ROYAUME DU MAROC

Ministère de l'Éducation Nationale
Enseignement Secondaire et Technique

Ministère de l'Enseignement
Supérieur, de la Formation des Cadres
et de la Recherche Scientifique

Concours National Commun d'Admission aux Grandes Écoles d'Ingénieurs

Session 2002

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES II

Durée 4 heures

Concours **TSI**

Cette épreuve comporte 4 pages au format A4, en plus de cette page de garde
L'usage de la calculatrice est *interdit*

L'énoncé de cette épreuve, particulière aux candidats du concours TSI,
comporte 4 pages.
L'usage de la calculatrice est interdit .

Les candidats sont informés que la précision des raisonnements ainsi que le soin apporté à la rédaction seront des éléments pris en compte dans la notation. Les candidats pourront admettre et utiliser le résultat d'une question non résolue s'ils l'indiquent clairement sur la copie. Il convient en particulier de rappeler avec précision les références *des questions abordées.*

Notations et définitions

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On note $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ l'algèbre des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) ; la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est notée I_n.

Soit $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ avec $A_k = (a_{ij}^{(k)})$ pour tout $k \in \mathbb{N}$; on dit que cette suite de matrices converge vers la matrice $B = (b_{ij})$ si pour tout couple (i, j) d'éléments de $\{1, \dots , n\}$, la suite $(a_{ij}^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$, d'éléments de $\mathbb{K}$, converge vers b_{ij}.

On désigne enfin par $\mathcal{K}_n$ l'ensemble des matrices $A = (a_{ij})$ dont tous les coefficients sont **positifs ou nuls** et vérifient :

$$\forall\, i \in \{1, \dots , n\}, \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} = 1.$$

1ère Partie
Un exemple et quelques résultats généraux

1. **Le cas de la dimension** 2.
   Soit $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On pose $a = a_{11}$ et $b = a_{21}$.
   (a) Donner une condition nécessaire et suffisante sur a_{12}, a_{22}, a et b pour que A soit dans $\mathcal{K}_2$.
   (b) Dans cette question et la suivante, on suppose que $A \in \mathcal{K}_2$ et que $a-b \neq 1$; déterminer les valeurs propres de A ainsi que les sous-espaces propres associés. A est elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$? Si oui, la diagonaliser.
   (c) Étdier alors la convergence et calculer la limite éventuelle de la suite $(A^p)_{p\in\mathbb{N}}$.

2. **Quelques résultats généraux**
   (a) Montrer que si A et B sont des éléments de $\mathcal{K}_n$ alors AB aussi.
   (b) Montrer que si une suite $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathcal{K}_n$ converge vers une matrice B alors $B \in \mathcal{K}_n$.
   (c) Soit $A = (a_{ij})$ un élément de $\mathcal{K}_n$; on suppose que A est en plus une matrice orthogonale.
   - Montrer que pour tout $(i, j) \in \{1, \dots , n\}^2$, $a_{ij} = 0$ ou $a_{ij} = 1$.
   - Montrer que chaque ligne de A contient un seul élément non nul. Quelle est sa valeur ?
   - On note a_{ij_i} l'unique élément non nul de la ligne i, $i \in \{1, \dots , n\}$. Montrer que l'application $\sigma : \; i \mapsto j_i$ est une bijection de l'ensemble $\{1, \dots , n\}$ sur lui même et conclure que A représente la matrice de passage de la base $(e_{\sigma(1)}, \dots , e_{\sigma(n)})$ de $\mathbb{R}^n$ à sa base canonique.

(d) Soit r un entier naturel $\geqslant 2$; montrer par récurrence que si $z_1, \dots, z_r$ sont des complexes tels que $\left|\sum_{j=1}^{r} z_j\right| = \sum_{j=1}^{r} |z_j|$ alors il existe un complexe non nul z et des réels positifs $\alpha_1, \dots, \alpha_r$ tels que

$$\forall\, j \in \{1, \dots, r\}, \quad z_j = \alpha_j z.$$

2ème Partie
Étude d'une suite d'éléments de $\mathcal{K}_n$

Dans cette partie, $A = (a_{ij})$ désigne un élément de $\mathcal{K}_n$; on suppose de plus que tous les coefficients de A sont strictement positifs :

$$\forall\, (i, j) \in \{1, \dots, n\}^2, \quad a_{ij} > 0.$$

On note $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices colonnes à n lignes, et à coefficients réels. La base canonique de cet espace vectoriel se notera $(\mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_n)$.

On note enfin $w = \min\{a_{ij} \ ; \ 1 \leqslant i, j \leqslant n\}$ et pour tout $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, de composantes $y_1, \dots, y_n$, posons

$$M(Y) = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} y_i \quad \text{et} \quad m(Y) = \min_{1 \leqslant i \leqslant n} y_i.$$

1. Dans cette question et la suivante, on considère un élément Y de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, de composantes $y_1, \dots, y_n$.
   (a) Montrer que $m(Y) \leqslant m(AY) \leqslant M(AY) \leqslant M(Y)$.
   (b) En déduire que les suites $\big(M(A^kY)\big)_{k\in\mathbb{N}}$ et $\big(m(A^kY)\big)_{k\in\mathbb{N}}$ sont monotones.

