CCS TSI MATHS 1 2020

Rémi Crétois, Éric Mercier, Étienne Besson

version du 30 juin 2020

I Discrétisation d'une équation différentielle

I.A Opérateurs agissant sur les signaux à temps discret

Q 1. On considère la suite x définie pour tout entier n par $x_n = n^2$.
Pour tout entier n, il vient alors :
— $[\Delta(x)]_n = (n+1)^2 - n^2 = 2n+1$,
— $\left[\Delta^2(x)\right]_n = (2(n+1)+1) - (2n+1) = 2$, la suite $\Delta^2(x)$ est donc constante,
— $\left[\Delta^3(x)\right]_n = 0$, la suite $\Delta^3(x)$ est donc la suite nulle.

Q 2. Soit $(x, y) \in \mathbb{S}^2$, alors, pour tout entier n :

$$\begin{aligned}
\left[\Delta(x.y)\right]_n &= x_{n+1}y_{n+1} - x_n y_n \\
&= y_n(x_{n+1} - x_n) + x_{n+1}y_{n+1} - x_{n+1}y_n \\
&= y_n\,[\Delta(x)]_n + x_{n+1}\left(y_{n+1} - y_n\right) \\
&= y_n\,[\Delta(x)]_n + x_{n+1}\left[\Delta(y)\right]_n
\end{aligned}$$

On obtient donc l'égalité sur les suites : $\boxed{\Delta(x.y) = y.\Delta(x) + \tau(x)\Delta(y)}$

Q 3. Par télescopage, le résultat est immédiat :

$$\sum_{k=0}^{n-1} [\Delta(x)]_k = \sum_{k=0}^{n-1} x_{k+1} - x_k = x_n - x_0$$

I.B Discrétisation d'une équation différentielle

I.B.1 Étude d'une équation différentielle linéaire homogène

Q 4. La fonction y est solution de l'équation (I.1) si et seulement si y est trois fois dérivable et :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad (y')''(t) + 3(y')'(t) + 2y'(t) = 0.$$

Autrement dit, y est solution de (I.1) si et seulement si y' est deux fois dérivable et vérifie l'équation (I.2).

Q 5. L'équation caractéristique de (I.2) est $X^2 + 3X + 2 = 0$, dont les racines sont -1 et -2.
Comme l'équation (I.2) est homogène ses solutions sont les fonctions $\boxed{t \longmapsto A\mathrm{e}^{-t} + B\mathrm{e}^{-2t}}$, avec A, B deux constantes réelles.
Puis, d'après la question précédente, la fonction y est solution de (I.1) ssi y' est solution de (I.2), c'est-à-dire ssi il existe A, B deux réels tels que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad y'(t) = A\mathrm{e}^{-t} + B\mathrm{e}^{-2t}$$

Ainsi y est solution de (I.1) ssi il existe A, B et C trois réels tels que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad y(t) = -A\mathrm{e}^{-t} - \frac{1}{2}B\mathrm{e}^{-2t} + C$$

On remarque donc que les fonctions $\boxed{f : t \mapsto \mathrm{e}^{-t}, g : t \mapsto \mathrm{e}^{-2t} \text{ et } h : t \mapsto 1}$ forment une famille génératrice de l'espace des solutions de (I.1).
Vérifions que f, g et h sont libres : soient α, β, γ trois réels tels que $\alpha f + \beta g + \gamma h = 0$. Autrement dit,

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \alpha\mathrm{e}^{-t} + \beta\mathrm{e}^{-2t} + \gamma = 0$$

En prenant la limite de cette égalité lorsque t tend vers $+\infty$, on obtient $\gamma = 0$. Ainsi,

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \alpha + \beta\mathrm{e}^{-t} = 0$$

et en prenant de nouveau la limite lorsque t tend vers $+\infty$, on a $\alpha = 0$.
Ainsi, $\alpha = \beta = \gamma = 0$ et la famille (f, g, h) est une base de solutions de (I.1).

I.B.2 Méthode de discrétisation de l'équation différentielle (I.1)

Q 6. Comme $\Delta^3 = \Delta^2 \circ \Delta$ et $\Delta^2 = \Delta \circ \Delta$, une suite u est solution de (I.3) ssi elle vérifie

$$\Delta^2(\Delta(u)) + 3h\Delta(\Delta(u)) + 2h^2\Delta(u) = 0.$$

Ainsi, u est solution de (I.3) ssi $\Delta(u)$ est solution de (I.4).

Q 7. Soit $v \in \mathcal{S}$ et $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}\left[\Delta^2(v)\right]_n &= [\Delta(v)]_{n+1} - [\Delta(v)]_n \\ &= v_{n+2} - v_{n+1} - (v_{n+1} - v_n) \\ &= v_{n+2} - 2v_{n+1} + v_n.\end{aligned}$$

Ainsi, la suite v est solution de (I.4) ssi

$$\begin{aligned} & \forall n \in \mathbb{N}, \left[\Delta^2(v)\right]_n + 3h\,[\Delta(v)]_n + 2h^2\,[v]_n = 0 \\ \Longleftrightarrow\ & \forall n \in \mathbb{N} v_{n+2} - 2v_{n+1} + v_n + 3h(v_{n+1} - v_n) + 2h^2 v_n = 0 \\ \Longleftrightarrow\ & \boxed{\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+2} + (3h-2)\,v_{n+1} + (2h^2 - 3h + 1)\,v_n = 0}\end{aligned}$$

