CCS TSI MATHS2 2020

Rémi Crétois, Éric Mercier, Michel Sortais

version du 2 juillet 2020

I Décompositions de matrices

I.A Un exemple introductif

Q 1. Un développement de $\det(P)$ suivant sa 2ème colonne permet de voir que

$$\det(P) = -(-3)\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 3\cdot 0 - 3\cdot(-9) = 27 \neq 0,$$

ce qui prouve bien que la matrice P est inversible. Donc la suite (c_1, c_2, c_3) des colonnes de P forme une base $\mathscr{B}_1$ de $\mathbb{R}^3$, comme annoncé.

Q 2.
- $u_1 = \dfrac{1}{\|c_1\|}\cdot c_1 = \dfrac{1}{3}\cdot c_1 = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 2/3 \\ -2/3 \end{pmatrix}$
- $v_2 = c_2 - \langle c_2; u_1\rangle \cdot u_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} - (-3)\cdot\begin{pmatrix} 1/3 \\ 2/3 \\ -2/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$,

  $u_2 = \dfrac{1}{\|v_2\|}\cdot v_2 = \begin{pmatrix} -2/3 \\ 2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$
- $v_3 = c_3 - \langle c_3; u_1\rangle \cdot u_1 - \langle c_3; u_2\rangle\cdot u_2 = c_3 - 0\cdot u_1 - (-3)\cdot u_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$,

  $u_3 = \dfrac{1}{\|v_3\|}\cdot v_3 = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 1/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}$

Conclusion : la famille $(u_1; u_2; u_3)$ donnée par

$$\boxed{u_1 = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 2/3 \\ -2/3 \end{pmatrix},\ u_2 = \begin{pmatrix} -2/3 \\ 2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix},\ u_3 = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 1/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}}$$

forme une base orthonormée $\mathscr{B}_2$ dans $\mathbb{R}^3$.

Q 3. Tant la base canonique $\mathscr{B}$ que la nouvelle base $\mathscr{B}_2$ constituent des bases orthonormées pour le produit scalaire standard dans $\mathbb{R}^3$; donc les matrices de passage $Q = \mathrm{coord}_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}_2)$ et $Q^{-1} = \mathrm{coord}_{\mathscr{B}_2}(\mathscr{B})$ sont *orthogonales*, ce qui revient à dire que $\boxed{Q^{-1} = Q^T}$.

Q 4. On a $R = \mathrm{coord}_{\mathscr{B}_2}(\mathscr{B}_1)$, et d'après les calculs effectués à la **Q2** :
- $u_1 = \dfrac{1}{3}\cdot c_1$, donc $c_1 = 3\cdot u_1$,
- $u_2 = \dfrac{1}{3}\cdot(c_2 + c_1)$, donc $c_2 = 3\cdot u_2 - 3\cdot u_1$,

- $u_3 = \frac{1}{3}\cdot(c_3+3\cdot u_2)$, donc $c_3 = 3\cdot u_3 - 3\cdot u_2$,

ainsi

$$\boxed{R = \mathrm{coord}_{\mathscr{B}_2}(\mathscr{B}_1) = \mathrm{coord}_{(u_1,u_2,u_3)}(c_1,c_2,c_3) = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 0 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}}$$

Q 5. P est la matrice de changement de base où sont stockées (en colonnes) les coordonnées respectives de c_1, c_2 et c_3 dans la base canonique, autrement dit $P = \mathrm{coord}_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}_1)$. En composant les changements de base, on obtient tout aussi bien

$$P = \mathrm{coord}_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}_1) = \mathrm{coord}_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}_2) \times \mathrm{coord}_{\mathscr{B}_2}(\mathscr{B}_1)\ ,$$

soit $\boxed{P = Q\times R}$, ce qui est l'identité annoncée.

I.B Cas général : décomposition de QR

Q 6. Soient $c_1, c_2, \ldots, c_n$ les colonnes de la matrice P. Comme P est inversible, $\mathscr{B}_1 = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$ forme une base de $\mathbb{R}^n$. En appliquant à cette base le procédé de Gram-Schmidt, on parvient à former une nouvelle base $\mathscr{B}_2 = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ de $\mathbb{R}^n$; $\mathscr{B}_2$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ vérifiant

$$\forall k \in \{1, 2, \ldots, n\}\,, \mathrm{Vect}(u_1, u_2, \ldots, u_k) = \mathrm{Vect}(c_1, c_2, \ldots, c_k)\,,$$

et cette dernière propriété géométrique se traduit algébriquement par le fait que la matrice de passage $R^{-1} = \mathrm{coord}_{\mathscr{B}_1}(\mathscr{B}_2)$ est triangulaire supérieure. Sa matrice inverse $R = \mathrm{coord}_{\mathscr{B}_2}(\mathscr{B}_1)$ est donc elle aussi *triangulaire supérieure.*

