Concours marocain 2005, TSI :
Epreuve 2 (Corrigé)

EXERCICE 1.

1. $$\begin{aligned}\lambda \text{ valeur propre de } A &\Leftrightarrow A-\lambda I_3 \text{ non inversible}\\ &\Leftrightarrow \det(A-\lambda I_3)=0\\ &\Leftrightarrow (2-\lambda)((2-\lambda)^2-1)=0\\ &\Leftrightarrow (2-\lambda)(1-\lambda)(3-\lambda)=0\\ &\Leftrightarrow \lambda\in\{1,2,3\}\end{aligned}$$ Ainsi le polynôme caractéristique de a admet 3 racines distinctes, donc A diagonalisable car $\dim(\mathrm{Ker}(u-\lambda_i id_{\mathbb{R}^3})=1$ pour tout λ_i.
2. $\lambda_1=1, \lambda_2=2, \lambda_3=3$, resolvons les systèmes $AX=\lambda_i X$ pour trouver les e_i, où $X=\begin{pmatrix}x\\1\\z\end{pmatrix}$.
   $AX=X \implies x+1+z=0$ et $z=0 \implies x=-1, y=1, z=0$.
   $AX=2X \implies 1+z=0$ et $x+z=0 \implies x=1, y=1, z=-1$.
   $$\begin{aligned}AX=3X &\implies -x+1+z=0, x-1+z=0, \text{ et } -z=0\\ &\implies x=1, y=1, z=0\end{aligned}.$$
   Posons $\mathcal{B}_2=\left(e_1=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}, e_2=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}, e_3=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\right)$.
3. Comme $\mathrm{Card}(\mathcal{B}_2)=3=\dim(\mathbb{R}^3)$, pour montrer que c'est une base, il suffit de montrer qu'elle libre, pour cela il suffit de montrer que $\det_{\mathcal{B}_1}(\mathcal{B}_2)\neq 0$, où $\mathcal{B}_1$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
   En effet $\det_{\mathcal{B}_1}(\mathcal{B}_2)=\begin{vmatrix}-1&1&1\\1&1&1\\0&-1&0\end{vmatrix}=-2\neq 0$.
   D'autre part $u(e_i)=\lambda_i e_i$, donc $\Delta=\mathcal{M}_{\mathcal{B}_2}(u)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&3\end{pmatrix}$, avec la relation suivante entre A et Δ :
   $$A=P\Delta P^{-1} \qquad \text{avec : } P=P_{\mathcal{B}_1\to\mathcal{B}_2}$$

4. (a) $B = \mathcal{M}_{\mathcal{B}_1}(v)$, donc $B^2 = ((\mathcal{M}_{\mathcal{B}_1}(v))^2 = \mathcal{M}_{\mathcal{B}_1}(v^2) = A = \mathcal{M}_{\mathcal{B}_1}(u)$, d'où $v^2 = u$, et de même, on a : $BA = B^3 = AB$, d'où $\mathcal{M}_{\mathcal{B}_1}(uv) = \mathcal{M}_{\mathcal{B}_1}(vu)$, d'où $uv = vu$.

   (b) $uv(e_i) = vu(e_i) = v(\lambda_i e_i) = \lambda v(e_i)$, d'où $v(e_i) \in \operatorname{Ker}(u - \lambda_i id_{\mathbb{R}^3})$ or $\dim \operatorname{Ker}(u - \lambda_i id_{\mathbb{R}^3}) = 1$ et $e_i \in \operatorname{Ker}(u - \lambda_i id_{\mathbb{R}^3})$, d'où e_i et $v(e_i)$ sont proportionnels. Donc $v(i) = \alpha_i e(i)$ et par suite : $V = \mathcal{M}_{\mathcal{B}_2}(u) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3 \end{pmatrix}$, avec la relation suivante entre B et V :

$$B = P\Delta P^{-1}$$

   Or $B^2 = A$, d'où $(PVP^{-1})^2 = PV^2P^{-1} = P\Delta P^{-1}$, d'où $V^2 = \Delta$, donc $\alpha_1^2 = 1, \alpha_2^2 = 2, \alpha_3^2 = 3$, et donc :

$$\alpha_1 \in \{-1, 1\}, \alpha_2 \in \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}, \alpha_3 \in \{-\sqrt{3}, \sqrt{3}\}$$

5. Les solutions de l'équations $X^2 = A$ sont de la forme $X = PVP^{-1}$, il y en a 8 solutions car on peut former 8 matrices, $V = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3 \end{pmatrix}$ avec les conditions : $\alpha_1 \in \{-1, 1\}, \alpha_2 \in \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}, \alpha_3 \in \{-\sqrt{3}, \sqrt{3}\}$

EXERCICE 2.

