ROYAUME DU MAROC

Ministère de l'Éducation Nationale
et de la Jeunesse

Ministère de l'Enseignement
Supérieur, de la Formation des Cadres
et de la Recherche Scientifique

Concours National Commun d'Admission aux Grandes Écoles d'Ingénieurs

Session 2003

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES I

Durée 4 heures

Concours **TSI**

Cette épreuve comporte 3 pages au format A4, en plus de cette page de garde
L'usage de la calculatrice est *interdit*

L'énoncé de cette épreuve, particulière aux candidats du concours TSI,
comporte 3 pages.
L'usage de la calculatrice est interdit .

Les candidats sont informés que la précision des raisonnements ainsi que le soin apporté à la rédaction seront des éléments pris en compte dans la notation. Les candidats pourront admettre et utiliser le résultat d'une question non résolue s'ils l'indiquent clairement sur la copie. Il convient en particulier de rappeler avec précision les $\boxed{\text{références}}$ *des questions abordées.*

EXERCICE

On considère la fonction

$$f : t \mapsto e^{-t^2}$$

et, pour $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$\widehat{f}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ixt} f(t)\, dt.$$

1. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, dt$ est convergente et en déduire que, pour tout réel x, $\hat{f}(x)$ a un sens.
2. Montrer que $\hat{f}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et qu'elle satisfait l'équation différentielle
$$y' + \frac{x}{2}\, y = 0. \qquad (1)$$
3. Résoudre l'équation différentielle (1) et donner l'expression de $\hat{f}$ en admettant que
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, dt = \sqrt{\pi}.$$

PROBLÈME 1

Dans ce problème, g désigne la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(t) = \frac{1}{\operatorname{ch} t}.$$

1. Soient $\alpha,\ \beta$ et A des réels avec $A > 0$.
   (a) Calculer l'intégrale
   $$\int_0^A e^{(\alpha+i\beta)t}\, dt.$$
   (b) En déduire les valeurs des intégrales
   $$\int_0^A e^{\alpha t} \cos \beta t\, dt \quad \text{et} \quad \int_0^A e^{\alpha t} \sin \beta t\, dt.$$
   (c) Si p est un réel strictement positif, montrer que l'intégrale
   $$\int_0^{+\infty} e^{-pt} \cos \beta t\, dt$$
   est convergente et expliciter sa valeur à l'aide de β et de p.

2. Montrer que, pour tout réel x, l'intégrale
$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\cos xt\, dt$$
est absolument convergente.

Dans la suite, on pose
$$\hat{g}(x) = \int_0^{+\infty} g(t)\cos xt\, dt, \quad x \in \mathbb{R}.$$

3. (a) Montrer que, pour tout réel x et tout entier naturel $n \geqslant 1$,
$$\hat{g}(x) = 2\sum_{k=0}^{n}(-1)^k \int_0^{+\infty} e^{-(2k+1)t}\cos(xt)\, dt + 2(-1)^{n+1}\int_0^{+\infty} \frac{e^{-(2n+3)t}}{1+e^{-2t}}\cos(xt)\, dt.$$
   (b) Montrer que, pour tout réel x et tout entier naturel $n \geqslant 1$,
$$\left|\int_0^{+\infty} \frac{e^{-(2n+3)t}}{1+e^{-2t}}\cos(xt)\, dt\right| \leqslant \frac{1}{2n+3},$$
   et en déduire soigneusement que
$$\hat{g}(x) = 2\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \int_0^{+\infty} e^{-(2n+1)t}\cos(xt)\, dt.$$
   (c) Exprimer l'intégrale intervenant dans l'expression précédente et conclure que
$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad \hat{g}(x) = 2\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{2n+1}{x^2+(2n+1)^2}.$$

4. Soit x un réel ; on désigne par h la fonction 2π-périodique, impaire et définie pour $t \in]0,\pi[$ par
$$h(t) = \mathrm{ch}(xt).$$
   (a) Calculer les coefficients de Fourrier a_n et b_n de la fonction h.
   (b) En précisant le théorème utilisé dont on vérifiera les hypothèses dans ce cas, donner la valeur de la somme de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} b_n \sin nt$, pour tout $t \in [0,\pi]$.
   (c) Que devient cette somme pour $t = \frac{\pi}{2}$?

