Corrigé Centrale-Supélec TSI - Mathématiques 2 -2016

I.A.1) $\forall n\in\mathbb{N}$, $\|u_{n+1}\|^2=\|A u_n\|^2=(A u_n)^T(A u_n)=(u_n)^T A^T A u_n$
or $A\in O_3(\mathbb{R})$ donc $A^T A=I_3$, ainsi $\|u_{n+1}\|^2=(u_n)^T u_n=\|u_n\|^2$
Enfin, puisque $\begin{cases}\|u_{n+1}\|\geqslant 0\\ \|u_n\|\geqslant 0\end{cases}$, on a $\|u_{n+1}\|=\|u_n\|$.
La suite $(\|u_n\|)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante donc $\forall n\in\mathbb{N}$, $\|u_n\|=\|u\|$.
Ainsi la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $M_{3,1}(\mathbb{R})$

I.A.2) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ $\Leftrightarrow$ $\lim\limits_{n\to+\infty}\left\|u_n-\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\right\|=0$ $\Leftrightarrow$ $\lim\limits_{n\to+\infty}\|u_n\|=0$

Or la suite $(\|u_n\|)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante donc : $\lim\limits_{n\to+\infty}\|u_n\|=0$ $\Leftrightarrow$ $\|u\|=0$ $\Leftrightarrow$ $u=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$

I.A.3) Les seules valeurs propres réelles possibles pour une isométrie sont -1 ou 1.
Ainsi $A\in T_3(\mathbb{R})\cap O_3(\mathbb{R})\Rightarrow Sp(A)\subset\{-1;1\}$

De plus : $A\in O_3(\mathbb{R})$ $\Rightarrow$ $\exists\,\theta\in\mathbb{R}$ tel que A soit semblable à $\begin{pmatrix}\pm 1 & 0 & 0\\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta)\\ 0 & \sin(\theta) & -\cos(\theta)\end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ $\exists\,\theta\in\mathbb{R}$ tel que $\chi_A(X)=(X\pm 1)\left((X-\cos(\theta))^2+\sin^2\theta\right)$
$\Rightarrow$ $\exists\,\theta\in\mathbb{R}$ tel que $\chi_A(X)=(X\pm 1)(X-e^{i\theta})(X-e^{-i\theta})$
or $e^{i\theta}\in\mathbb{R}$ $\Leftrightarrow$ $\theta=0\ [\pi]$

Donc $A\in T_3(\mathbb{R})\cap O_3(\mathbb{R})$ $\Rightarrow$ A est semblable à I_3, $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ ou $-I_3$

I.B.1) $(B_s)^T B_s=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&s^2\\0&s&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&s\\0&s^2&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&s^4&0\\0&0&s^2\end{pmatrix}$

$B_s\in O_3(\mathbb{R})\Leftrightarrow(B_s)^T B_s=I_3\Leftrightarrow\begin{cases}s^4=1\\s^2=1\end{cases}\Leftrightarrow s\in\{-1;1\}$

$B_1=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$, $det(B_1)=-1$ et B_1 est symétrique donc B_1 est la matrice de la réflexion par au plan engendré le premier vecteur de la base et la somme du deuxième et du troisième vecteur de la base (sous-espace propre associé à la valeur propre 1).

$B_{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&-1\\0&1&0\end{pmatrix}$ est la matrice de la rotation d'axe dirigé par le premier vecteur de la base et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.

I.B.2) $\chi_{B_s}(X)=(X-1)(X^2-s^3)$

Si $s<0$ alors $s^3<0$ et $Sp(B_s)=\left\{1;i(-s)^{\frac{3}{2}};-i(-s)^{\frac{3}{2}}\right\}$ donc $B_s\notin T_3(\mathbb{R})$
Si $s=0$ alors $Sp(B_s)=\{1;0\}$ donc $B_s\in T_3(\mathbb{R})$ et $\rho(B_s)=1$
Si $s>0$ alors $Sp(B_s)=\left\{1;s^{\frac{3}{2}};-s^{\frac{3}{2}}\right\}$ donc $B_s\in T_3(\mathbb{R})$ et $\rho(B_s)=max\left(1;s^{\frac{3}{2}}\right)$

I.B.3) $(B_s)^2=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&s^3&0\\0&0&s^3\end{pmatrix}$ est diagonale donc $\forall\,l\in\mathbb{N}^*$, $(B_s)^{2l}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&s^{3l}&0\\0&0&s^{3l}\end{pmatrix}$

I.B.4) Par exemple en posant $A=B_2\in T_3(\mathbb{R})$ et $u=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$, la suite définie par $u_0=u$ et

$\forall n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}=A u_n$ vérifie $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_{2n}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&8^n&0\\0&0&8^n\end{pmatrix}u=\begin{pmatrix}0\\8^n\\0\end{pmatrix}$

Ainsi $\lim\limits_{n\to+\infty}\|u_{2n}\|=\lim\limits_{n\to+\infty}8^n=+\infty$ donc la suite (u_n) n'est pas bornée dans $M_{3,1}(\mathbb{R})$.