1. (a) $p = \min\{k \in \mathbb{N}^* \text{ tel que: } u^k = 0\}$, donc $u^{p-1} \neq 0$, et par suite $\exists x_0 \in E$ tel que: $u^{p-1}(x_0) \neq 0$.

   (b) Soit $(\lambda_i)_{0 \leq i \leq p}$ tel que: $\lambda_0 x_0 + \lambda_1 u(x_0) + \ldots + \lambda_{p-1} u^{p-1}(x_0) = 0$, on compose par u^{p-1} et comme $u^k = 0, \quad \forall k \geq p$, alors $\lambda_0 u^{p-1}(x_0) = 0$, or $u^{p-1}(x_0) \neq 0$, d'où $\lambda_0 = 0$, ce qui donne $\lambda_1 u(x_0) + \ldots + \lambda_{p-1} u^{p-1}(x_0) = 0$, on compose cette fois par u^{p-2}, ce qui donne $\lambda_1 u^{p-1}(x_0) = 0$, d'où $\lambda_1 = 0$ et on ré-itère le même procédè jusqu'à montrer que tous les λ_i sont nuls. D'où la famille $\mathcal{C} = (x_0, u(x_0), \ldots, u^{p-1}(x_0))$ est libre.

   (c) $\mathcal{C}$ est libre, donc $\operatorname{Card}(\mathcal{C}) = p \leq \dim(E) = n$, or $u^p = 0$ et $n \geq p$, d'où $u^n = 0$.

2. (a) $v^{2p} = (v^2)^p = u^p = 0$ et $v^{2(p-1)} = u^{p-1} \neq 0$.
Posons : $q = \min\{k \in \mathbb{N}^* \text{ tel que: } v^k = 0\}$, donc $2(p-1) < q \leq 2p$, et comme dans ce qui précède pour u, on peut aussi affirmer pour v que $q \leq n$, ainsi $2(p-1)+1 \leq q \leq n$, d'où $2p-1 \leq n$, d'où $p \leq \dfrac{n+1}{2}$.

(b) Soit $= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. On a $M^2 = 0$ et $M = 0$, donc $p = 2$, pour $M \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$, d'où suivant la question précédente si $X^2 = M$, on devrait avoir $p\dfrac{3}{2}$, ce qui n'est pas le cas, donc l'équation $X^2 = M$, n'admet pas de solutions.

3. (a) De la même façon que dans la question 1.2), on montre que la famille $(x_1, u(x_1), \ldots, u^{n-1}(x_1))$ est libre, or son cardinal est égal à $n = \dim(E)$, donc c'est une base, et pas suite c'est une famille génératrice de E, or $g(x_1) \in E$, d'où l'existence de nombres réels $(\alpha_i)_{0 \leq i \leq n-1}$ tel que: $g(x_1) = \alpha_0 x_1 + \alpha_1 u(x_1) + \ldots + \alpha_{n-1} u^{n-1}(x_1)$.

(b) $g^2 = u + I_E$, d'où $u = g^2 - I_E$ et donc $gu = g^3 - g = ug$. Et par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$, on montre que $gu^k = u^k g$.
D'autre part on a les ègalités suivantes :
$$\begin{cases} g(x_1) = & \alpha_0 x_1 + \alpha_1 u(x_1) + \ldots + \alpha_{n-1} u^{n-1}(x_1) \\ gu(x_1) = & u(g(x_1)) = \alpha_0 u(x_1) + \alpha_1 u(u(x_1)) + \ldots + \alpha_{n-1} u^{n-1}(u(x_1)) \\ \vdots & \\ gu^{n-1}(x_1) = & u^{n-1}(g(x_1)) = \alpha_0 u^{n-1}(x_1) + \ldots + \alpha_{n-1} u^{n-1}(u^{n-1}(x_1)) \end{cases}$$
Ainsi g et $\alpha_0 I_E + \ldots + \alpha_{n-1} u^{n-1}$ coincident sur la base $(x_1, u(x_1), \ldots, u^{n-1}(x_1))$,et comme elles sont linéaires elles coincidents sur E.

