 + \alpha_1 u(x_1) + \cdots + \alpha_{n-1} u^{n-1}(x_1)$.

   3-2. Vérifier que $gu = ug$ et montrer que $g = \alpha_0 I_E + \alpha_1 u + \cdots + \alpha_{n-1} u^{n-1}$.

   3-3. Justifier que la famille $(I_E, u, \ldots, u^{n-1})$ est libre puis, en calculant g^2 de deux façons, montrer que $\alpha_0^2 = 1,\ 2\alpha_0\alpha_1 = 1$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{q} \alpha_k \alpha_{q-k} = 0$ pour $2 \leqslant q \leqslant n-1$ (si $n \geqslant 3$).

   3-4. Montrer alors que $\alpha_0 \in \{-1, 1\}$ et que, pour tout $k \in \{1, \ldots, n-1\}$, α_k peut être exprimé de manière unique en fonction de α_0.

   3-5. Conclure qu'il y'a exactement deux endomorphismes de E dont le carré est égal à $I_E + u$.

4. **Application :** Déterminer toutes les matrices $X \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ telles que $X^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

PROBLÈME

Dans ce problème, $\mathbb{R}[X]$ désigne l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{R}_n[X]$ est le sous-espace de $\mathbb{R}[X]$ formé des polynômes de degré $\leqslant n$.

On considère l'application $D : \mathbb{R}[X] \longrightarrow \mathbb{R}[X],\ P \longmapsto P(X+1) - P(X)$.

Première partie

1. Vérifier que D est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.

2. (a) Montrer que si $P \in \operatorname{Ker} D$ alors, pour tout entier $n \geqslant 0$, $P(n) = P(0)$.
   (b) Montrer alors que $\operatorname{Ker} D = \mathbb{R}_0[X]$.

3. (a) Si P n'est pas un polynôme constant, préciser le degré de $D(P)$ en fonction de celui de P, ainsi que le coefficient dominant de $D(P)$ en fonction de celui de P.
   (b) En déduire que $D(\mathbb{R}_n[X]) \subset \mathbb{R}_{n-1}[X]$, si $n \geqslant 1$, et que le sous-espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$ est stable par D.

4. Soit n un entier $\geqslant 1$; on note D_n l'endomorphisme induit par D sur $\mathbb{R}_n[X]$. Déterminer $\operatorname{Ker} D_n$ et montrer que $\operatorname{Im}(D_n) = \mathbb{R}_{n-1}[X]$.

5. Montrer que l'endomorphisme D est surjectif.

6. (a) On considère $F = \{P \in \mathbb{R}[X]\ ;\ P(0) = 0\}$. Vérifier que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$ et que $\mathbb{R}[X] = F \oplus \operatorname{Ker} D$.
   (b) Conclure que, pour tout polynôme $Q \in \mathbb{R}[X]$, il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(0) = 0$ et que $D(P) = Q$; préciser le degré de P en fonction de celui de Q.

Deuxième partie

1. Montrer qu'il existe une unique suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathbb{R}[X]$ vérifiant $P_0 = 1$ et pour tout entier $n \geqslant 1$, $P_n(0) = 0$ et $P_{n-1} = D(P_n)$.

2. Expliciter P_1 et P_2.

3. Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$, $\quad P_n = \dfrac{X(X-1)\dots(X-n+1)}{n!}$.

4. Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$, la famille $(P_0, \dots, P_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

5. Si $P \in \mathbb{R}_n[X]$, montrer que l'on obtient les coordonnées de P dans la base $(P_0, \dots, P_n)$ par une succession de divisions euclidiennes.

6. Expliciter alors les monômes X^2 et X^3 comme combinaisons linéaires de P_0, P_1, P_2, P_3.

7. **Application**

   Pour tout couple (n, p) d'entiers naturels non nuls, on pose

$$S_{n,p} = 1^n + 2^n + \dots + p^n.$$

   (a) Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$, il existe un polynôme $A_n \in \mathbb{R}_{n+1}[X]$ tel que $A_n(0) = 0$ et $D(A_n) = X^n$.

   (b) En revenant à la définition de D, montrer que $S_{n,p} = A_n(p+1)$.

   (c) Si $X^n = \sum\limits_{k=0}^{n} \alpha_k P_k$, justifier que $A_n = \sum\limits_{k=0}^{n} \alpha_k P_{k+1}$.

   (d) Déterminer les valeurs de A_2 et A_3.

   (e) Donner alors, sous forme factorisée, les valeurs de $S_{2,p}$ et $S_{3,p}$.

FIN DE L'ÉPREUVE