II.A Pour $n=0$, les deux personnes sont dans deux pièces voisines donc pas dans la même pièce, ainsi $a_0=0$, $b_0=1$, $c_0=0$.

II.B. Sachant que les deux personnes sont dans la même pièce à l'instant n, elles restent dans la même pièce à l'instant $n+1$ donc $P_{A_n}(A_{n+1})=1$.
Sachant que les deux personnes sont dans des pièces voisines à l'instant n, elles ne peuvent pas se retrouver dans la même pièce à l'instant $n+1$ car chacune d'elle se déplace dans une pièce voisine donc $P_{B_n}(A_{n+1})=0$.
La configuration des 5 pièces est telle que deux pièces non voisines sont séparées d'un côté par une seule pièce et de l'autre côté par deux pièces. Ainsi, sachant que les deux personnes sont des pièces non voisines à l'instant n, elles se retrouvent dans la même pièce à l'instant $n+1$ si et seulement si elles choisissent d'aller dans l'unique pièce qui les sépare. Ces choix étant indépendants et valant $\dfrac{1}{2}$ pour chacun on a :

$P_{C_n}(A_{n+1})=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{4}$

II.C Puisque A_n, B_n et C_n forment un système complet d'événements, la formule des probabilités totales donne :
$P(A_{n+1})=P(A_{n+1}\cap A_n)+P(A_{n+1}\cap B_n)+P(A_{n+1}\cap C_n)$
$P(A_{n+1})=P(A_n)P_{A_n}(A_{n+1})+P(B_n)P_{B_n}(A_{n+1})+P(C_n)P_{C_n}(A_{n+1})$

$P(A_{n+1})=P(A_n)\times 1+P(B_n)\times 0+P(C_n)\times\frac{1}{4}$

II.D D'après la question précédente, $\forall n\in\mathbb{N}$, $a_{n+1}=a_n+\frac{1}{4}c_n$

$b_{n+1}=P(B_{n+1})=P(B_{n+1}\cap A_n)+P(B_{n+1}\cap B_n)+P(B_{n+1}\cap C_n)$ (probabilités totales)
$c_{n+1}=P(C_{n+1})=P(C_{n+1}\cap A_n)+P(C_{n+1}\cap B_n)+P(C_{n+1}\cap C_n)$
or $B_{n+1}\cap A_n$ et $C_{n+1}\cap A_n$ sont impossibles car les deux personnes ne peuvent être dans la même pièce à l'instant n et dans deux pièces différentes à l'instant $n+1$.
Ainsi, $\begin{cases} b_{n+1}=b_n\times P_{B_n}(B_{n+1})+c_n\times P_{C_n}(B_{n+1}) \\ c_{n+1}=b_n\times P_{B_n}(C_{n+1})+c_n\times P_{C_n}(C_{n+1}) \end{cases}$

Si les deux personnes sont dans des pièces voisines à l'instant n, 4 cas de figures équiprobables sont possibles à l'instant $n+1$:
1) elles échangent leurs places et restent donc voisines
2) elles se déplacent toutes les deux dans le sens trigonométrique et restent donc voisines
3) elles se déplacent toutes les deux dans le sens horaire et restent donc voisines
4) elles s'écartent l'une de l'autre et ne sont plus voisines et pas non plus dans la même pièce
Ainsi $P_{B_n}(B_{n+1})=\frac{3}{4}$ et $P_{B_n}(C_{n+1})=\frac{1}{4}$

Si les deux personnes ne sont ni dans la même pièce ni dans des pièces voisines à l'instant n, 4 cas de figures équiprobables sont possibles à l'instant $n+1$:
1) elles se déplacent toutes les deux vers la pièces qui les sépare
2) elles se déplacent toutes les deux dans le sens trigonométrique et restent donc non voisines
3) elles se déplacent toutes les deux dans le sens horaire et restent donc non voisines
4) elles s'écartent de la pièce qui les séparait mais deviennent voisines (de l'autre côté).
Ainsi $P_{C_n}(A_{n+1})=\frac{1}{4}$; $P_{C_n}(B_{n+1})=\frac{1}{4}$ et $P_{C_n}(C_{n+1})=\frac{1}{2}$

Ainsi $\begin{cases} b_{n+1}=\frac{3}{4}b_n+\frac{1}{4}c_n \\ c_{n+1}=\frac{1}{4}b_n+\frac{1}{2}c_n \end{cases}$

II.E En posant $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ on a $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}=A\,u_n$

II.F.1) $\forall n\in\mathbb{N}$, $b_{n+2}-\frac{5}{4}b_{n+1}=\frac{3}{4}b_{n+1}+\frac{1}{4}c_{n+1}-\frac{5}{4}\left(\frac{3}{4}b_n+\frac{1}{4}c_n\right)$

$b_{n+2}-\frac{5}{4}b_{n+1}=\frac{3}{4}\left(\frac{3}{4}b_n+\frac{1}{4}c_n\right)+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}b_n+\frac{1}{2}c_n\right)-\frac{5}{4}\left(\frac{3}{4}b_n+\frac{1}{4}c_n\right)$