Q 8. Les suites vérifiant $(I.4)$ sont des suites récurrentes d'ordre 2.
L'équation caractéristique associée à $(I.4)$ est

$$r^2 + (3h-2)r + (2h^2 - 3h + 1) = 0$$

Son discriminant est $\delta = h^2$ strictement positif. Les solutions de cette équation sont donc les réels : $\boxed{r_1 = 1 - 2h}$ et $\boxed{r_2 = 1 - h}$ car h est strictement positif.
D'après l'étude des suites récurrentes d'ordre 2, v vérifie $(I.4)$ si, et seulement si, pour tout n :

$$v_n = C_1(1-2h)^n + C_2(1-h)^n, \text{ où } (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2$$

Q 9. Soit u une solution de (I.3). D'après les questions 6 et 8, il existe deux réels C_1 et C_2 tels que

$$\forall n \in \mathbb{N}, [\Delta(u)]_n = C_1(1-2h)^n + C_2(1-h)^n.$$

Or d'après la question 3,

$$\begin{aligned}
&\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n - u_0 = \sum_{k=0}^{n-1} [\Delta(u)]_k \\
\iff &\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = u_0 + C_1 \sum_{k=0}^{n-1} (1-2h)^k + C_2 \sum_{k=0}^{n-1} (1-h)^k \\
\iff &\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = u_0 + C_1 \frac{1-(1-2h)^n}{1-(1-2h)} + C_2 \frac{1-(1-h)^n}{1-(1-h)} \\
\iff &\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = u_0 + C_1 \left(\frac{1-(1-2h)^n}{2h}\right) + C_2 \left(\frac{1-(1-h)^n}{h}\right)}
\end{aligned}$$

Pour $n = 0$, $C_1 \left(\frac{1-(1-2h)^n}{2h}\right) + C_2 \left(\frac{1-(1-h)^n}{h}\right) = 0$, donc la formule est encore vraie.
Ainsi, on a $\boxed{C_0 = u_0}$.

I.B.3 Comparaison des solutions de (I.3) à celles de (I.1)

Q 10. Soit y une solution de (I.1). D'après la question 5, il existe trois réels A, B et C tels que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $y(t) = A\mathrm{e}^{-t} + B\mathrm{e}^{-2t} + C$.
Ainsi, y vérifie $y(0) = y'(0) = y''(0) = 1$ ssi

$$\begin{cases} A+B+C=1 \\ -A-2B=1 \\ A+4B=1 \end{cases} \iff \begin{cases} A+B+C=1 \\ -A-2B=1 \\ 2B=2 \end{cases} \iff \begin{cases} A=-3 \\ B=1 \\ C=3 \end{cases}$$

Il existe donc bien une unique solution de (I.1) vérifiant $y(0) = y'(0) = y''(0) = 1$: c'est $\boxed{y(t) = -3\mathrm{e}^{-t} + \mathrm{e}^{-2t} + 3}$.

Q 11. Comme $[\Delta(u)]_0 = h$, on a $u_1 - u_0 = h$. Donc $\boxed{u_1 = h + u_0 = h + 1}$.
Comme $\left[\Delta^2(u)\right]_0 = h^2$, on a $u_2 - 2u_1 + u_0 = h^2$. Donc $\boxed{u_2 = h^2 + 2u_1 - u_0 = (h+1)^2}$.
D'après la question 9, on a de plus $u_1 = u_0 + C_1 + C_2$, donc $C_1 + C_2 = h$. Puis $u_2 = u_0 + C_1 \frac{-4h^2+4h}{2h} + C_2 \frac{-h^2+2h}{h}$, donc $(2-2h)C_1 + (2-h)C_2 = h^2 + 2h$.
On obtient le système

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = h \\ (2-2h)C_1 + (2-h)C_2 = h^2 + 2h \end{cases}$$

qu'on peut résoudre à la main, ou bien en utilisant la solution donnée par l'énoncé, on remarque que $C_1 = -2h$ et $C_2 = 3h$ sont solution du système.
On trouve donc que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\boxed{u_n = 1 - 2h\left(\frac{1-(1-2h)^n}{2h}\right) + 3h\left(\frac{1-(1-h)^n}{h}\right) = 3 + (1-2h)^n - 3(1-h)^n}.$$

Q 12. Par définition de la partie entière :

$$\left\lfloor \frac{t}{h_N} \right\rfloor \leqslant \frac{t}{h_N} < \left\lfloor \frac{t}{h_N} \right\rfloor + 1$$

Comme h_N est strictement positif, on obtient en multipliant l'encadrement par h_N :

$$\boxed{\varphi_t(N) h_N \leqslant t < (\varphi_t(N)+1) h_N}.$$

Q 13. D'après la question précédente, pour tout N strictement positif,

$$0 \leqslant t - \varphi_t(N)h_N < h_N.$$

Comme h_N tend vers 0 lorsque N tend vers $+\infty$, par encadrement, $\varphi_t(N)h_N$ tend vers t.
De plus, $\ln(1-2h_N) \sim -2h_N$ et $\ln(1-h_N) \sim -h_N$ au voisinage de $+\infty$. Ainsi, $\ln(1-2h_N)\varphi_t(N)$ et $\ln(1-h_N)\varphi_t(N)$ tendent respectivement vers $-2t$ et vers $-t$ lorsque N tend vers $+\infty$.
Comme l'exponentielle est une fonction continue sur $\mathbb{R}$,

$$\lim_{N\to+\infty}(1-2h)^{\varphi_t(N)} = \lim_{N\to+\infty} \mathrm{e}^{\varphi_t(N)\ln(1-2h_N)} = \mathrm{e}^{-2t}$$
$$\lim_{N\to+\infty}(1-h)^{\varphi_t(N)} = \lim_{N\to+\infty} \mathrm{e}^{\varphi_t(N)\ln(1-h_N)} = \mathrm{e}^{-t}$$