En outre, dans le procédé de Gram-Schmidt déjà mis en oeuvre à titre d'exemple dans la **Q2**, les identités

$$u_k = \frac{1}{\|v_k\|}\cdot v_k = \frac{1}{\|v_k\|}\cdot\left(c_k - \sum_{j=1}^{k-1}\langle c_k; u_j\rangle\cdot u_j\right)$$

donnent inversement :

$$c_k = \|v_k\|\cdot u_k + \sum_{j=1}^{k-1}\langle c_k; u_j\rangle\cdot u_j\,,$$

ce qui permet d'affirmer que tous les coefficients diagonaux de la matrice triangulaire supérieure $R = \mathrm{coord}_{\mathscr{B}_2}(\mathscr{B}_1)$ sont bien *strictement positifs.*

Enfin, puisque les bases $\mathscr{B}$ (base canonique) et $\mathscr{B}_2$ sont toutes deux orthonormées, la matrice de passage $Q = \mathrm{coord}_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}_2)$ est bien une matrice *orthogonale.*

En conclusion, on peut affirmer que

$$\boxed{P = \mathrm{coord}_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}_1) = \mathrm{coord}_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}_2)\times\mathrm{coord}_{\mathscr{B}_2}(\mathscr{B}_1) = Q\times R\,,}$$

où Q est orthogonale, R triangulaire supérieure et à coefficients diagonaux strictement positifs.

Q 7. L'équation donnée est alors équivalente à

$$Rx = Q^{-1}b = Q^T b = y$$

en posant $y = Q^T b = (y_1\, y_2\, \ldots\, y_n)^T$.

Comme R est triangulaire supérieure et à coeff. diagonaux strictement positifs, on pourra résoudre cette dernière équation "en remontant" : on commencera par observer que $x_n = \frac{1}{r_{n,n}}y_n$, ce qui permettra d'effectuer une substitution pour obtenir x_{n-1} à partir de l'identité $x_{n-1} = \frac{1}{r_{n-1,n-1}}\left(y_n - r_{n-1,n}x_n\right)$, etc.

Q 8. Soient $c_1, c_2, \dots, c_n$ les colonnes de la matrice M, puis $C_1, C_2, \dots, C_n$ celles de la matrice I_n.
Pour $k \in [\![1;n]\!]$, on dénote par $(\mathscr{H}_k)$ l'hypothèse

$$c_1 = C_1,\ c_2 = C_2,\ \dots,\ c_k = C_k$$

- *Initialisation* : montrons que $(\mathscr{H}_1)$ est vraie. Comme la matrice M est triangulaire supérieure, sa 1ère colonne est de la forme $c_1 = (m_{1,1}, 0, 0, \dots, 0)^T$, et comme M est orthogonale, cette 1ère colonne est normée, en sorte que $m_{1,1} = \pm 1$; enfin, puisque les coefficients diagonaux de M sont strictement positifs, on doit avoir $m_{1,1} = 1$. Ainsi : $c_1 = (1\,0\,0\dots 0)^T = C_1$, et l'hypothèse $(\mathscr{H}_1)$ est vérifiée.
- *Hérédité* : pour $k \in [\![1;(n-1)]\!]$, supposons que l'hypothèse $(\mathscr{H}_k)$ est vérifiée, et montrons que cela entraîne la validité de $(\mathscr{H}_{k+1})$.
  Comme M est triangulaire supérieure, sa $(k+1)$ème colonne est de la forme
  $$c_{k+1} = (m_{1,k+1}, m_{2,k+1}, \dots, m_{k+1,k+1}, 0, 0, \dots, 0)^T$$
  Comme M est orthogonale, en prenant en compte l'hypothèse $(\mathscr{H}_k)$, on obtient
  $$m_{1,k+1} = \langle C_1; c_{k+1}\rangle = \langle c_1; c_{k+1}\rangle = 0, m_{2,k+1} = \langle C_2; c_{k+1}\rangle = \langle c_2; c_{k+1}\rangle = 0, \dots, m_{k,k+1} = \langle C_k; c_{k+1}\rangle = \langle c_k; c_{k+1}\rangle = 0,$$
  en sorte que la $(k+1)$ème colonne de M prend la forme $c_{k+1} = (0, 0, \dots, 0, m_{k+1,k+1}, 0, 0, \dots, 0)^T$.
  Toujours d'après l'orthogonalité de la matrice M, on doit avoir : $m_{k+1,k+1} = \pm 1$.
  Enfin, comme M est à coefficients diagonaux strictement positifs, on obtient : $m_{k+1,k+1} = 1$, ce qui achève d'établir la validité de $(\mathscr{H}_{k+1})$.
- *Conclusion* : les deux points précédents permettent d'affirmer que $(\mathscr{H}_n)$ est vraie, ce qui signifie que les colonnes $c_1, c_2, \dots, c_n$ de la matrice M coïncident avec celles de la matrice I_n, autrement dit que $M = I_n$.

N.B. : alternativement, sans suivre les indications, on pouvait se contenter d'observer que $M^{-1} = M^T$ est encore triangulaire supérieure, en sorte que M est à la fois orthogonale et diagonale ; mais alors, chacun des coeff. diagonaux de M se doit d'être de la forme $m_{i,i} = \pm 1$, et comme par ailleurs M est à coeff. diagonaux > 0, on obtient bien $M = I_n$.