(c) Soit $(\lambda_i)_{0 \leq i \leq n}$ tel que: $\lambda_0 I_E + \lambda_1 u + \ldots + \lambda_{p-1} u^{n-1} = 0$, on applique cette relation à x_1, on trouve $\lambda_0(x_1) + \lambda_1 u(x_1) + \ldots + \lambda_{p-1} u^{n-1}(x_1) = 0$, or la famille $(x_1, u(x_1), \ldots, u^{n-1}(x_1))$ est libre, d'où $\lambda_i = 0, \forall 1 \leq i \leq n$, et donc $(I_E, u, \ldots, u^{n-1})$ est libre.
1 ére façon : $g^2 = I_E + u$.
2 ème façon :
$$\begin{aligned} g^2 = & \left(\textstyle\sum_{k=0}^n \alpha_k u^k\right)^2 \\ = & \textstyle\sum_{q=0}^n \left(\sum_{k=0}^q \alpha_k \alpha_{q-k}\right) u^q \\ = & \textstyle\sum_{q=0}^n \beta_k u^q \qquad \text{Avec : } \beta_k = \sum_{k=0}^q \alpha_k \alpha_{q-k} \end{aligned}$$
Et par identification puisque la famille $(I_E, u, \ldots, u^{n-1})$ est libre, on a alors : $\beta_0 = \alpha_0^2 = 1, \beta_1 = 2\alpha_0\alpha_1 = 1$ et $\beta_q = 0, \quad \forall q \geq 2$.

(d) $\alpha_0^2 = 1$, donc $\alpha_0 \in \{-1, 1\}$.

Montrons par récurrence sur $q \in \{1, \dots, n\}$, que α_q s'exprime de façon unique en fonction de α_0.
Pour $q = 1$, on a : $\alpha_1 = \dfrac{1}{2\alpha_0}$, donc le résultat est vrai pour $q = 1$, supposons qu'il est vrai jusqu'à l'ordre $q-1$, et montrons que c'est vrai pour q.
En effet $\sum_{k=0}^{q} \alpha_k \alpha_{q-k} = 0$, donc $2\alpha_q\alpha_0 = -\sum_{k=1}^{q-1} \alpha_k \alpha_{q-k}$, or $1 \leq k \leq q-1$ et $1 \leq q-k \leq q-1$, d'où les $\alpha_k\alpha_{q-k}$ s'expriment de façon unique en fonction de α_0, donc leur somme aussi, et par la suite $2\alpha_q\alpha_0$ aussi et finalement α_q aussi.

(e) Les solutions, g de l'équation $g^2 = I_E + u$, sont de la forme $g = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k u^k$, or $\forall q \in \{1, \dots, n\}, \alpha_q$ s'exprime de façon unique en fonction de $\alpha_0 \in \{-1, 1\}$. Donc deux possibilités suivant la valeur prise par α_0.

4. L'équation peut s'écrire sous la forme $X^2 = I_1 + A$, avec :
$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, qui vérifie $A^4 = 0$ et $A^3 \neq 0$, donc $X = \alpha_0 I_4 + \alpha_1 A + \alpha_2 A^2 + \alpha_3 A^3$, avec les relations suivantes :
$$\begin{array}{ll} \alpha_0 \in \{-1, 1\} & 2\alpha_0\alpha_1 = 1 \\ 2\alpha_0\alpha_2 + \alpha_1^2 = 0 & 2\alpha_0\alpha_3 + 2\alpha_1\alpha_2 = 0 \end{array}$$
Les solutions possibles sont :
$$\left\{ \begin{array}{llll} \alpha_0 = 1 & , \alpha_1 = \dfrac{1}{2} & , \alpha_2 = -\dfrac{1}{4} & , \alpha_3 = \dfrac{1}{8} \\ \alpha_0 = -1 & , \alpha_1 = -\dfrac{1}{2} & , \alpha_2 = \dfrac{1}{4} & , \alpha_3 = -\dfrac{1}{8} \end{array} \right.$$

PROBLÉME.

Première partie.

