ROYAUME DU MAROC

Ministère Chargé de l'Enseignement
Secondaire et Technique

Ministère de l'Enseignement
Supérieur, de la Formation des Cadres
et de la Recherche Scientifique

Concours National Commun d'Admission aux Grandes Écoles d'Ingénieurs

Session 2000

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES II

Durée 4 heures

Concours **TSI**

Cette épreuve comporte 4 pages au format A4, en plus de cette page de garde
L'usage de la calculatrice est *interdit*

L'énoncé de cette épreuve, particulière aux candidats du concours TSI,
comporte 4 pages.
L'usage de la calculatrice est interdit .

Les candidats sont informés que la précision des raisonnements ainsi que le soin apporté à la rédaction seront des éléments pris en compte dans la notation. Les candidats pourront admettre et utiliser le résultat d'une question non résolue s'ils l'indiquent clairement sur la copie. Il convient en particulier de rappeler avec précision les références *des questions abordées.*

I - Première partie

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $x_0 = x_{n+1} = 0$ et on considère le système $(\mathcal{S}_n)$ formé des n équations :

$$(\mathcal{S}_n) \qquad -x_{k+1} + 2x_k - x_{k-1} = y_k, \;\; k \in \{1, 2, \ldots, n\},$$

où les x_k sont les inconnues et les y_k des nombres réels connus.

1. (a) Écrire la matrice $A_n \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ du système $(\mathcal{S}_n)$.
   Résoudre le système dans le cas où $y_k = 0$ pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$.
   (b) Pour $(y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, que peut-on conclure sur l'existence et l'unicité des solutions du système $(\mathcal{S}_n)$? Que peut-on alors dire de la matrice A_n ?

2. Soit $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ fixé, on suppose que $y_j = 1$ et $y_k = 0$ si $k \neq j$. Calculer la solution du système $(\mathcal{S}_n)$ et en déduire que :

$$A_n^{-1} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{n+1} & 1 - \frac{2}{n+1} & \ldots & 1 - \frac{n}{n+1} \\ 2(1 - \frac{1}{n+1}) & 2(1 - \frac{2}{n+1}) & \ldots & 2(1 - \frac{n}{n+1}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ n(1 - \frac{1}{n+1}) & n(1 - \frac{2}{n+1}) & \ldots & n(1 - \frac{n}{n+1}) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 \\ -1 & 0 & \ldots & 0 \\ -2 & -1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -(n-1) & -(n-2) & \ldots & 0 \end{pmatrix}.$$

3. On suppose à présent que pour tout $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ on a $y_k = 1$. Calculer la solution du système $(\mathcal{S}_n)$.

4. Montrer que pour tout nombre réel θ, et tout entier $k \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$-\sin((k-1)\theta) + 2\sin(k\theta) - \sin((k+1)\theta) = 2(1 - \cos(\theta))\sin(k\theta).$$

   En déduire que A_n possède n valeurs propres distinctes et trouver pour chacune un vecteur propre associé.

   Indication : On pourra chercher des vecteurs propres de la forme $\begin{pmatrix} \sin(\theta) \\ \vdots \\ \sin(n\theta) \end{pmatrix}$.

II - Seconde partie

On fixe un entier $n \geqslant 2$ et $a = (a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$, $b = (b_0, b_1, \ldots, b_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$ et $c = (c_1, c_2, \ldots, c_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$.

Pour $k \in \{2, 3, \ldots, n\}$, on considère la matrice carrée d'ordre k :

$$T_k = T_k(a,b,c) = \begin{pmatrix} b_0 & c_1 & 0 & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ a_1 & b_1 & c_2 & 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & a_2 & b_2 & c_3 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & a_{k-2} & b_{k-2} & c_{k-1} \\ 0 & \ldots & \ldots & \ldots & 0 & a_{k-1} & b_{k-1} \end{pmatrix}.$$

On note $\delta_0 = 1$, $\delta_1 = b_0$ et $\delta_k = \det(T_k)$ pour tout $k \in \{2, \ldots, n\}$.

1. Pour $k \in \{2, \ldots, n\}$, exprimer δ_k en fonction de δ_{k-1} et de δ_{k-2}.

2. Pour cette question uniquement, on fixe $n = 4$, et on suppose que pour tout $k \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ on a $\delta_k \neq 0$.

   (a) En utilisant la méthode du pivot de Gauss, expliciter une matrice triangulaire inférieure $L = (l_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant 4}$, avec $l_{ii} = 1$ pour tout $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, et une matrice triangulaire supérieure $U = (u_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant 4}$ telles que $T_4 = LU$.

   (b) Montrer que cette factorisation est unique.

   (c) Déterminer la factorisation "LU" de la matrice A_4 associée au système (S_4) de la première partie.

   (d) On pose : $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}$ et $Z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{pmatrix}$.

   Résoudre les systèmes linéaires : $LZ = Y$ et $UX = Z$.

   En déduire la solution du système $A_4 X = Y$.

3. (a) Montrer que la matrice $T_n(a, b, a)$ est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

   (b) On suppose que $a_i \neq 0$ pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$. Soit λ une valeur propre de $T_n(a, b, a)$. Montrer que le sous-espace propre associé à λ est de dimension 1. Que peut-on dire des valeurs propres de $T_n(a, b, a)$?

4. (a) Trouver une formule de récurrence simple concernant le polynôme caractéristique de la matrice $T_n(a, b, a)$.

   (b) On note $I = (1, \ldots, 1) \in \mathbb{R}^{n-1}$ et $a \times c = (a_1 c_1, \ldots, a_{n-1} c_{n-1})$.

