

Ce sujet se compose de deux problèmes indépendants l'un de l'autre.

## I Décompositions de matrices

### Notations et rappels

Dans tout ce problème,  $n$  désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.

L'espace vectoriel  $\mathbb{R}^n$  est muni de sa structure euclidienne canonique et on note  $\langle \cdot | \cdot \rangle$  son produit scalaire.

$\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  désigne l'espace vectoriel des matrices carrées de taille  $n$  à coefficients réels.

$I_n$  désigne la matrice identité de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .

La transposée d'une matrice  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  est notée  $M^\top$ .

On rappelle qu'une matrice  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  est orthogonale lorsque  $M^\top M = MM^\top = I_n$ .

Une matrice  $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  est triangulaire supérieure lorsque  $a_{i,j} = 0$  dès que  $1 \leq j < i \leq n$ .

On pourra utiliser sans preuve les deux résultats suivants :

- le produit de deux matrices triangulaires supérieures est une matrice triangulaire supérieure ;
- l'inverse d'une matrice triangulaire supérieure inversible est triangulaire supérieure.

### Objectifs

Ce problème étudie deux types de décompositions matricielles, d'abord pour une matrice inversible, puis pour une matrice dont le polynôme caractéristique est scindé sur  $\mathbb{R}$ .

#### I.A – Un exemple introductif

Soit  $P = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 2 & 0 & -1 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ .

On note  $c_1, c_2$  et  $c_3$  les colonnes de  $P$  considérées comme des vecteurs de  $\mathbb{R}^3$ .

**Q 1.** Justifier que la matrice  $P$  est inversible. En déduire que la famille  $\mathcal{B}_1 = (c_1, c_2, c_3)$  est une base de  $\mathbb{R}^3$ .

**Q 2.** Appliquer le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt à la base  $\mathcal{B}_1 = (c_1, c_2, c_3)$  pour construire une base orthonormée  $\mathcal{B}_2 = (u_1, u_2, u_3)$  de  $\mathbb{R}^3$ .

**Q 3.** Soit  $Q$  la matrice de passage de la base canonique  $\mathcal{B}$  de  $\mathbb{R}^3$  à la base  $\mathcal{B}_2$ . Justifier que  $Q^{-1} = Q^\top$ .

**Q 4.** Déterminer la matrice de passage  $R$  de la base  $\mathcal{B}_2$  à la base  $\mathcal{B}_1$ .

On constate que  $R$  est triangulaire supérieure à éléments diagonaux strictement positifs.

**Q 5.** Justifier que  $P = QR$ .

#### I.B – Cas général : décomposition $QR$

**Q 6.** Soit  $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  une matrice inversible. En s'inspirant de la démarche mise en place sur l'exemple, montrer qu'il existe une matrice  $Q$  orthogonale et une matrice  $R$  triangulaire supérieure à coefficients diagonaux strictement positifs telles que  $P = QR$ .

**Q 7.** Soit  $b$  un vecteur de  $\mathbb{R}^n$  et  $P$  une matrice inversible de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . Expliquer l'intérêt de la décomposition  $P = QR$ , avec  $Q$  orthogonale et  $R$  triangulaire supérieure à coefficients diagonaux strictement positifs, pour résoudre le système linéaire  $Px = b$ , d'inconnue  $x \in \mathbb{R}^n$ .

Les deux questions qui suivent permettent de démontrer l'unicité de la décomposition précédente.

**Q 8.** Soit  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  une matrice à la fois orthogonale et triangulaire supérieure à coefficients diagonaux strictement positifs. En raisonnant de proche en proche de la première à la dernière colonne de  $M$ , montrer que  $M = I_n$ .

**Q 9.** On considère quatre matrices  $Q_1, Q_2, R_1, R_2$  de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  telles que  $Q_1$  et  $Q_2$  sont orthogonales,  $R_1$  et  $R_2$  sont triangulaires supérieures à coefficients diagonaux strictement positifs et  $Q_1 R_1 = Q_2 R_2$ . Montrer que  $Q_1 = Q_2$  et  $R_1 = R_2$ .