1. $\forall (P, Q) \in \mathbb{R}[X], \forall \lambda \in \mathbb{R}$, on a :
$$\begin{aligned} D(P + \lambda Q) &= (P + \lambda Q)(X + 1) - (P + \lambda Q)(X) \\ &= (P(X + 1) - P(X)) + \lambda(Q(X + 1) - Q(X)) \\ &= D(P) + \lambda D(Q) \end{aligned}$$
d'où D est linéaire.
D'autre part si P est un polynôme, il est clair que $D(P) = P(X+1) -$

$P(X)$ est un polynôme, donc $D : \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$.
Donc D est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.

2. (a) $P \in \mathrm{Ker}(D) \implies P(X) = P(X+1)$, d'où les relations suivantes :
$$\begin{cases} P(0) = P(1) \\ \vdots \\ P(n-1) = P(n) \end{cases},$$
en sommant ces inégalités on obtient $P(n) = P(0)$.

   (b) Si $P \in \mathrm{Ker}(D)$, alors $P(n) = P(0), \quad \forall n \in \mathbb{N}$, donc le poynôme $Q(X) = P(X) - P(0)$, admet une infinité de racines, donc est nul. D'où $P(X) = P(0)$, donc $P \in \mathbb{R}_0[X]$, d'où $\mathrm{Ker}(D) \subset \mathbb{R}_0[X]$, l'autre inclusion est évidente d'où l'égalité.

3. (a) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que: $\deg(P) = n$, posons $P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, donc $D(P)(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k D(X^k)$, or $\forall k \geq 1, D(X^k) = (X+1)^k - X^k = kX^{k-1} + \ldots + 1$, grâce à la formule du binôme de Newton, donc $\deg(D(X^k)) = k-1$, et $\mathrm{co}(D(X^k)) = k$, et donc $\deg(D(P)) = n-1$ et $\mathrm{co}(D(P)) = na_n$, où $a_n = co(P)$.

   (b) $D(\mathbb{R}_n[X]) \subset \mathbb{R}_{n-1}[X]$, d'aprés la question précèdente, en particulier $D(\mathbb{R}_n[X]) \subset \mathbb{R}_n[X]$, donc $\mathbb{R}_n[X]$ est stable par D.

4. D_n est la restriction de D sur $\mathbb{R}_n[X]$, donc $\mathrm{Ker}(D_n) = \mathrm{Ker}(D) \cap \mathbb{R}_n[X] = \mathbb{R}_0[X]$. la formule du rang s'écrit alors : $n+1 = \dim(\mathbb{R}_n[X]) = \dim(\mathrm{Ker}(D_n) + dim(\mathrm{Im}(D_n)) = \dim(\mathbb{R}_0[X]) + dim(\mathrm{Im}(D_n)) = 1 + dim(\mathrm{Im}(D_n))$, d'où $\dim(\mathrm{Im}(D_n)) = n = \dim(\mathbb{R}_{n-1}[X])$, or $\mathrm{Im}(D_n) = D(\mathbb{R}_n[X]) \subset \mathbb{R}_{n-1}[X]$, d'où l'égalité.

5. Soit $Q \in \mathbb{R}[X]$, posons $\deg(Q) = n-1$ avec $n \geq 1$, donc $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X] = \mathrm{Im}(D_n)$, d'où $\exists P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que: $Q = D_n(P) = D(P)$, d'où D est surjective.

6. (a) $P \in F \cap \mathrm{Ker}(D) \implies P(0) = 0$ et P polynôme constante $\implies P = 0$, donc $F \cap \mathrm{Ker}(D) = \{0\}$.

   D'autre part : $\forall P \in \mathbb{R}[X]$, on peut écrire $P(X) = \underbrace{a_0}_{\in \mathrm{Ker}(D)} + \underbrace{\sum_{k=1}^{n} a_k X^k}_{\in F}$

   (b) <u>Existence</u> : Soit $Q \in \mathbb{R}[X]$, comme D est surjective, alors $\exists P_0 \in \mathbb{R}[X]$ tel que: $D(P_0) = Q$, posons $P(X) = P_0(X) - P_0(0)$, donc $P(0) = 0$ et $D(P) = D(P_0 - a) = D(P_0) - D(a) = D(P_0) = Q$ où $a = P_0(0)$.