Q 14. Par définition, $u^{(N)}_{\varphi_t(N)} = 3 + (1-2h_N)^{\varphi_t(N)} - 3(1-h_N)^{\varphi_t(N)}$.
D'après la question précédente, $(1-2h_N)^{\varphi_t(N)}$ et $(1-h_N)^{\varphi_t(N)}$ convergent lorsque N tend vers $+\infty$. Par opérations sur les limites, $u^{(N)}_{\varphi_t(N)}$ converge aussi et

$$\boxed{\lim_{N\to+\infty} u^{(N)}_{\varphi_t(N)} = 3 + \mathrm{e}^{-2t} - 3\mathrm{e}^{-t}}$$

On retrouve l'expression de $y(t)$ de la question 11.

II Traitement d'un signal par filtre linéaire récursif

II.A Propriétés générales des filtres linéaires récursifs

Q 15. *Existence et unicité du signal de sortie.*
Soit $x \in \mathcal{S}$. Montrons par récurrence forte qu'il existe une unique suite $y \in \mathcal{S}$ vérifiant (II.1).
— Initialisation : on pose $y_0 = x_0$, $y_1 = x_1 - p_1 y_0$ et $y_2 = x_2 - p_2 y_1 - q_2 y_0$. Les trois premiers termes de la suite y sont bien définis de faç on unique.
— Hérédité : soit n un entier supérieur ou égal à 2. Supposons que la suite y est définie de façon unique jusqu'au rang n en satisfaisant à (II.1), et montrons que y_{n+1} est défini de manière unique.
Comme $n \geqslant 2$, le terme de rang $n+1$ de la suite y doit vérifier $y_{n+1} = x_{n+1} - p_{n+1}y_n - q_{n+1}y_{n-1} - r_{n+1}y_{n-2}$, ce qui permet de le définir de façon unique.
D'après le principe de récurrence forte, la suite il existe bien une unique suite y vérifiant (II.1).

Q 16. Vérifions que T est linéaire : soit x et z deux éléments de $\mathcal{S}$, et notons $y = T(x)$ et $w = T(z)$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ la suite $u = \lambda y + w$ vérifie :

$$\begin{cases} \lambda y_0 + w_0 = \lambda x_0 + z_0 \\ \lambda y_1 + w_1 = \lambda(x_1 - p_1 y_1) + z_1 - p_1 w_0 \\ \lambda y_2 + w_2 = \lambda(x_2 - p_2 y_1 - q_2 y_0) + z_2 - p_2 w_1 - q_2 w_0 \\ \forall n \geqslant 0, \lambda y_{n+3} + w_{n+3} = \lambda(x_{n+3} - p_{n+3}y_{n+2} - q_{n+3}y_{n+1} - r_{n+3}y_n) + z_{n+3} - p_{n+3}w_{n+2} - q_{n+3}w_{n+1} - r_{n+3}w_n \end{cases}$$

autrement dit, u vérifie (II.1) avec $\lambda x + z$ comme signal d'entrée. D'après la question précédente, on a donc $u = T(\lambda x + z)$, et T est bien un endomorphisme de $\mathcal{S}$.
Soit x telle que $T(x) = 0$. Montrons par récurrence sur n que $x_n = 0$.
— Initialisation : pour $n = 0, 1$ et 2, $0 = x_0$, $0 = x_1 - 0$ et $0 = x_2 - 0 - 0$, donc $x_0 = x_1 = x_2 = 0$.
— Hérédité : soit $n \geqslant 2$ et supposons que $x_n = 0$. Montrons que $x_{n+1} = 0$.
Comme $n \geqslant 2$, on a $0 = x_{n+1} - 0 - 0 - 0$ (dernière ligne de (II.1)), donc $x_{n+1} = 0$.
D'après le principe de récurrence, x est la suite nulle.
Ainsi $\boxed{T \text{ est endomorphisme injectif de } \mathcal{S}}$.

Q 17. On remarque que $\mathcal{H}$ n'est pas vide car la suite nulle est dedans.
Prenons ensuite y et z deux éléments de $\mathcal{H}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
&(\lambda y+z)_{n+3}+p_{n+3}(\lambda y+z)_{n+2}+q_{n+3}(\lambda y+z)_{n+1}+r_{n+3}(\lambda y+z)_n \\
&=\lambda(y_{n+3}+p_{n+3}y_{n+2}+q_{n+3}y_{n+1}+r_{n+3}y_n)+z_{n+3}+p_{n+3}z_{n+2}+q_{n+3}z_{n+1}+r_{n+3}z_n \\
&=0
\end{aligned}$$

car y et z sont des éléments de $\mathcal{H}$.
Ainsi, $\boxed{\mathcal{H} \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathcal{S}}$.