5. Montrer alors que
$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \quad \hat{g}(x) = \frac{\pi}{2\,\mathrm{ch}(\frac{\pi}{2}x)}.$$
(on rappelle la formule $\mathrm{ch}(\gamma) = 2\,\mathrm{ch}^2(\frac{\gamma}{2}) - 1$, pour $\gamma \in \mathbb{R}$)

Problème 2
Sur l'équation des cordes vibrantes

Dans ce problème, $\mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ (resp. $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$) désigne l'espace vectoriel des fonctions réelles de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{R}^2$), et c est un réel strictement positif.

On s'intéresse à l'équation aux dérivées partielles
$$\text{(I)} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0,$$
où $f:\ (x,t) \mapsto f(x,t)$ est une fonction inconnue élément de $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$.

A- Résolution par la méthode de D'Alembert

1. Soit $h \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$; montrer que $\dfrac{\partial^2 h}{\partial v \partial u} = 0$ si et seulement s'il existe deux fonctions F et G, éléments de $\mathcal{C}^2(\mathbb{R})$, telles que, pour tout couple (u, v) de $\mathbb{R}^2$, $h(u, v) = F(u) + G(v)$.

2. Soit $\Psi : (x, t) \mapsto (u, v) = (x - ct, x + ct)$.

   (a) Vérifier que Ψ est un automorphisme de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$.
   Dans la suite, Φ désigne l'automorphisme réciproque de Ψ.

   (b) Prouver que l'application $\Theta : f \mapsto f^* = f \circ \Phi$ est un automorphisme de $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$.

3. Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$ une solution de (I).

   (a) Calculer $\dfrac{\partial f^*}{\partial u}$, puis $\dfrac{\partial^2 f^*}{\partial v \partial u}$.

   (b) En déduire que f est de la forme $f : (x, t) \mapsto F(x - ct) + G(x + ct)$ où F et G sont deux éléments quelconque de $\mathcal{C}^2(\mathbb{R})$.

4. Soit φ un élément de $\mathcal{C}^2(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe un unique élément f de $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$, solution de (I), que l'on exprimera en fonction de φ, satisfaisant aux conditions initiales suivantes :

$$(1) \quad \begin{cases} \forall\, x \in \mathbb{R},\ f(x, 0) = \varphi(x) & \text{(position initiale au temps } t = 0) \\ \forall\, x \in \mathbb{R},\ \dfrac{\partial f}{\partial t}(x, 0) = 0 & \text{(corde au repos au temps } t = 0) \end{cases}$$

B- Solutions stationnaires vérifiant des conditions aux limites

Une solution f de (I) est dite stationnaire s'il existe deux fonctions g et h de $\mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ telles que

$$\forall\, (x, t) \in \mathbb{R}^2,\ f(x, t) = g(x)h(t).$$

1. Soit λ une constante réelle. On suppose que g et h sont deux éléments de $\mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ vérifiant le système

$$(S_\lambda) \quad \begin{cases} g'' = \lambda g \\ h'' = \lambda c^2 h \end{cases}$$

   Établir que la fonction $f : (x, t) \mapsto g(x)h(t)$ est solution de (I).

2. Réciproquement, on suppose que g et h sont deux éléments de $\mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ tels que la fonction $(x, t) \mapsto g(x)h(t)$ soit une solution de (I) non identiquement nulle.

   Prouver l'existence d'un réel λ tel que g et h soient solution du système (S_λ).

3. Soit a un réel strictement positif.

   (a) Résoudre l'équation différentielle $y'' = \mu y$ selon les valeur du réel μ.
   On distinguera les trois cas $\mu = 0,\ \mu > 0$ et $\mu < 0$.

   (b) Déterminer tous les réels μ de sorte que l'équation différentielle $y'' = \mu y$ admette une solution non nulle sur $\mathbb{R}$ satisfaisant la condition aux limites $y(0) = y(a) = 0$.
   Expliciter l'ensemble des solutions correspondant à chacune de ces valeurs de μ.

   (c) Déterminer alors l'ensemble des solutions stationnaires f de (I) vérifiant la condition aux limites

$$(2) \quad \forall\, t \in \mathbb{R},\ f(0, t) = f(a, t) = 0.$$

FIN DE L'ÉPREUVE