Q 9. Les matrices triangulaires R_1 et R_2 ayant chacune un déterminant strictement positif, elles sont toutes deux inversibles ; l'identité $Q_1R_1 = Q_2R_2$ donne alors successivement $Q_1 = Q_2R_2R_1^{-1}$ puis $Q_2^{-1}Q_1 = R_2R_1^{-1}$. Mais $Q_2^{-1}Q_1$ est une matrice orthogonale (comme produit de matrices orthogonales), tandis que $R_2R_1^{-1}$ est triangulaire supérieure et à coefficients diagonaux strictement positifs, comme produit de 2 telles matrices. D'après la **Q8**, il s'ensuit que $Q_2^{-1}Q_1 = R_2R_1^{-1} = I_n$, ce qui donne bien $Q_2 = Q_1$ et $R_2 = R_1$.

I.C Décomposition d'une matrice dont le polynôme caractéristique est scindé sur $\mathbb{R}$

Q 10. Comme χ_A est scindé sur $\mathbb{R}$, la matrice carrée A est trigonalisable dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$: il existe $P \in GL_n(\mathbb{R})$ et T triangulaire supérieure telles que $A = PTP^{-1}$. En appliquant alors la décomposition QR à la matrice inversible P, il vient
$$A = PTP^{-1} = (QR)T(R^{-1}Q^{-1}) = Q(RTR^{-1})Q^T = Q\tilde{T}Q^T,$$
et il reste à observer que $\tilde{T} = RTR^{-1}$ est bien triangulaire supérieure (comme produit de matrices triangulaires supérieures).

Q 11. Prenons pour matrice orthogonale Q une matrice déjà apparue dans la **Q3** :

$$Q = \begin{pmatrix} 1/3 & -2/3 & 2/3 \\ 2/3 & 2/3 & 1/3 \\ -2/3 & 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$$

et pour matrice triangulaire supérieure la matrice

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Il est évident que la matrice carrée

$$A = QTQ^{-1} = QTQ^T = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 & 1/3 \\ 0 & 7/3 & 4/3 \\ 4/3 & 1/3 & 2 \end{pmatrix}$$

est diagonalisable, puisqu'elle possède trois valeurs propres distinctes ($Sp.(A) = Sp.(T) = \{1,2,3\}$). Toutefois, A n'est pas *orthogonalement* diagonalisable, puisqu'elle n'est pas symétrique.
N.B. : de façon plus minimaliste, on pouvait ici s'épargner quelques calculs en se contentant de poser $Q = I_3$.

Q 12. Ici encore, on pourrait procéder de façon (ultra) minimaliste en se contentant de poser : $A = Q = T = I_3$.
Alternativement, on pourra reprendre la matrice $Q = \begin{pmatrix} 1/3 & -2/3 & 2/3 \\ 2/3 & 2/3 & 1/3 \\ -2/3 & 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$ et poser cette fois-ci $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, ce qui donne alors

$$A = QTQ^T = \begin{pmatrix} 7/3 & 0 & 2/3 \\ 0 & 5/3 & 2/3 \\ 2/3 & 2/3 & 2 \end{pmatrix}$$

II Calcul approché d'intégrales par quadrature

II.A Méthode de quadrature

II.A.1 Détermination des poids (w_i)

Q 13. Soit $(i,j) \in [\![0,n]\!]^2$. Observons que :

— si $i \neq j$: j figure parmi les indices k tels que $k \neq i$, donc le facteur $(X - r_j)$ figure au sein du produit $\displaystyle\prod_{k\neq i}(X - r_k)$; puisque $(X - r_j)|A_i$, on a : $A_i(r_j) = 0$.

— si $i = j$: en remplaçant X par r_i, on obtient

$$A_i(r_i) = \prod_{k\neq i} \frac{r_i - r_k}{r_i - r_k} = 1$$

On a donc bien, dans tous les cas : $A_i(r_j) = \delta_{i,j}$.

Q 14. Soit $(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que : $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} \alpha_i A_i = O_{\mathbb{R}_n[X]}$. D'après la question précédente, l'évaluation du polynôme $P = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} \alpha_i A_i$ en r_j donne tout simplement

$$P(r_j) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i A_i(r_j) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i \delta_{i,j} = \alpha_j$$

Puisque P est le polynôme nul, on obtient

$$\alpha_0 = \alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 0,$$

ce qui prouve la liberté de la famille $(A_0, A_1, \ldots, A_n)$ dans $\mathbb{R}_n[X]$.
Enfin, comme $\dim(\mathbb{R}_n[X]) = (n+1)$, la famille libre $(A_0, A_1, \ldots, A_n)$ forme bien une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
Pour un $P \in \mathbb{R}_n[X]$ quelconque, puisque $(A_0, A_1, \ldots, A_n)$ forme une base de $\mathbb{R}_n[X]$, il existe une unique suite finie $(c_0, c_1, \ldots, c_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ telle que $P = \sum_{i=0}^{n} c_i A_i$. A nouveau, une évaluation en r_j donne

$$P(r_j) = \sum_{i=0}^{n} c_i A_i(r_j) = \sum_{i=0}^{n} c_i \delta_{i,j} = c_j,$$

en sorte que $P = \sum_{i=0}^{n} P(r_i) \cdot A_i$.