Q 18. Vérifions tout d'abord que ψ est linéaire : soient y et z deux éléments de $\mathcal{H}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
\psi(\lambda y+z) &= \big((\lambda y+z)_0,(\lambda y+z)_1,(\lambda y+z)_2\big) \\
&= \lambda(y_0,y_1,y_2)+(z_0,z_1,z_2) \\
&= \lambda\psi(y)+\psi(z).
\end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{\psi \text{ est linéaire}}$.
Soit $y \in \ker(\psi)$. Alors la suite y vérifie (II.1) pour le signal nul. D'après la question 16, la suite y est nulle et $\boxed{\psi \text{ est injective}}$.
Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$. On pose $x_0=a, x_1=b+p_1a$ et $x_2=c+p_2b+q_2a$, puis pour tout $n \geqslant 3$, $x_n=0$. Prenons alors $y=T(x)$. C'est un élément de $\mathcal{H}$ d'après la quatrième ligne de (II.1). De plus,

$$\begin{aligned}
&y_0=x_0=a \\
&y_1=x_1-p_1y_0=b+p_1a-p_1a=b \\
&y_2=x_2-p_2y_1-q_2y_0=c+p_2b+q_2a-p_2b-q_2a=c
\end{aligned}$$

D'où $\psi(y)=x$, et $\boxed{\psi \text{ est surjective}}$.
Ainsi, ψ est un isomorphisme. Comme $\mathbb{R}^3$ est de dimension 3, $\boxed{\dim\mathcal{H}=3}$.

II.B Méthode algébrique de calcul du signal de sortie y pour un signal d'entrée $x \in \mathcal{S}$ donné

Q 19. Pour tout entier naturel n, la rélation de récurrence s'écrit matriciellement :

$$\begin{pmatrix} y_{n+1} \\ y_{n+2} \\ y_{n+3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -r_{n+3} & -q_{n+3} & -p_{n+3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_n \\ y_{n+1} \\ y_{n+2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x_{n+3} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \mathbf{Y}_{n+1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -r_{n+3} & -q_{n+3} & -p_{n+3} \end{pmatrix}\mathbf{Y}_n + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x_{n+3} \end{pmatrix}$$

On pose donc, pour tout entier naturel n, $\boxed{M_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -r_{n+3} & -q_{n+3} & -p_{n+3} \end{pmatrix}}$

Q 20. Pour tout entier naturel n, $\det M_n = -r_{n+3}$. Or, d'après les hypothèses : $\forall n \in \mathbb{N}, r_n \neq 0$.
Donc pour tout entier naturel n, M_n est une matrice inversible.

Q 21. a, b et c étant des suites de $\mathcal{H}$, ces suites vérifient la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad y_{n+3}+p_{n+3}y_{n+2}+q_{n+3}y_{n+1}+r_{n+3}y_n=0.$$

On a donc immédiatement, pour tout entier n : $\boxed{\mathbf{A}_{n+1}=M_n\mathbf{A}_n,\ \mathbf{B}_{n+1}=M_n\mathbf{B}_n,\ \mathbf{C}_{n+1}=M_n\mathbf{C}_n.}$

Q 22. Montrons par récurrence sur n que $(\mathbf{A}_n,\mathbf{B}_n,\mathbf{C}_n)$ est libre.

— Initialisation : comme ψ est un isomorphisme et (a, b, c) est une base de $\mathcal{H}$, $(\psi(a), \psi(b), \psi(c))$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
Prenons $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tels que $\alpha\mathbf{A}_0 + \beta\mathbf{B}_0 + \gamma\mathbf{C}_0 = 0$. Alors $\alpha\psi(a) + \beta\psi b + \gamma\psi(c) = 0$, donc $\alpha = \beta = \gamma = 0$.
Ainsi, $(\mathbf{A}_0, \mathbf{B}_0, \mathbf{C}_0)$ est libre.

— Hérédité : prenons $n \in \mathbb{N}$ et supposons que $(\mathbf{A}_n, \mathbf{B}_n, \mathbf{C}_n)$ est libre. Montrons que $(\mathbf{A}_{n+1}, \mathbf{B}_{n+1}, \mathbf{C}_{n+1})$ est libre.
Prenons $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tels que

$$\alpha\mathbf{A}_{n+1} + \beta\mathbf{B}_{n+1} + \gamma\mathbf{C}_{n+1} = 0.$$

D'après la question précédente,

$$\alpha M_n\mathbf{A}_n + \beta M_n\mathbf{B}_n + \gamma M_n\mathbf{C}_n = 0 \iff M_n(\alpha\mathbf{A}_n + \beta\mathbf{B}_n + \gamma\mathbf{C}_n) = 0.$$

Comme M_n est inversible, on a donc $\alpha\mathbf{A}_n + \beta\mathbf{B}_n + \gamma\mathbf{C}_n = 0$, et par hypothèse de récurrence, $\alpha = \beta = \gamma = 0$.
Ainsi, $(\mathbf{A}_{n+1}, \mathbf{B}_{n+1}, \mathbf{C}_{n+1})$ est libre.

D'après le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(\mathbf{A}_n, \mathbf{B}_n, \mathbf{C}_n)$ est libre. Comme $\mathscr{M}3,1(\mathbb{R})$ est de dimension 3, c'est une base.