   Montrer que les matrices $T_n(a, b, c)$ et $T_n(I, b, a \times c)$ ont les mêmes valeurs propres (on pourra utiliser la question précédente).

   (c) On suppose que pour tout $i \in \{1, \ldots, n-1\}$ on a $a_i c_i > 0$.

   Montrer que $T_n(a, b, c)$ admet n valeurs propres réelles simples.

   Indication : on pourra utiliser les questions II.3.a) et II.4.b) après avoir remarqué la relation $a_i c_i = \sqrt{a_i c_i}\sqrt{a_i c_i}$.

   (d) Donner un exemple de matrice $T_3(a, b, c) \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ non diagonalisable dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

III - Troisième partie

E désigne l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels, E_n est le sous-espace vectoriel de E constitué des polynômes de degré inférieur ou égal à n.

Soit $f \;:\;]-1,1[\longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ une application continue telle que pour tout $k \in \mathbb{N}$, l'intégrale $\displaystyle\int_{-1}^{1} x^k f(x)\,dx$ soit convergente.

1. Soit $(P,Q) \in E^2$, on définit $< P|Q > = \displaystyle\int_{-1}^{1} P(x)Q(x)f(x)dx$.
   (a) Montrer que l'application $(P,Q) \mapsto < P|Q >$ est un produit scalaire sur E.
   (b) Justifier l'existence d'une famille orthonormale $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E telle que pour tout $k \in \mathbb{N}$ on ait $deg(P_k) = k$.
   (c) Soit $k \in \mathbb{N}^*$, montrer que pour tout $Q \in E_{k-1}$ on a $< P_k|Q > = 0$.
2. Soit $k \geqslant 2$ et $j \leqslant k-2$. Montrer que $< XP_k|P_j > = 0$.
3. Soit $k \in \mathbb{N}$, on pose $P_k = \displaystyle\sum_{j=0}^{k} \alpha_{k,j}X^j$.

   Établir l'existence de deux suites réelles $(a_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ et $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ telles que :

$$(1)\quad \begin{cases} XP_0 = a_1P_1 + b_0P_0 \\ XP_k = a_{k+1}P_{k+1} + b_kP_k + a_kP_{k-1} \quad \text{pour } k \geqslant 1. \end{cases}$$

   avec

$$a_k = \frac{\alpha_{k-1,k-1}}{\alpha_{k,k}} \;\text{ pour } k \geqslant 1,\quad b_0 = -\frac{\alpha_{1,0}}{\alpha_{1,1}},\; b_k = \frac{\alpha_{k,k-1}}{\alpha_{k,k}} - \frac{\alpha_{k+1,k}}{\alpha_{k+1,k+1}} \;\text{ pour } k \geqslant 1.$$

4. Soit $k \in \mathbb{N}^*$.
   (a) Calculer $\displaystyle\int_{-1}^{1} P_k(x)f(x)dx$ et en déduire que P_k ne peut garder un singe constant sur $]-1,1[$ et qu'il y admet donc au moins une racine d'ordre de multiplicité impaire.
   (b) soient $x_1,\ldots,x_r$ les racines distinctes de P_k d'ordre de multiplicité impaire et appartenant à $]-1,1[$, on pose $Q = \displaystyle\prod_{i=1}^{r}(X-x_i)$.

   • Donner le degré du polynôme QP_ket montrer que l'application $t \mapsto Q(t)P_k(t)$ garde un signe constant sur $[-1,1]$.

   • Montrer par un raisonnement par l'absurde que $r = k$ et conclure que P_k admet k racines simples dans $]-1,1[$.
5. Soit $n \geqslant 2$. À la famille $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$ on associe la matrice $T_n(a,b,a) = T_n$ où les vecteurs $a = (a_1,a_2,\ldots,a_{n-1})$ et $b = (b_0,b_1,\ldots,b_{n-1})$ ont pour composantes les coefficients définis par la relation de récurrence (1) de la question III.3.
   (a) Pour tout réel x, calculer le produit $T_n \begin{pmatrix} P_0(x) \\ \vdots \\ P_{n-1}(x) \end{pmatrix}$.

(b) Montrer que pour tout entier $n \geqslant 2$ les racines de P_n sont les valeurs propres de T_n.

6. On note $\arccos$ la bijection réciproque de la fonction $\cos\ :\ [0,\pi] \to [-1,1]$. On admet que la restriction à $]-1,1[$ de $\arccos$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$.

   Jusqu'à la fin du problème, on pose
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\ \forall x \in]-1,1[.$$

   Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in]-1,1[$, on définit $t_k(x) = \cos(k \arccos(x))$. Ces t_k sont définis de manière équivalente par
$$t_k(\cos(\theta)) = \cos(k\theta),\ \forall \theta \in]0,\pi[.$$

   (a) Donner une expression explicite de t_0, t_1 et t_2.
   Montrer que :
$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \forall x \in]-1,1[,\ \ t_{k+1}(x) = 2xt_k(x) - t_{k-1}(x).$$
   En déduire que t_k est une fonction polynôme de degré k et donner son coefficient dominant.

   (b) En utilisant le changement de variable $\theta = \arccos(x)$, calculer $< t_n | t_m >$ pour (n,m) dans $\mathbb{N}^2$ (on distinguera les cas $n = m$ et $n \neq m$).
   Que peut-on conclure ?

   (c) À l'aide de la famille $(t_k)_{k\in\mathbb{N}}$, expliciter une famille orthonormale $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de l'espace préhilbertien $(E, < \mid >)$.

   (d) Pour tout entier $n \geqslant 2$, déterminer la matrice T_n associée à la famille $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$. Calculer les vecteurs propres et les valeurs propres de T_n.

FIN DE L'ÉPREUVE