Q 15. Par hypothèse, pour tout $i \in [\![0, n]\!]$,

$$\int_{-1}^{1} A_i(x)\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n} \omega_k A_i(r_k).$$

On applique ensuite la question 13 :

$$\boxed{\int_{-1}^{1} A_i(x)\mathrm{d}x = \omega_i}.$$

Q 16. D'après la question précédente, si les réels $\omega_0, \ldots, \omega_n$ conviennent, alors ils valent pour tout $i \in [\![0, n]\!]$: $\omega_i = \int_{-1}^{1} A_i(x)\mathrm{d}x$. Il n'y a donc qu'une seule possibilité pour chaque ω_i.

Q 17. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. D'après la question 14,

$$P = \sum_{i=0}^{n} P(r_k) A_i.$$

Ainsi, en posant pour tout $i \in [\![0, n]\!]$, $\omega_i = \int_{-1}^{1} A_i(x)\mathrm{d}x$, on a :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} \omega_k P(r_k) &= \sum_{k=0}^{n} P(r_k) \int_{-1}^{1} A_i(x)\mathrm{d}x \\
&= \int_{-1}^{1} \sum_{k=0}^{n} P(r_k) A_i(x)\mathrm{d}x && \text{en utilisant la linéarité de l'intégrale} \\
&= \int_{-1}^{1} P(x)\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Ainsi, la formule est bien vérifiée pour toute fonction polynomiale P de degré inférieur ou égal à n.

Q 18. Lorsque $n = 0$, $A_0(X) = 1$ car on a un produit sans terme. Puis $\omega_0 = \int_{-1}^{1} 1\mathrm{d}x = 2$.
Ainsi, $\boxed{\Sigma_r(f) = 2f(0)}$ car $r_0 = 0$. Si f est positive sur $[-1, 1]$, $\Sigma_r(f)$ est donc l'aire du rectangle dont un des côtés est $[-1, 1]$ et l'autre est de longueur $f(0)$.

Q 19. Lorsque $n = 1, r_0 = -1$ et $r_1 = 1$, on a :

$$A_0(X) = \frac{X - r_1}{r_0 - r_1} = -\frac{1}{2}(X - 1), \quad A_1(X) = \frac{X - r_0}{r_1 - r_0} = \frac{1}{2}(X + 1).$$

Puis,

$$\omega_0 = \int_{-1}^{1} A_0(x)\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2} - x\right]_{-1}^{1} = 1$$
$$\omega_1 = \int_{-1}^{1} A_1(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2} + x\right]_{-1}^{1} = 1$$

Ainsi, $\boxed{\Sigma_r(f) = f(-1) + f(1)}$. Si f est positive sur $[-1,1]$, $\Sigma_r(f)$ est donc l'aire du trapèze rectangle de bases $f(-1)$ et $f(1)$ et de hauteur 2.

II.A.2 Majoration de l'erreur

Q 20. La fonction Q_r est polynomiale donc continue sur $[-1,1]$. La fonction $f^{(n+1)}$ est continue sur $[-1,1]$ car f est de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ sur $[-1,1]$.
Comme $|Q_r|$ et $|f^{(n+1)}|$ sont continues sur le segment $[-1,1]$ elles sont bornées et atteignent leurs bornes. Donc $N(f^{(n+1)})$ et $N(Q_r)$ sont bien définis.

Q 21. D'une part, $T_{r,f} \in \mathbb{R}_n[X]$ car c'est une combinaison linéaire des A_i et pour tout entier $i \in [\![0,n]\!]$, $T_{r,f}(r_i) = \sum\limits_{k=0}^{n} f(r_k)A_k(r_i) = f(r_i)$ d'après la question **Q13**.
D'autre part, soit U un polynôme de $\mathbb{R}_n[X]$ vérifiant $U(r_i) = f(r_i)$ pour tout entier $i \in [\![0,n]\!]$. Alors, d'après la question **Q14**, $U = \sum\limits_{k=0}^{n} U(r_k)A_k = \sum\limits_{k=0}^{n} f(r_k)A_k = T_{r,f}$. On a donc bien l'unicité de $T_{r,f}$.

Q 22. Par hypothèse, il existe $-1 < x_0 < x_1 < \ldots < x_{n+1} < 1$, $n+2$ réels distincts tels que pour tout $i \in [\![0,n+1]\!]$, $g(x_i) = 0$.
Pour chaque $i \in [\![0,n]\!]$, la fonction g est continue sur $[x_i, x_{i+1}]$ et dérivable sur $]x_i, x_{i+1}[$ car g est $\mathscr{C}^{n+1}$ sur $[-1,1]$ et $n \geqslant 0$. Comme $g(x_i) = g(x_{i+1}) = 0$, d'après le théorème de Rolle, il existe $y_i \in]x_i, x_{i+1}[$ tel que $g'(y_i) = 0$.
Ainsi, la fonction g' s'annule aux $n+1$ points y_i pour tout $i \in [\![0,n]\!]$ qui sont bien distincts car dans des intervalles disjoints.