Q 23. On suppose désormais que y est une suite vérifiant (II.1). Prenons $n \in \mathbb{N}$. Comme $\mathbf{Y}_n \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et $(\mathbf{A}_n, \mathbf{B}_n, \mathbf{C}_n)$ est une base de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, il existe trois scalaires u_n, v_n et w_n (les coordonnées de $\mathbf{Y}_n$ tels que

$$\mathbf{Y}_n = u_n\mathbf{A}_n + v_n\mathbf{B}_n + w_n\mathbf{C}_n.$$

Q 24. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
[\Delta(u)]_n\mathbf{A}_{n+1} + [\Delta(v)]_n\mathbf{B}_{n+1} + [\Delta(w)]_n\mathbf{C}_{n+1} &= u_{n+1}\mathbf{A}_{n+1} + v_{n+1}\mathbf{B}_{n+1} + w_{n+1}\mathbf{C}_{n+1} - (u_n\mathbf{A}_{n+1} + v_n\mathbf{B}_{n+1} + w_n\mathbf{C}_{n+1})\\
&= \mathbf{Y}_{n+1} - M_n(u_n\mathbf{A}_n + v_n\mathbf{B}_n + w_n\mathbf{C}_n)\\
&= \mathbf{Y}_{n+1} - M_n\mathbf{Y}_n = \begin{pmatrix} 0\\ 0\\ x_{n+3}\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

d'après la question 19 car y vérifie (II.1).

Q 25. D'après la question précédente, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$W_{n+1}\begin{pmatrix}[\Delta(u)]_n\\ [\Delta(v)]_n\\ [\Delta(w)]_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\\ 0\\ x_{n+3}\end{pmatrix}.$$

Comme $(\mathbf{A}_{n+1}, \mathbf{B}_{n+1}, \mathbf{C}_{n+1})$ est une base de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, la matrice W_{n+1} est inversible. Ainsi :

$$\boxed{\begin{pmatrix}[\Delta(u)]_n\\ [\Delta(v)]_n\\ [\Delta(w)]_n\end{pmatrix} = (W_{n+1})^{-1}\begin{pmatrix} 0\\ 0\\ x_{n+3}\end{pmatrix}}.$$

Q 26. — On commence par déterminer trois suites a, b et c qui forment une base de $\mathcal{H}$.
— On peut alors déterminer u_0, v_0 et w_0 en décomposant $\mathbf{Y}_0$ sur la base $(\mathbf{A}_0, \mathbf{B}_0, \mathbf{C}_0)$.
— On obtient aussi les matrices W_n qu'on inverse pour $n \geqslant 1$.
— On calcule $(W_{n+1})^{-1}\begin{pmatrix} 0\\ 0\\ x_{n+3}\end{pmatrix}$, ce qui donne $[\Delta(u)]_n, [\Delta(v)]_n$ et $[\Delta(w)]_n$ pour $n \geqslant 0$.
— On calcule les sommes $\sum_{k=0}^{n-1}[\Delta(u)]_k$, $\sum_{k=0}^{n-1}[\Delta(v)]_k$ et $\sum_{k=0}^{n-1}[\Delta(w)]_k$ pour $n \geqslant 1$ et on y ajoute u_0, v_0 et w_0 respectivement pour obtenir u_n, v_n et w_n.
— On calcule alors $\mathbf{Y}_n = u_n\mathbf{A}_n + v_n\mathbf{B}_n + w_n\mathbf{C}_n$.

II.C Exemple de mise en œuvre de cette méthode algébrique pour un signal d'entrée de type rampe

Q 27. Soit $q \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$. On a : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} q^k = q\frac{1-q^n}{1-q} = \frac{q-q^{n+1}}{1-q}$ (somme des premiers termes d'une suite géométrique).

En dérivant cette fonction polynomiale on obtient : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} kq^{k-1} = \frac{(1-(n+1)q^n)(1-q)+(q-q^{n+1})}{(1-q)^2}$ et en multipliant cette égalité par q :

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} kq^k = \frac{q\left((-n-1)q^n + nq^{n+1} + 1\right)}{(1-q)^2}}$$

Q 28. On vérifie que a, b et c sont bien des éléments de $\mathcal{H}$: pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
a_{n+3} - 7a_{n+1} + 6a_n &= 1 - 7 + 6 = 0\\
b_{n+3} - 7b_{n+1} + 6b_n &= (-3)^{n+3} - 7(-3)^{n+1} + 6(-3)^n = (-3)^n(-27+21+6) = 0\\
c_{n+3} - 7c_{n+1} + 6c_n &= 2^{n+3} - 7\cdot 2^{n+1} + 6\cdot 2^n = 2^n(8-14+6) = 0
\end{aligned}$$

Donc a, b et c sont bien dans $\mathcal{H}$.
On sait, d'après **Q18**, que $\mathcal{H}$ est de dimension 3. Il suffit donc de montrer que la famille de trois vecteurs (a, b, c) est libre.
Soient $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$; supposons que la suite $\alpha a + \beta b + \gamma c$ est nulle. Si on avait $\beta \neq 0$, alors, pour n tendant vers $+\infty$, on aurait

$$0 = \alpha + \beta(-3)^n + \gamma 2^n = \beta(-3)^n\left(1 + \frac{\alpha}{\beta(-3)^n} + \frac{\gamma}{\beta 2^n}\right) \sim \beta(-3)^n,$$

ce qui n'est manifestement pas le cas car la suite de terme général $\beta(-3)^n$ ne tend pas vers zéro. Ainsi, $\beta = 0$.
Si, maintenant, on avait $\gamma \neq 0$, on pourrait écrire de même, pour n tendant vers l'infini, $0 = \alpha + \gamma 2^n \sim \gamma 2^n$, ce qui est une nouvelle fois impossible. Ainsi, $\gamma = 0$.
La suite $\alpha a + \beta b + \gamma c$ est donc la suite constante égale à α. Cette suite étant nulle par hypothèse, on en déduit enfin que $\alpha = 0$.
La famille (a, b, c) est donc libre; c'est donc une base de $\mathscr{H}$.