#### I.C – Décomposition d'une matrice dont le polynôme caractéristique est scindé sur $\mathbb{R}$

**Q 10.** Soit  $A$  une matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  dont le polynôme caractéristique  $\chi_A$  est scindé sur  $\mathbb{R}$ . En utilisant la décomposition  $QR$  d'une matrice inversible bien choisie, démontrer qu'il existe une matrice  $Q \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  orthogonale et une matrice  $T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  triangulaire supérieure telles que  $A = QTQ^\top$ .

**Q 11.** Donner un exemple de matrice  $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  diagonalisable et une décomposition  $A = QTQ^\top$  avec  $Q \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  orthogonale et  $T \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  triangulaire supérieure à éléments diagonaux strictement positifs, mais non diagonale.

**Q 12.** Donner un exemple de matrice  $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  diagonalisable et une décomposition  $A = QTQ^\top$  avec  $Q \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  orthogonale et  $T \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  diagonale à éléments diagonaux strictement positifs.

## II Calcul approché d'intégrales par quadrature

### Notations et rappels

Dans tout ce problème,  $n$  désigne un entier naturel.

Pour  $0 \leq i, j \leq n$ , le symbole de Kronecker  $\delta_{i,j}$  est défini par  $\delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$

On note  $\mathbb{R}[X]$  l'ensemble des polynômes à coefficients réels et  $\mathbb{R}_n[X]$  l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à  $n$ . On identifie un polynôme et la fonction polynomiale associée, définie sur le segment  $[-1, 1]$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$ .

Pour toute fonction  $g$  continue sur  $[-1, 1]$  et à valeurs dans  $\mathbb{R}$ , on note  $N(g) = \max_{x \in [-1, 1]} |g(x)|$ .

Pour toute fonction  $g$  de classe  $\mathcal{C}^k$ , on note  $g^{(k)}$  sa dérivée  $k$ -ième.

### Objectifs

On s'intéresse dans ce problème à une méthode numérique de calcul approché de

$$I(f) = \int_{-1}^1 f(t) dt$$

pour une fonction  $f$  continue sur  $[-1, 1]$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$ . Le principe de cette méthode, dite par quadrature, consiste à approcher  $I(f)$  par une somme, pondérée par des poids  $(\omega_i)_{0 \leq i \leq n}$ , de valeurs prises par la fonction  $f$  en  $n + 1$  points distincts  $(r_0, r_1, \dots, r_n)$  de l'intervalle  $[-1, 1]$ .

On note  $r$  le  $(n + 1)$ -uplet  $(r_0, r_1, \dots, r_n)$  et  $\Sigma_r(f)$  la somme  $\sum_{k=0}^n \omega_k f(r_k)$ .

Les réels  $(r_0, \dots, r_n) \in [-1, 1]^{n+1}$  sont appelés *nœuds* de la quadrature. La performance de cette méthode d'approximation dépend du nombre de nœuds, du choix de ces nœuds et de la régularité de la fonction  $f$ . Ces trois aspects sont abordés dans ce problème.

### II.A – Méthode de quadrature

Dans cette sous-partie,  $(r_0, r_1, \dots, r_n)$  sont  $n + 1$  points distincts de l'intervalle  $[-1, 1]$ .

#### II.A.1) Détermination des poids $(\omega_i)$

Pour tout entier  $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$ , on note  $A_i(X) = \prod_{k \neq i} \frac{X - r_k}{r_i - r_k}$ .

**Q 13.** Vérifier que, pour tout couple  $(i, j) \in \llbracket 0, n \rrbracket^2$ ,  $A_i(r_j) = \delta_{i,j}$ .

**Q 14.** Démontrer que  $(A_0, A_1, \dots, A_n)$  est une base de  $\mathbb{R}_n[X]$  et donner la décomposition, dans cette base, d'un polynôme  $P$  quelconque de  $\mathbb{R}_n[X]$ .