Q 23. Montrons par récurrence sur $k \in [\![1,n+1]\!]$ que $g^{(k)}$ s'annule en au moins $n+2-k$ points distincts de $[-1,1]$.

— Initialisation : c'est la question **Q22**.
— Hérédité : soit $k \in [\![1,n]\!]$ et supposons que $g^{(k)}$ s'annule en au moins $n+2-k$ points distincts de $[-1,1]$. La fonction $h = g^{(k)}$ est de classe $\mathscr{C}^{n-k+1}$ sur $[-1,1]$, avec $n-k \geqslant 0$ et s'annule en au moins $n+2-k$ points distincts de $[-1,1]$. D'après la question 22, la fonction h' s'annule en au moins $n+2-(k+1)$ points distincts de $[-1,1]$.

D'après le principe de récurrence, pour tout $k \in [\![1,n+1]\!]$ que $g^{(k)}$ s'annule en au moins $n+2-k$ points distincts de $[-1,1]$. En particulier, pour $k = n+1$, $g^{(n+1)}$ s'annule en au moins un point de $[-1,1]$.

Q 24. Si $x \in \{r_0,\ldots,r_n\}$, on a $T_{r,f}(x) = f(x)$ d'après la question 21. En particulier, $f(x) - T_{r,f}(x) = 0$ et l'inégalité (II.1) est bien vérifiée car le membre de droite est positif ou nul.

Q 25. Comme $x \notin \{r_0,\ldots,r_n\}$, $Q_r(x) \neq 0$. En posant $\lambda_x = \dfrac{f(x) - T_{r,f}(x)}{Q_r(x)}$ on obtient bien que

$$g_x(x) = f(x) - T_{r,f}(x) - \frac{f(x) - T_{r,f}(x)}{Q_r(x)}Q_r(x) = 0.$$

Q 26. Comme f est de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ sur $[-1,1]$ et $T_{r,f}$ et Q_r sont de classe $\mathscr{C}^{\infty}$ sur $[-1,1]$, la fonction g_x est de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ sur $[-1,1]$.

De plus, pour tout $i \in [\![0, n]\!]$,

$$g_x(r_i) = f(r_i) - T_{r,f}(r_i) - \lambda_x Q_r(r_i) = f(r_i) - f(r_i) = 0.$$

Donc g s'annule aux $n+2$ points $\{x, r_0, r_1, \dots, r_n\}$ qui sont distincts dans $[-1, 1]$.
D'après la question 23, il existe un réel $c_x \in [-1, 1]$ tel que $g_x^{(n+1)}(c_x) = 0$.
Or, le polynôme $T_{r,f}$ est de degré inférieur ou égal à n, donc $T_{r,f}^{(n+1)} = 0$. De plus, le polynôme Q_r est de degré $n+1$ et son terme dominant est X^{n+1}, donc $Q_r^{(n+1)} = (n+1)!$.
Ainsi,

$$0 = g_x^{(n+1)}(c_x) = f^{(n+1)}(c_x) - \lambda_x (n+1)! \iff \boxed{\lambda_x = \frac{f^{(n+1)}(c_x)}{(n+1)!}}$$

D'après la question 24, l'inégalité (II.1) est vérifiée si $x \in \{r_0, \dots, r_n\}$. Sinon, $f(x) - T_{r,f}(x) = \lambda_x Q_r(x) = \dfrac{Q_r(x) f^{(n+1)}(c_x)}{(n+1)!}$. Ainsi,

$$|f(x) - T_{r,f}(x)| = \frac{|Q_r(x)||f^{(n+1)}(c_x)|}{(n+1)!} \leqslant \frac{N(Q_r)N(f^{(n+1)})}{(n+1)!}.$$

L'inégalité (II.1) est donc toujours vérifiée.

Q 27. On remarque que $\Sigma_r(f) = \Sigma_r(T_{r,f})$ d'après la question 21. Puis, d'après la question 17, $\Sigma_r(T_{r,f}) = \displaystyle\int_{-1}^{1} T_{r,f}(x)\mathrm{d}x$.
Ainsi,

$$\begin{aligned} |I(f) - \Sigma_r(f)| &= \left| \int_{-1}^{1} (f(x) - T_{r,f}(x))\mathrm{d}x \right| \\ &\leqslant \int_{-1}^{1} \left| f(x) - T_{r,f}(x) \right| \mathrm{d}x \\ &\leqslant \int_{-1}^{1} \frac{N(Q_r)N(f^{(n+1)})}{(n+1)!}\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Donc