Unicité : Supposons qu'il existe deux polynômes P_1, P_2 tel que: $D(P_1) = D(P_2) = Q$ et $P_1(0) = P_2(0) = 0$, donc $D(P_1 - P_2) = 0$ et $(P_1 - P_2)(0) = 0$, d'où $P_1 - P_2 \in F \cap \mathrm{Ker}(D) = \{0\}$, d'où $P_1 = P_2$.
$\deg(Q) = \deg(D(P)) = \deg(P) - 1$, d'où $\deg(P) = \deg(Q) + 1$.

Deuxième partie.

1. Simple récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, en utulisant la question 6.b.
2. $\deg(P_0) = 0$, donc $\deg(P_1) = 1$, or $P_1(0) = 0$, d'où $P_1(X) = aX$, or $D(P_1) = P_0$, d'où $a(X+1) - aX = 1$, d'où $a = 1$, et par suite $P_1(X) = X$.
De même $\deg(P_1) = 1$, donc $\deg(P_2) = 2$, or $P_2(0) = 0$, d'où $P_2(X) = aX^2 + bX$, or $D(P_2) = P_1$, d'où $a(X+1)^2 + b(X+1) - aX^2 - bX = X$, d'où $2aX + a + b = 1$, donc $a = \frac{1}{2}, b = -a = -\frac{1}{2}$ et par suite $P_1(X) = \frac{1}{2}(X^2 - X) = \frac{X(X-1)}{2}$.
3. Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.
Le résultat est déja vrai pour $P_1(X) = X$.
Supposons $P_{n-1}(X) = \frac{X(X-1)\dots(X-n+2)}{(n-1)!}$, et posons $P(X) = \frac{X(X-1)\dots(X-n+1)}{n!}$, on a : $P(0) = 0$ et
$$\begin{aligned} D(P) &= P(X+1) - P(X) \\ &= \frac{(X+1)X\dots(X-n+2)}{n!} - \frac{X(X-1)\dots(X-n+1)}{n!} \\ &= \frac{X(X-1)\dots(X-n+2)}{n!}(X+1-(X-n+1)) \\ &= \frac{X(X-1)\dots(X-n+2)}{(n-1)!} \\ &= P_{n-1}(X) \end{aligned}$$
Or P_n est l'unique polynôme qui vérifie cette relation, donc $P_n(X) = \frac{X(X-1)\dots(X-n+1)}{n!}$.
4. Comme $\mathrm{Card}(P_0, \dots, P_n) = n + 1 = \dim(R_n[X])$, pour montrer que c'est une base il suffit alors de montrer qu'elle est libre.
En effet, on va raisonner par récurrence.
Pour $n = 1$, il est clair que $\{P_0(X) = 1\}$ est libre.
Supposons $(P_0, \dots, P_n)$ est libre et montrons que $(P_0, \dots, P_{n+1})$ l'est

aussi.
Pour cela on suppose qu'ils existent des nombres réels $(\lambda_i)_{0\leq i\leq n+1}$ tel que: $\lambda_0 P_0 + \lambda_1 P_1 + \ldots + \lambda_{n+1}P_{n+1} = 0$, donc

$$\begin{aligned} D(\lambda_0 P_0 + \lambda_1 P_1 + \ldots + \lambda_{n+1}P_{n+1}) &= \lambda_0 D(P_0) + \lambda_1 D(P_1) + \ldots + \lambda_{n+1} D(P_{n+1}) \\ &= \lambda_1 P_0 + \ldots + \lambda_{n+1} P_n \\ &= 0 \end{aligned},$$

car $D(P_0) = 0, D(P_k) = P_{k-1}, \quad \forall 1 \leq k \leq n+1$, or la famille $(P_0, \ldots, P_n)$ est libre, d'où $\lambda_1 = \ldots = \lambda_{n+1} = 0$, et par suite $\lambda_0 P_0 = \lambda_0 = 0$.