Q 29. On résout le système par opérations élémentaires sur les lignes :

$$\begin{pmatrix}1 & (-3)^{n+1} & 2^{n+1}\\ 1 & (-3)^{n+2} & 2^{n+2}\\ 1 & (-3)^{n+3} & 2^{n+3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 0\\ n+3\end{pmatrix} \underset{\substack{L_2\leftarrow L_2-L_1\\ L_3\leftarrow L_3-L_1}}{\iff} \begin{pmatrix}1 & (-3)^{n+1} & 2^{n+1}\\ 0 & -4\cdot(-3)^{n+1} & 2^{n+1}\\ 0 & 8\cdot(-3)^{n+1} & 3\cdot 2^{n+1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 0\\ n+3\end{pmatrix}$$

$$\underset{L_3\leftarrow L_3+2L_2}{\iff} \begin{pmatrix}1 & (-3)^{n+1} & 2^{n+1}\\ 0 & -4\cdot(-3)^{n+1} & 2^{n+1}\\ 0 & 0 & 5\cdot 2^{n+1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 0\\ n+3\end{pmatrix}$$

$$\iff \boxed{\alpha = -\frac{n+3}{4};\quad \beta = \frac{n+3}{20\cdot(-3)^{n+1}};\quad \gamma = \frac{n+3}{5\cdot 2^{n+1}}.}$$

Q 30. eurk

On étudie ici le cas particulier du système $(II.1)$ avec :
— la suite x définie pour tout entier n par $x_n = n$.
— la suite nulle p, les suites constantes q et r définies pour tout entier n par par $r_n = 6$ et $q_n = -7$.

La famille (a, b, c) de la question **Q28** est une base de $\mathcal{H}$.
Pour ce faire, on suit la méthode détaillée en **Q26**.
On détermine (u_0, v_0, w_0) en résolvant :

$$u_0\mathbf{A}_0 + v_0\mathbf{B}_0 + w_0\mathbf{C}_0 = \begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{cases} u_0 = -\dfrac{3}{4} \\ v_0 = -\dfrac{1}{20} \\ w_0 = \dfrac{4}{5} \end{cases}$$

D'après la question **Q29** on a, pour $n \in \mathbb{N}$: $[\Delta(u)]_n = -\dfrac{n+3}{4}$; $\quad [\Delta(v)]_n = \dfrac{n+3}{20\cdot(-3)^{n+1}}$; $\quad [\Delta(w)]_n = \dfrac{n+3}{5\cdot 2^{n+1}}$.
On calcule les sommes à l'aide du résultat de la questions **Q27** et des sommes des premiers termes d'une suite géométrique :

$$\sum_{k=0}^{n-1}[\Delta(u)]_k = -\frac{1}{4}\sum_{k=0}^{n-1}(k+3) = -\frac{n(n+5)}{8}$$
$$\sum_{k=0}^{n-1}[\Delta(v)]_k = \frac{1}{20}\sum_{k=1}^{n}\frac{k+2}{(-3)^k} = \frac{1}{20\times 16}\left(\frac{4n+11}{(-3)^n} - 11\right)$$
$$\sum_{k=0}^{n-1}[\Delta(w)]_k = \frac{1}{5}\left(4 - \frac{n+4}{2^n}\right)$$

On obtient avec les notations précédentes, pour $n \geqslant 1$:

$$u_n = \sum_{k=0}^{n-1}[\Delta(u)]_k + u_0 = -\frac{n(n+5)}{8} - \frac{3}{4} = -\frac{(n+2)(n+3)}{8}$$
$$v_n = \sum_{k=0}^{n-1}[\Delta(v)]_k + v_0 = \frac{1}{20\times 16}\left(\frac{4n+11}{(-3)^n} - 11\right) - \frac{1}{20} = \frac{1}{20\times 16}\left(\frac{4n+11}{(-3)^n} - 27\right)$$
$$w_n = \sum_{k=0}^{n-1}[\Delta(w)]_k + w_0 = \frac{1}{5}\left(4 - \left(\frac{1}{2}\right)^n(n+4)\right) + \frac{4}{5} = \frac{1}{5}\left(8 - \left(\frac{1}{2}\right)^n(n+4)\right)$$

On a : $\mathbf{Y}_n = u_n\mathbf{A}_n + v_n\mathbf{B}_n + w_n\mathbf{C}_n$, et la première ligne nous donne y_n :

$$\begin{aligned} y_n &= u_n + (-3)^n v_n + 2^n w_n \\ &= \frac{(-3)^{n+3} + 64\times 2^{n+3} - 40n^2 - 260n - 485}{320} \end{aligned}$$

Remarque : Quel est l'intérêt mathématique de la question ? A-t-on pensé qu'un candidat perdrait du temps à faire ces calculs ? Quelque-chose doit m'échapper dans une simplification magistrale ?...