$$\boxed{|I(f) - \Sigma_r(f)| \leqslant 2\frac{N(Q_r)N(f^{(n+1)})}{(n+1)!}}.$$

II.B Choix d'un jeu de nœuds

II.B.1 Nœuds équidistants

Q 28. Comme les noeuds sont équidistants avec $s_0 = -1$ et $s_n = 1$, on a $s_k = -1 + k\dfrac{2}{n} = -1 + kh$ pour tout $k \in [\![0, n]\!]$. Puis, avec $x = -1 + th$,

$$\begin{aligned} |Q_s(x)| &= \left| \prod_{k=0}^{n} (x - s_k) \right| \\ &= \prod_{k=0}^{n} |(-1 + th + 1 - kh)| \\ &= h^{n+1} \prod_{k=0}^{n} |t - k| \end{aligned}$$

Donc $\boxed{|Q_s(x)| = h^{n+1}\varphi_{n+1}(t)}$.

Q 29. La fonction φ_{n+1} est la valeur absolue d'une fonction polynomiale, donc est continue sur le segment $[0, n]$. Elle y est donc bornée et atteint ses bornes. En particulier, elle admet un maximum.
On remarque ensuite que si φ_{n+1} atteint son maximum en x_m, alors soit $x_m \in [0, n/2]$, et il n'y a rien à démontrer, soit $x_m \in [n/2, n]$, et alors $n - x_m \in [0, n/2]$ et

$$\begin{aligned}
\varphi_{n+1}(n-x_m) &= \prod_{k=0}^{n} |n - x_m - k| \\
&= \prod_{k=0}^{n} |x_m - (n-k)| && \text{en changeant tous les signes dans les valeurs absolues} \\
&= \prod_{i=0}^{n} |x_m - i| && \text{en faisant le changement d'indice } i = n-k \\
&= \varphi_{n+1}(x_m).
\end{aligned}$$

Donc φ_{n+1} atteint aussi son maximum sur $[0, n/2]$.

Q 30. **ATTENTION**, il y a une erreur dans le sujet !
Le max à démontrer dans le sujet est celui de φ_3 **et non** de φ_2.
Erreur d'indiçage puisque on définit φ_{n+1}
On détermine donc dans ce corrigé le max de φ_3 :
$\varphi_3 : t \longmapsto |t(t-1)(t-2)|$
Sur $[0,1]$, $t \longmapsto t(t-1)(t-2)$ est positive donc $\varphi_3(t) = t(t-1)(t-2) = t^3 - 3t^2 + 2t$ et alors $\varphi_3'(t) = 3t^2 - 6t + 2$ dont l'étude du signe sur $[0,1]$ permet de dresser le tableau de variations de φ_3.

x	0		$\frac{3-\sqrt{3}}{3}$		1
φ_3'		$+$	0	$-$	
φ_3	0	$\nearrow$	$\varphi_3\left(\frac{3-\sqrt{3}}{3}\right)$	$\searrow$	0

Sur $[0,1]$; le maximum de φ_3 est donc $\boxed{\max_{[0,1]} \varphi_3 = \varphi_3\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{2}{3\sqrt{3}}}$

Remarque : Il est encore plus facile de démontrer que $\max_{[0,1]} \varphi_2 = \varphi_2\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$: **ce qui est nécessaire pour la récurrence suivante !**.

Q 31. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on démontre par récurrence, la propriété $\mathscr{P}_n$: « $\max_{[0,n]} \varphi_{n+1} \geqslant \frac{1}{4}(n-1)!$ ».

— *Initialisation* :
Pour $n = 1$, la question précédente **ne fournit pas** : $\max_{[0,1]} \varphi_2 = \frac{1}{2}$.
D'autre part, $\frac{1}{4}(1-1)! = \frac{1}{4} < \frac{1}{2}$, on obtient bien la propriété $\mathscr{P}_1$.
En revanche, on a démontré à la **Q30** que $\max_{[0,2]} \varphi_3 \geqslant \max_{[0,1]} \varphi_3 = \frac{2}{3\sqrt{3}} \geqslant \frac{1}{4}(2-1)! = \frac{1}{4}$, , on obtient bien la propriété $\mathscr{P}_2$, qui est inutile pour la suite...

— *Hérédité* :
Pour un certain entier non nul n, on suppose la propriété $\mathscr{P}_n$, c'est à dire, $\max_{[0,n]} \varphi_{n+1} \geqslant \frac{1}{4}(n-1)!$, on obtient bien la propriété $\mathscr{P}_1$.

Alors,

$$\begin{aligned}
\max_{[0,n+1]} \varphi_{n+2} &\geqslant \max_{[0,n]} \varphi_{n+2}(t)\\
&\geqslant \max_{[0,n]} \big(\varphi_{n+1}(t) \times |t-(n+1)|\big)\\
&\geqslant (n+1) \max_{[0,n]} \varphi_{n+1}(t)\\
&\geqslant n \times \frac{1}{4}(n-1)! \quad \text{d'après l'hypothèse de récurrence}\\
&\geqslant \frac{1}{4} n!
\end{aligned}$$

— *Conclusion* :
On a démontré par récurrence que pour tout entier n : $\max\limits_{[0,n]} \varphi_{n+1} \geqslant \frac{1}{4}(n-1)!$.