5. On rappelle d'abord que si on fait la division euclidienne par un polynôme de degré 1, on obtient une constante dans le reste.
Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que: $\deg(P) \leq n$
Faisons la division euclidienne de P, par X, on obtient $P(X) = XQ_0(X) + a_0$, avec $\deg(Q_0) = \deg(P) - 1 \leq n-1$.
Faisons aprés la division euclidienne de Q_0 par $\dfrac{X-1}{2}$, on obtient :
$Q_0(X) = \dfrac{X-1}{2}Q_1(X) + a_1$ tel que: $\deg(Q_1) = \deg(Q_0) - 1 \leq n-2$, en particulier :

$$\begin{aligned} P(X) &= \frac{X(X-1)}{2}Q_1(X) + a_1 X + a_0 \\ &= P_2(X)Q_1(X) + a_1 P_1(X) + a_0 P_0(X) \end{aligned}.$$

Aprés on fera la division euclidienne de Q_1 par $\dfrac{X-2}{3}$, on obtient :
$Q_1(X) = \dfrac{X-2}{2}Q_2(X) + a_2$ tel que: $\deg(Q_2) = \deg(Q_2) - 1 \leq n-3$, en particulier : $P(X) = P_3(X)Q_2(X) + a_2 P_2(X) + a_1 P_1(X) + a_0 P_0(X)$.
Et ainsi de suite, jusqu'à avoir $\deg(Q_n) \leq -1$, donc $Q_n = 0$ et par suite $P(X) = a_n P_n(X) + \ldots + a_1 P_1(X) + a_0 P_0(X)$

6. $X^2 = X.X, X = \dfrac{X-1}{2} + \dfrac{1}{2}$, donc :
$X^2 = \dfrac{X(X-1)}{2} + \dfrac{1}{2}X = P_2(X) + \dfrac{1}{2}P_1(X)$.

$$X^3 = X.X^2,\ X^2 = 2X\frac{X-1}{2} + 1, X^3 \begin{aligned} &= 2X\frac{X(X-1)}{2} + X \\ &= 2XP_2(X) + P_1(X) \end{aligned},$$

et enfin $2X = 6\dfrac{X-2}{3} + 1$, d'où

$$\begin{aligned} X^3 &= \left(6\frac{X-2}{3} + 1\right)P_2(X) + P_1(X) \\ &= 6P_3(X) + P_2(X) + P_1(X) \end{aligned}.$$

7. (a) Découle de la question 6.b) de la 1ère partie pour $Q(X) = X^n$.

(b) $D(A_n) = X^n \implies A_n(X+1) - A_n(X) = X^n$, donc pour $0 \leq k \leq p$, on a : $A_n(k+1) - A_n(k) = k^n$, d'où
$$\begin{aligned} S_{n,p} &= \textstyle\sum_{k=0}^{p} k^n \\ &= \textstyle\sum_{k=0}^{p} A_n(k+1) - A_n(k) \\ &= A_n(p+1) - A_n(0) \\ &= A_n(p+1) \end{aligned}$$

(c) On a : $D\left(\sum_{k=0}^{n} \alpha_k P_{k+1}\right) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k D(P_{k+1}) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k P_k = X^n$, d'autre part $\sum_{k=0}^{n} \alpha_k P_{k+1}(0) = 0$, car $P_{k+1}(0) = 0, \quad \forall 0 \leq k \leq n$, de plus $\deg\left(\sum_{k=0}^{n} \alpha_k P_{k+1}\right) = \deg(P_{n+1}) \leq n+1$, or A_n est l'unique polynôme de $\mathbb{R}_{n+1}[X]$ qui vérifie cette relation, donc $\sum_{k=0}^{n} \alpha_k P_{k+1} = A_n$.

(d) On a : $X^2 = P_2(X) + \dfrac{1}{2}P_1(X)$, d'où $A_2 = P_3(X) + \dfrac{1}{2}P_2(X)$.
Et aussi, $X^3 = 6P_3(X) + P_2(X) + P_1(X)$, donc :
$A_3 = 6P_4(X) + P_3(X) + P_2(X)$.

(e) $S_{2,p} = A_2(p+1) = P_3(p+1) + \dfrac{1}{2}P_2(p+1)) = \dfrac{p(p+1)(2p+1)}{12}$.
$S_{3,p} = 6P_4(p+1) + P_3(p+1) + P_2(p+1) = \dfrac{p(p+1)(3p^2-7p+10)}{12}$,
aprés toute simplification en utilisant les relations : $P_2(X) = \dfrac{X(X-1)}{2}, P_3(X) = \dfrac{X(X-1)(X-2)}{6}, P_4(X) = \dfrac{X(X-1)(X-2)(X-3)}{12}$.

Fin.