On se propose de démontrer qu'il existe un unique  $(n + 1)$ -uplet  $(\omega_0, \dots, \omega_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$  pour lequel l'égalité

$$\int_{-1}^1 P(x) dx = \sum_{k=0}^n \omega_k P(r_k)$$

est valable pour toute fonction  $P$  polynomiale de degré inférieur ou égal à  $n$ .

On raisonne par analyse-synthèse.

#### a) Analyse

On suppose l'existence d'un tel  $(n + 1)$ -uplet  $(\omega_0, \dots, \omega_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ .

**Q 15.** Pour tout entier  $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$ , exprimer  $\omega_i$  en fonction de  $A_i$ .

**Q 16.** En déduire l'unicité de  $(\omega_0, \dots, \omega_n)$ .

#### b) Synthèse

**Q 17.** Démontrer que, pour les valeurs  $\omega_0, \dots, \omega_n$ , déterminées à la question 15, l'égalité

$$\int_{-1}^1 P(x) dx = \sum_{k=0}^n \omega_k P(r_k)$$

est valable pour toute fonction  $P$  polynomiale de degré inférieur ou égal à  $n$ .

Dans toute la suite, pour un jeu de nœuds  $r = (r_0, \dots, r_n)$  donné, on note  $Q_r$  le polynôme

$$Q_r = \prod_{k=0}^n (X - r_k).$$

Si  $(\omega_0, \dots, \omega_n)$  sont les valeurs déterminées à la question 15, on rappelle que

$$\Sigma_r(f) = \sum_{k=0}^n \omega_k f(r_k).$$

**Q 18.** On choisit  $n = 0$  et  $r_0 = 0$ . Donner l'interprétation géométrique, en termes d'aire, de  $\Sigma_r(f)$  lorsque  $f$  est positive sur  $[-1, 1]$ .

**Q 19.** On choisit  $n = 1$ ,  $r_0 = -1$  et  $r_1 = 1$ . Donner l'interprétation géométrique, en termes d'aire, de  $\Sigma_r(f)$  lorsque  $f$  est positive sur  $[-1, 1]$ .

### II.A.2) Majoration de l'erreur

On suppose  $f$  de classe  $\mathcal{C}^{n+1}$  sur  $[-1, 1]$  et on se propose de majorer l'erreur d'approximation  $|I(f) - \Sigma_r(f)|$ .

**Q 20.** Justifier l'existence de  $N(f^{(n+1)})$  et de  $N(Q_r)$ .

**Q 21.** Démontrer que  $T_{r,f} = \sum_{k=0}^n f(r_k)A_k$  est l'unique polynôme de  $\mathbb{R}_n[X]$  vérifiant  $T_{r,f}(r_i) = f(r_i)$ , pour tout entier  $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$ .

On se propose de démontrer que, pour tout réel  $x \in [-1, 1]$ ,

$$|f(x) - T_{r,f}(x)| \leq \frac{N(f^{(n+1)})N(Q_r)}{(n+1)!}. \quad (\text{II.1})$$

On suppose que  $g$  est une fonction de classe  $\mathcal{C}^{n+1}$  sur  $[-1, 1]$  s'annulant en au moins  $n+2$  points distincts de  $[-1, 1]$ .

**Q 22.** Démontrer que  $g'$  s'annule en au moins  $n+1$  points distincts de  $] -1, 1[$ .

**Q 23.** Démontrer que  $g^{(n+1)}$  s'annule en au moins un point de l'intervalle  $] -1, 1[$ .

**Q 24.** Démontrer que l'inégalité (II.1) est vérifiée si  $x \in \{r_0, \dots, r_n\}$ .

**Q 25.** On suppose que  $x \notin \{r_0, \dots, r_n\}$ . Montrer qu'il existe un réel  $\lambda_x$  pour lequel la fonction  $g_x$  définie sur  $[-1, 1]$  par

$$\forall t \in [-1, 1], \quad g_x(t) = f(t) - T_{r,f}(t) - \lambda_x Q_r(t)$$

vérifie  $g_x(x) = 0$ .