Q 32. D'après **Q28**, $|Q_s(x)| = h^{n+1}\varphi_{n+1}(t)$, on en déduit donc la minoration :

$$\boxed{N(Q_s) \geqslant \left(\frac{2}{n}\right)^{n+1} \times \frac{(n-1)!}{4} = \frac{2^{n-1}(n-1)!}{n^{n+1}}}$$

II.B.2 Zéros des polynômes de Tchebychev

Q 33. La fonction cos est définie sur $\mathbb{R}$ et la fonction arccos est définie sur $[-1,1]$. Par composition, la fonction T_n est définie sur $[-1,1]$.

Q 34. Soit $x \in [-1,1]$:

$$\begin{aligned}
T_0(x) &= \cos(0 \arccos x) = 1\\
T_1(x) &= \cos(\arccos x) = x\\
T_2(x) &= \cos(2\arccos x) = 2\cos^2(\arccos x) - 1 = 2x^2 - 1\\
T_3(x) &= \cos(3\arccos x) = 4\cos^3(\arccos x) - 3\cos(\arccos x) = 4x^3 - 3x
\end{aligned}$$

Q 35. Soit n un entier naturel,,

$$\begin{aligned}
T_n(-1) &= \cos(n\arccos(-1)) = \cos(n\pi) = (-1)^n\\
T_n(0) &= \cos(n\arccos(0)) = \cos\left(n\frac{\pi}{2}\right) = \Re\left(\mathrm{i}^n\right)\\
T_n(1) &= \cos(n\arccos(1)) = \cos(n\times 0) = 1
\end{aligned}$$

Q 36. T_n est définie sur $[-1,1]$ qui est un intervalle symétrique par rapport à 0.
Pour tout réel x de $[-1,1]$, on a :

$$\begin{aligned}
T_n(-x) &= \cos(n\arccos(-x)) = \cos(n\times(\pi - \arccos(x)))\\
&= \cos(n\pi - n\arccos(x))\\
&= \begin{cases} \cos(n\arccos(x)) = T_n(x) \text{ si } n \text{ est pair,}\\ -\cos(n\arccos(x)) = -T_n(x) \text{ si } n \text{ est impair.}\end{cases}
\end{aligned}$$

En conclusion :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in [-1,1],\ T_n(-x) = (-1)^n T_n(x)}$$

Si n est pair, T_n est paire, si n est impair, T_n est impaire.

Q 37. Soit x un réel de $[-1,1]$ et n un entier naturel, alors :

$$\begin{aligned}T_{n+1}(x)+T_{n-1}(x) &= \cos\left((n+1)\arccos(x)\right)+\cos\left((n-1)\arccos(x)\right)\\ &= 2\cos\left(\frac{n+1+n-1}{2}\arccos(x)\right)\cos\left(\frac{n+1-(n-1)}{2}\arccos(x)\right)\\ &= 2\cos\left(n\arccos(x)\right)\cos\left(\arccos(x)\right)\\ &= 2xT_n(x)\end{aligned}$$

$$\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\ \forall x\in[-1,1],\ T_{n+1}(x)+T_{n-1}(x)=2xT_n(x)}$$

Q 38. On démontre par une récurrence double la propriété $\mathscr{P}_n$: « T_n est un polynôme de degré n et son coefficient dominant est 2^{n-1} », pour n un entier non nul.

— *Initialisation* :
On vérifie la propriété pour les fonctions T_1, T_2, et T_3 déterminées à la question **Q34**.

— *Hérédité* : On suppose, pour un certain entier n non nul, que les propriétés $\mathscr{P}_n$ et $\mathscr{P}_{n+1}$ sont vraies.
On utilise la relation de récurrence déterminée dans la question **Q37** pour obtenir, pour tout réel $x\in[-1,1]$:

$$T_{n+2}(x)=2xT_{n+1}(x)-T_n(x)$$

T_{n+1} et T_n étant des fonctions polynomiales, on en déduit que T_{n+1} est une fonction polynomiale.
Or, d'après l'hypothèse de récurrence, T_{n+1} est une fonction polynomiale, dont le degré est $\deg T_{n+1}=n+1$ et son coefficient dominant est 2^n.
Pour tout polynôme P et Q, $\deg(PQ)=\deg P+\deg Q$, on en déduit que $\deg 2XT_{n+1}=n+2$ et le coefficient dominant du polynôme $2XT_{n+1}$ est 2^{n+1}.
Comme $\deg T_n=n-1<\deg 2XT_{n+1}$, comme $\deg(P+Q)\leqslant\max\left(\deg P,\deg Q\right)$ et que cette inégalité est stricte si $\deg P\neq\deg Q$, on obtient :

$$\boxed{T_{n+2}\text{ est une fonction polynomiale, }\deg T_{n+2}=n+1\text{ et son coefficient dominant est }2^{n+1}}$$

— *Conclusion* : Par cette récurrence double, nous avons montré que pour tout entier n non nul, T_n est une fonction polynomiale de degré n de coefficient dominant 2^{n-1}

Il reste à préciser que T_0 est une fonction polynomiale de degré 0 et que son coefficient est 1.