II.D Méthode analytique de calcul d'un signal de sortie

Q 31. Soit $u, v \in \mathcal{S}$, de transformées en Z égales respectivement à U et V. On suppose que $U = V$. On a donc $\mathcal{D}_u = \mathcal{D}_v$ et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n z^{-n} = \sum_{n=0}^{+\infty} v_n z^{-n}$ pour tout $z \in \mathcal{D}_u$.

Pour tout complexe w tel que $|w| < \rho_u = \rho_v$, on a $\left|\dfrac{1}{w}\right| > \dfrac{1}{\rho_u}$, donc $\dfrac{1}{w} \in \mathcal{D}_u$. On pose $F(w) = U\left(\dfrac{1}{w}\right) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n w^n$ et $G(w) = V\left(\dfrac{1}{w}\right) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} v_n w^n$ qui sont deux fonctions DSE au voisinage de 0.
On a pour tout w tel que $|w| < \rho_u$, $F(w) = G(w)$. Par unicité du DSE au voisinage de 0, on a pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n = v_n$.

Q 32. Soient $z \in \mathbb{C}^\star$ et $N \in \mathbb{N}^\star$. Alors

$$\sum_{n=0}^{N} u_n z^n = u_0 + z\sum_{n=0}^{N-1} u_{n+1} z^n = u_0 + z\sum_{n=0}^{N-1} [\tau(u)]_n z^n.$$

On en déduit que les séries $\sum u_n z^n$ et $\sum [\tau(u)]_n z^n$ sont de même nature ; les deux séries entières $\sum u_n z^n$ et $\sum [\tau(u)]_n z^n$ admettent donc le même rayon de convergence.

Q 33. La série géométrique $\sum (-2)^n z^n = \sum (-2z)^n$ est convergente si et seulement si $|-2z| < 1$. Autrement dit, $\rho_u = \dfrac{1}{2}$.

La transformée en Z de u est donc égale, pour tout z tel que $|z| > 2$, à

$$U(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-2)^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(-\frac{2}{z}\right)^n = \frac{1}{1+\frac{2}{z}} = \frac{z}{z+2}.$$

II.E Exemple de mise en œuvre de la méthode analytique pour un signal d'entrée exponentiel

Q 34. Montrons par récurrence sur $k \in \mathbb{N}^*$ que la suite $\tau^k(y)$ admet une transformée en Z définie sur $\mathscr{D}_y$ vérifiant :

$$\forall z \in \mathscr{D}_y, \quad Y_{\tau^k}(z) = z^k Y(z) - \sum_{i=0}^{k-1} y_i z^{k-i}.$$

— Initialisation : d'après la question 32, $\rho_{\tau(y)} = \rho_y > 0$, donc $\tau(y)$ admet une transformée en Z définie sur $\mathscr{D}_y$. De plus, pour tout $z \in \mathscr{D}_y$,

$$\begin{aligned}
Y_\tau(z) &= \sum_{n=0}^{+\infty} y_{n+1} z^{-n} \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} y_n z^{-n+1} \\
&= z\sum_{n=1}^{+\infty} y_n z^{-n} \\
&= zY(z) - zy_0.
\end{aligned}$$

Donc la propriété est vraie au rang 1.

— Hérédité : prenons $k \geqslant 1$ et supposons la propriété vraie au rang k. Montrons qu'elle est encore vraie au rang $k+1$.
Comme $\tau^{k+1}(y) = \tau^k(y)$, et par hypothèse de récurrence, on peut appliquer l'initialisation à la suite $\tau^k(y)$ et obtenir que $\tau^{k+1}(y)$ admet une transformée en Z définie sur $\mathscr{D}_y$ et vérifiant pour tout $z \in \mathscr{D}_y$,

$$\begin{aligned}
Y_{\tau^{k+1}}(z) &= zY_{\tau^k}(z) - z\left[\tau^k(y)\right]_0 \\
&= z\left(z^k Y(z) - \sum_{i=0}^{k-1} y_i z^{k-i}\right) - zy_k \\
&= z^{k+1} Y(z) - \sum_{i=0}^{k-1} y_i z^{k+1-i} - z^{k+1-k} y_k \\
&= z^{k+1} Y(z) - \sum_{i=0}^{k} y_i z^{k+1-i}
\end{aligned}$$

Donc la propriété est vraie au rang $k+1$.

D'après le principe de récurrence, la propriété est vraie pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

Q 35. Soit $n \in \mathbb{N}$:
$$\boxed{\left[\tau^3(y)\right]_n + \left[\tau^2(y)\right]_n - \left[\tau(y)\right]_n - y_n = y_{n+3} + y_{n+2} - y_{n+1} - y_n = (-2)^n}.$$

D'après l'énoncé et la question précédente, la transformée en Z de $\tau^3(y) + \tau^2(y) - \tau(y) - y$ est définie sur $\mathscr{D}_y$ et vaut pour tout $z \in \mathscr{D}_y$:
$$\begin{aligned} Y_{\tau^3}(z) + Y_{\tau^2}(z) - Y_\tau(z) - Y(z) &= z^3 Y(z) - (y_0 z^3 + y_1 z^2 + y_2 z) + z^2 Y(z) - (y_0 z^2 + y_1 z) - zY(z) + y_0 z Y(z) \\ &= Y(z)(z^3 + z^2 - z - 1) + z^2 + 2z. \end{aligned}$$