**Q 26.** En utilisant le résultat de la question 23, démontrer qu'il existe un réel  $c_x \in ] -1, 1[$  tel que

$$\lambda_x = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c_x)$$

et conclure.

**Q 27.** En déduire que  $|I(f) - \Sigma_r(f)| \leq 2 \frac{N(f^{(n+1)})N(Q_r)}{(n+1)!}$ .

## II.B – Choix d'un jeu de nœuds

### II.B.1) Nœuds équidistants

On choisit un jeu  $s = (s_0, \dots, s_n)$  de  $n+1$  nœuds équidistants dans l'intervalle  $[-1, 1]$  vérifiant  $s_0 = -1$  et  $s_n = 1$ . On cherche à minorer  $N(Q_s)$ .

**Q 28.** On pose  $h = 2/n$  et  $x = -1 + th$  avec  $t \in [0, n]$ . Exprimer  $|Q_s(x)|$  en fonction de  $\varphi_{n+1}(t) = \prod_{k=0}^n |t - k|$ .

**Q 29.** Justifier que la fonction  $\varphi_{n+1}$  admet un maximum sur  $[0, n]$  et que ce maximum est atteint sur  $[0, n/2]$ .

On admet dans la suite que ce maximum est atteint sur  $[0, 1]$ .

**Q 30.** Démontrer que  $\max_{[0,1]} \varphi_2 = \frac{2}{3\sqrt{3}}$ .

**Q 31.** Démontrer par récurrence que, pour tout entier  $n \geq 1$ ,  $\max_{[0,n]} \varphi_{n+1} \geq \frac{1}{4}(n-1)!$ .

**Q 32.** En déduire une minoration de  $N(Q_s)$ .

## II.B.2) Zéros des polynômes de Tchebychev

On cherche un nouveau jeu de nœuds  $c = (c_0, \dots, c_n)$  utilisant une famille de polynômes.

On rappelle que arccos est la fonction réciproque de la fonction  $\begin{cases} [0, \pi] & \rightarrow [-1, 1] \\ \theta & \mapsto \cos(\theta) \end{cases}$

Pour tout entier  $n \in \mathbb{N}$ , on note  $T_n : x \mapsto \cos(n \arccos(x))$ .

**Q 33.** Préciser le domaine de définition de  $T_n$ .

**Q 34.** Calculer, pour tout  $x$  dans le domaine de définition,  $T_0(x)$ ,  $T_1(x)$ ,  $T_2(x)$  et  $T_3(x)$ .

**Q 35.** Pour tout entier naturel  $n$ , calculer  $T_n(-1)$ ,  $T_n(0)$  et  $T_n(1)$ .

**Q 36.** Étudier la parité de  $T_n$  en fonction de  $n$ .

**Q 37.** Pour tout  $x$  dans le domaine de définition, démontrer que  $T_{n+1}(x) + T_{n-1}(x) = 2xT_n(x)$ .

**Q 38.** En déduire que  $T_n$  est une fonction polynomiale dont on précisera le degré et le coefficient dominant.

Pour tout entier naturel  $n$ ,  $T_n$  est le  $n$ -ième polynôme de Tchebychev.