2. (a) Montrer que

$$\forall\, i \in \{1, \dots, n\}, \quad M(Y) - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j \geqslant w[M(Y) - m(Y)]$$

   puis en déduire que

$$M(AY) \leqslant w\, m(Y) + (1 - w)M(Y).$$

   (b) Montrer de même que

$$m(AY) \geqslant wM(Y) + (1 - w)m(Y).$$

   (c) Conclure que

$$0 \leqslant M(AY) - m(AY) \leqslant (1 - 2w)(M(Y) - m(Y)),$$

   et que les suites $\big(M(A^kY)\big)_{k\in\mathbb{N}}$ et $\big(m(A^kY)\big)_{k\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes. Qu'en déduit-on ?

3. Pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$, on désigne par ℓ_j la limite commune aux suites $\big(M(A^k\mathcal{E}_j)\big)_{k\in\mathbb{N}}$ et $\big(m(A^k\mathcal{E}_j)\big)_{k\in\mathbb{N}}$, et on pose $A^k = (a_{ij}^{(k)})$ pour tout entier naturel k.
   (a) Pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$ et tout entier naturel k, exprimer les composantes du vecteur $A^k\mathcal{E}_j$.
   (b) Montrer que pour tout $(i, j) \in \{1, \dots, n\}^2$, la suite $\left(a_{ij}^{(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ_j.
   (c) Conclure que la suite $(A^k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers un élément de $\mathcal{K}_n$ qu'on exprimera à l'aide de $\ell_1, \dots, \ell_n$.

3$^{\text{ème}}$ Partie
Quelques propriétés de matrices appartenant à $\mathcal{K}_n$

Dans cette partie, $A = (a_{ij})$ désigne un élément de $\mathcal{K}_n$ et u l'endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ canoniquement associé à la matrice A. On note $(e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{C}^n$ et on pose $e = e_1 + \cdots + e_n$.

Soit λ une valeur propre de u et $x = (x_1, \ldots, x_n)$ un **vecteur propre** associé.

A- Premiers résultats

1. Montrer que 1 est une valeur propre de u et déterminer un vecteur propre associé.
2. En faisant une traduction matricielle de l'égalité $u(x) = \lambda x$ et en choisissant un indice p tel que $|x_p| = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i|$, montrer que $|\lambda| \leqslant 1$.
3. Dans la suite, on pose $m = \min\{a_{ii}\ ;\ 1 \leqslant i \leqslant n\}$.
   (a) En utilisant une méthode analogue à la précédente, montrer que $|\lambda - m| \leqslant 1 - m$.
   (b) Dessiner le cercle $\mathcal{C}(0, 1)$, de centre 0 et de rayon 1, et le disque fermé $\overline{D}(m, 1 - m)$ sur un même graphique. (*on rappelle que* $\overline{D}(m, 1 - m) = \{z \in \mathbb{C},\ |z - m| \leqslant 1 - m\}$.)
4. On suppose que $m > 0$; montrer que si λ est de module 1 alors $\lambda = 1$.
5. On suppose que $m > \frac{1}{2}$. Vérifier que $0 \notin \overline{D}(m, 1 - m)$ et conclure que A est une matrice inversible.

B- Toute valeur propre de A de module 1 est une racine de l'unité

Dans la suite de cette partie, on suppose que $|\lambda| = 1$ et on choisit $i_0 \in \{1, \ldots, n\}$ tel que $|x_{i_0}| = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i|$. On pose $I_0 = \{j \in \{1, \ldots, n\} /\quad a_{i_0 j} x_j \neq 0\}$.

1. (a) Exprimer $\sum\limits_{j \in I_0} a_{i_0 j} x_j$ à l'aide de λ et x_{i_0} et en déduire que I_0 est non vide.
   (b) Montrer que $\sum\limits_{j \in I_0} a_{i_0 j} = 1$.
   (c) Vérifier que $\left|\sum\limits_{j \in I_0} a_{i_0 j} x_j\right| = \sum\limits_{j \in I_0} |a_{i_0 j} x_j| = |x_{i_0}|$ et en déduire, d'une part que
   $$\forall\, j \in I_0,\ |x_j| = |x_{i_0}|,$$
   d'autre part, en utilisant un résultat précédent, justifier l'existence de $z \in \mathbb{C}$ et d'une famille $(\alpha_j)_{j \in I_0}$ de réels positifs tels que
   $$\forall\, j \in I_0,\ a_{i_0 j} x_j = \alpha_j z.$$
   (d) Déduire de ce qui précède que
   $$\forall\, (j, k) \in I_0^2,\ x_j = x_k$$
   et que
   $$\lambda x_{i_0} = x_{i_1},\ i_1 \in \{1, \ldots, n\}.$$

2. (a) Montrer qu'on peut construire une suite finie $(j_0, j_1, \ldots, j_n)$ d'éléments de $\{1, \ldots, n\}$ telle que
$$|x_{j_0}| = \ldots = |x_{j_n}| = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i|$$
et que
$$\forall\, k \in \{1, \ldots, n\},\ \lambda x_{j_{k-1}} = x_{j_k}$$
(b) En déduire alors qu'il existe $q \in \{1, \ldots, n\}$ tel que $\lambda^q = 1$.

3. Dans cette question, on suppose que tous les coefficients de A sont strictement positifs :
$$\forall\, (i, j) \in \{1, \ldots, n\}^2, \quad a_{ij} > 0.$$
En utilisant la question 1. (d) précédente, montrer que l'espace propre de u, associé à la valeur propre 1, est égal à $\mathbb{C}.e$ où $e = (1, \ldots, 1)$.

FIN DE L'ÉPREUVE