D'après la question 33, cette transformée en Z, on a pour tout $z \in \mathscr{D}_y \setminus \{-2\}$,
$$\begin{aligned} & Y(z)(z^3 + z^2 - z - 1) + z(z+2) = \frac{z}{z+2} \\ \iff & Y(z)(z^3 + z^2 - z - 1) = \frac{z(1-(z+2)^2)}{z+2} = \frac{-z(z^2+4z+3)}{z+2} = \frac{-z(z+1)(z+3)}{z+2}. \end{aligned}$$

Le polynôme z^3+z^2-z-1 admet 1 comme racine simple et -1 comme racine double. Donc $z^3+z^2-z-1 = (z-1)(z+1)^3$.
Ainsi, pour tout $z \in \mathscr{D}_y \setminus \{-2,-1,1\}$,
$$Y(z) = \frac{-z(z+1)(z+3)}{(z+2)(z-1)(z+1)^2} = \frac{-z(z+3)}{(z-1)(z+1)(z+2)}.$$

Q 36. On effectue une décomposition en éléments simples, par identification, pour obtenir, pour tout complexe $z \notin \{-2,-1,1\}$:
$$\frac{-z(z+3)}{(z-1)(z+1)(z+2)} = \frac{-1}{z+1} + \frac{\frac{2}{3}}{z+2} + \frac{-\frac{2}{3}}{z-1}$$

Q 37. Pour tout réel c non nul, le développement en série entière (usuel) de $z \mapsto \dfrac{1}{1-cz}$ est
$$\frac{1}{1-cz} = \sum_{k \geqslant 0} c^k z^k$$

Son rayon de convergence est $R = \dfrac{1}{|c|}$.

Q 38. Le rayon de convergence de la série entière précédente étant strictement positif, la transformée en Z est définie sur le domaine $\mathscr{D} = \left\{z \in \mathbb{C}^*;\ |z| > |c|\right\}$ par :
$$\sum_{n \geqslant 0} (-c)^n z^{-n} = \frac{1}{1+cz^{-1}} = \frac{z}{z+c}$$

On en déduit donc que sur ce domaine :
$$\frac{1}{z+c} = \frac{1}{z}\sum_{n \geqslant 0} (-c)^n z^{-n} = \sum_{n \geqslant 0} (-c)^n z^{-n-1}$$

Q 39. La série entière $\sum_{n \geqslant 0} (-z)^n$ a pour rayon de convergence $R_1 = 1$, la transformée en Z de $\left((-1)^n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge donc pour $|z| > 1$.
La série entière $\sum_{n \geqslant 0} (-2z)^n$ a pour rayon de convergence $R_2 = \dfrac{1}{2}$, la transformée en Z de $\left((-2)^n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ converge donc pour $|z| > 2$.
La série entière $\sum_{n \geqslant 0} (z)^n$ a pour rayon de convergence $R_3 = 1$, la transformée en Z de $(1)_{n \in \mathbb{N}}$ converge donc pour $|z| > 1$.

Donc les séries : $\sum_{n\geqslant 0}(-1)^n z^{-n}$, $\sum_{n\geqslant 0}(-2)^n z^{-n}$, $\sum_{n\geqslant 0} z^{-n}$ convergent pour $|z|>2$, par linéarité, on obtient la convergence de :

$$\sum_{n\geqslant 0}(-1)^n z^{-n} + -\frac{1}{3}\sum_{n\geqslant 0}(-2)^n z^{-n} - \frac{2}{3}\sum_{n\geqslant 0} z^{-n} = \sum_{n\geqslant 0}\left((-1)^n + -\frac{(-2)^n}{3} - \frac{2}{3}\right) z^{-n}$$

et en multipliant par $\dfrac{1}{z}$, pour $|z|>2$, la convergence de :

$$\sum_{n\geqslant 0}\left((-1)^n - \frac{(-2)^n}{3} - \frac{2}{3}\right) z^{-(n+1)}$$

Q 40. D'après **Q35** et **Q36**, la transformée en Z de y s'écrit :

$$Y(z) = \frac{-1}{z+1} + \frac{\frac{2}{3}}{z+2} + \frac{-\frac{2}{3}}{z-1}$$

Dont le développement en série s'écrit d'après **Q38** et **Q39** pour $|z|>2$:

$$\begin{aligned}
Y(z) &= -\sum_{n\geqslant 0}(-1)^n z^{-n-1} + \frac{2}{3}\sum_{n\geqslant 0}(-2)^n z^{-n-1} - \frac{2}{3}\sum_{n\geqslant 0} z^{-n-1}\\
&= \sum_{n\geqslant 0}\left((-1)^{n+1} - \frac{(-2)^{n+1}}{3} - \frac{2}{3}\right) z^{-n-1}\\
&= \sum_{n\geqslant 1}\left((-1)^{n} - \frac{(-2)^{n}}{3} - \frac{2}{3}\right) z^{-n} \text{ après décalage d'indice}\\
&= \sum_{n\geqslant 0}\left((-1)^{n} - \frac{(-2)^{n}}{3} - \frac{2}{3}\right) z^{-n} \text{ car le premier coefficient est nul}
\end{aligned}$$

D'après l'unicité démontrée dans la question **Q31** on en déduit finalement que, pour tout entier n :

$$\boxed{y_n = (-1)^n - \frac{(-2)^n}{3} - \frac{2}{3}}$$

• • • FIN • • •