**Q 39.** Montrer que  $T_{n+1}$  admet  $n + 1$  racines distinctes dans l'intervalle  $[-1, 1]$ .

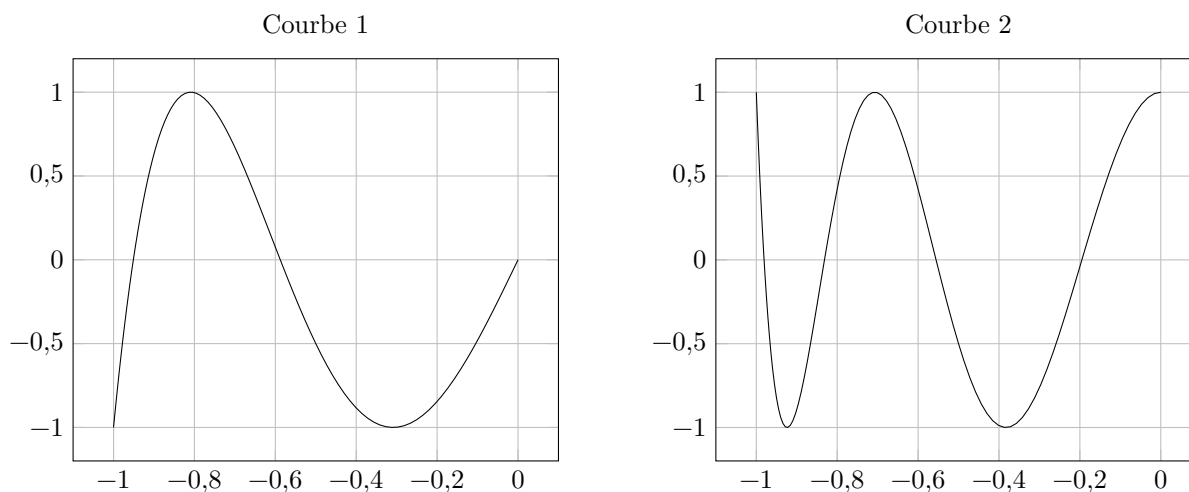
On rappelle qu'après l'exécution de l'instruction Python `import numpy as np`, `np.pi` désigne la constante  $\pi$  et `np.cos` correspond à la fonction cosinus. La fonction `np.cos` peut s'appliquer à un tableau, elle produit alors un nouveau tableau de même dimension dont les composantes sont les cosinus des composantes du tableau passé en paramètre. Par ailleurs, l'expression `np.linspace(x, y, n)` construit un vecteur de  $n$  valeurs, régulièrement espacées, la première valant  $x$  et la dernière  $y$ .

**Q 40.** Compléter la fonction Python `Tchebychev(n)` ci-dessous qui prend en argument un entier  $n$  et renvoie un couple de deux vecteurs  $(u_0, \dots, u_{999})$  et  $(y_0, \dots, y_{999})$ , avec, pour tout  $k \in [0, 999]$ ,  $y_k = T_n(u_k)$ .

```
import numpy as np

def Tchebychev(n):
    T = np.linspace(np.pi/2, np.pi, 1000)
    U = np.cos(T)
    Y = . . .
    return U, Y
```

En reliant les points de coordonnées  $(u_k, y_k)$  pour deux valeurs du paramètre  $n$ , on a obtenu les deux courbes suivantes.



**Q 41.** Pour chacune de ces deux courbes, préciser, en la justifiant, la valeur utilisée pour le paramètre  $n$ .

**Q 42.** On choisit les racines obtenues en question 39 comme nœuds du jeu  $c = (c_0, \dots, c_n)$ . Donner la valeur de  $N(Q_c)$ .

## II.B.3) Comparaison des ces deux jeux de nœuds

**Q 43.** En admettant que  $n! \sim \sqrt{2\pi n} e^{-n} n^n$ , calculer la limite, lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ , du rapport  $\frac{N(Q_c)}{N(Q_s)}$ .

**Q 44.** À l'aide de ce résultat et de celui de la question 27, comparer la qualité des estimations de l'intégrale sur  $[-1, 1]$  par quadrature, selon le choix de  $s$  ou  $c$  comme jeu de nœuds.

• • • FIN • • •