Remarque : Comme les fonctions sont polynomiales, on peut étendre leur domaine de définition à $\mathbb{R}$.

Q 39. Soit n un entier , pour $x\in\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}T_{n+1}(x)=0 &\Leftrightarrow (n+1)\arccos(x)=\frac{\pi}{2}+k\pi,\in\mathbb{Z}\\ &\Leftrightarrow \arccos(x)=\frac{\pi}{2n+2}+\frac{k\pi}{n+1},\ k\in\mathbb{Z}\\ &\Leftrightarrow x=\cos\left(\frac{\pi(2k+1)}{2n+2}\right),\ k\in\mathbb{Z}\end{aligned}$$

On pose $\theta_k=\dfrac{(2k+1)\pi}{2n+2}$ avec $k\in[\![0,n+1]\!]$, et $x_k=\cos\theta_k$.
On a alors : $0<\theta_0=\dfrac{\pi}{2n}<\theta_1<\ldots<\theta_n=\dfrac{(2n-1)\pi}{2n+2}<\pi$.
La fonction cos étant strictement décroissante sur $[0,\pi]$ on a alors :
$-1<\cos\theta_n<\ldots<\cos\theta_0<1\Leftrightarrow -1<x_n<\ldots<x_0<1$
Nous savons que le polynôme T_{n+1} est un polynôme de degré $n+1$. Le nombre de racines de ce polynôme est donc majoré par son degré, or, nous avons déterminé $n+1$ racines distinctes, donc l'ensemble de ses racines. En conclusion :

$$\boxed{\text{Toutes les racines de }T_{n+1}\text{ sont dans }[-1,1]\text{ ce sont les réels : }x_k=\cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n+2}\right)\text{ avec }k\in[\![0,n+1]\!]}.$$

Q 40. T est un vecteurs de réels de $\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$, su cet intervalle, $\arccos\cos\theta=\theta$, U est donc un vecteur de réels de $[-1,0]$ et $Y=\cos(nT)$ le vecteur contenant les images des composantes de U par T_n.

```
def Tchebychev(n):
    T = np.linspace(np.pi/2, np.pi, 1000)
    U = np.cos(T)
    Y = np.cos(n*T)
    return U, Y
```

Q 41. — Pour la courbe 1 : La fonction polynomiale vaut -1 en -1 donc n est impair. La fonction polynomiale est donc impaire et T_n admet donc 5 racines, donc ce cas correspond à $n=5$.
— Pour la courbe 2 : C'est la courbe d'une fonction paire car $T_n(-1)=-1$, ce polynôme admet donc 8 racines, il s'agit donc du cas $n=8$.

Q 42. On considère le jeux de noeuds $c=\left(c_0=\cos\left(\frac{\pi}{2n+2}\right),c_2=\cos\left(\frac{3\pi}{2n+2}\right),\dots,c_n=\cos\left(\frac{(2n+1)\pi}{2n+2}\right)\right)$.

$Q_c=\prod_{k=0}^{n}(X-c_k)=\frac{1}{2^n}\times T_{n+1}$

De plus, pour x dans $[-1,1]$, $T_{n+1}(x)=\cos(\arccos(x))\in[-1,1]$ et $T_{n+1}(1)=1$, on a : $\max_{x\in[-1,1]}|T_{n+1}(x)|=1$, finalement :

$$\boxed{N(Q_c)=\frac{1}{2^n}\max_{x\in[-1,1]}|T_{n+1}(x)|=\frac{1}{2^n}.}$$

II.B.3 Comparaison des ces deux jeux de nœuds

Q 43. D'après les question précédentes et en utilisant la formule de Stirling admise :

$$\begin{aligned}\frac{N(Q_c)}{N(Q_s)}&\leqslant\frac{1}{2^n}\frac{n^{n+1}}{2^{n-1}(n-1)!}\\&=\frac{n^{n+1}}{2^{2n-1}(n-1)!}\\&\sim\frac{n^{n+1}}{2^{2n-1}\times\sqrt{2\pi n}\mathrm{e}^{-n}n^n}\\&\sim\frac{n}{2^{2n-1}\times\sqrt{2\pi n}\mathrm{e}^{-n}}\\&\sim\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\times\frac{n^{\frac{1}{2}}}{\mathrm{e}^{n(2\ln(2)-1)}}\end{aligned}$$

Comme $2\ln(2)-1>0$ alors : $\lim\frac{N(Q_c)}{N(Q_s)}=0$ d'après les théorèmes de comparaison.

Q 44. On a $N(Q_c)=\mathrm{o}(N(Q_s))$
L'estimation est donc meilleure avec le jeu de noeuds c qu'avec le jeu de noeuds s.

• • • FIN • • •