$b_{n+2}-\frac{5}{4}b_{n+1}=\left(\frac{9}{16}+\frac{1}{16}-\frac{15}{16}\right)b_n+\left(\frac{3}{16}+\frac{1}{8}-\frac{5}{16}\right)c_n=-\frac{5}{16}b_n$

Donc $b_{n+2}=\frac{5}{4}b_{n+1}-\frac{5}{16}b_n$

II.F.2) Équation caractéristique $r^2-\frac{5}{4}r+\frac{5}{16}=0$, $\Delta=\frac{25}{16}-\frac{20}{16}=\frac{5}{16}$

Les solutions sont $\frac{5+\sqrt{5}}{8}$ et $\frac{5-\sqrt{5}}{8}$, ainsi il existe $(\alpha;\beta)\in\mathbb{R}^2$ tel que

$\forall n\in\mathbb{N}$, $b_n=\alpha\left(\frac{5+\sqrt{5}}{8}\right)^n+\beta\left(\frac{5-\sqrt{5}}{8}\right)^n$

De plus $b_0=1$ et $b_1=\frac{3}{4}b_0+\frac{1}{4}c_0=\frac{3}{4}$

Ainsi $\begin{cases} \alpha+\beta=1 \\ \alpha\frac{5+\sqrt{5}}{8}+\beta\frac{5-\sqrt{5}}{8}=\frac{3}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha+\beta=1 & L_1 \\ \alpha(5+\sqrt{5})+\beta(5-\sqrt{5})=6 & L_2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha+\beta=1 & L_1 \\ -2\sqrt{5}\beta=1-\sqrt{5} & L_2\leftarrow L_2-(5+\sqrt{5})L_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{10} \\ \beta=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{10} \end{cases}$

Ainsi : $\forall n\in\mathbb{N}$, $b_n=\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{10}\right)\left(\frac{5+\sqrt{5}}{8}\right)^n+\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{10}\right)\left(\frac{5-\sqrt{5}}{8}\right)^n$

Par ailleurs, $\forall n\in\mathbb{N}$, $c_n=4b_{n+1}-3b_n$ (cf II.D)

$c_n=\left(4\times\frac{5+\sqrt{5}}{8}-3\right)\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{10}\right)\left(\frac{5+\sqrt{5}}{8}\right)^n+\left(4\times\frac{5-\sqrt{5}}{8}-3\right)\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{5}}{10}\right)\left(\frac{5-\sqrt{5}}{8}\right)^n$

$c_n=\frac{\sqrt{5}}{5}\left(\frac{5+\sqrt{5}}{8}\right)^n-\frac{\sqrt{5}}{5}\left(\frac{5-\sqrt{5}}{8}\right)^n$

Enfin $\forall n\in\mathbb{N}$, $a_n+b_n+c_n=1$ donc :

$$a_n=1-b_n-c_n=1-\left(\frac{1}{2}+\frac{3\sqrt{5}}{10}\right)\left(\frac{5+\sqrt{5}}{8}\right)^n-\left(\frac{1}{2}-\frac{3\sqrt{5}}{10}\right)\left(\frac{5-\sqrt{5}}{8}\right)^n$$

II.F.3) $4<5<9$ donc par croissance de la fonction racine carrée sur $[0;+\infty[$, $2<\sqrt{5}<3$

ainsi $7<5+\sqrt{5}<8$ donc $\left|\frac{5+\sqrt{5}}{8}\right|<1$ d'où $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{5+\sqrt{5}}{8}\right)^n=0$

$-3<-\sqrt{5}<-2$ donc $2<5-\sqrt{5}<3$ ainsi $\left|\frac{5-\sqrt{5}}{8}\right|<1$ d'où : $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{5-\sqrt{5}}{8}\right)^n=0$

On peut en déduire que $\lim_{n\to+\infty} a_n=1$; $\lim_{n\to+\infty} b_n=0$, $\lim_{n\to+\infty} c_n=0$

Ainsi l'événement « les deux personnes sont dans la même pièce » a une probabilité aussi proche de 1 que voulu à condition de prendre n suffisamment grand.

II.G.1) $a_0=0$; $a_1=a_0+\frac{1}{4}c_0=0$; $a_2=a_1+\frac{1}{4}c_1=0+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}b_0+\frac{1}{2}c_0\right)=\frac{1}{6}$

Ainsi X peut prendre des (toutes ?) valeurs entières supérieures ou égales à 2.

II.G.2) Soit $n\in\mathbb{N}^*$, $(X=n)=A_n\cap\overline{A_{n-1}}$ (dans la même pièce pour la première fois au rang n)

Donc $(X=n)=A_n\cap(B_{n-1}\cup C_{n-1})=(A_n\cap B_{n-1})\cup(A_n\cap C_{n-1})$

Or $A_n\cap B_{n-1}=\emptyset$ donc $(X=n)=A_n\cap C_{n-1}$

II.G.3) Soit un entier $n\geqslant 2$, $P(X=n)=P(A_n\cap C_{n-1})=P(C_{n-1})P_{C_{n-1}}(A_n)$

$P(X=n)=\frac{1}{4}c_{n-1}$ cf II.D.

Remarque : $\begin{cases}n\geqslant 2\\ P(X=n)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}n\geqslant 2\\ \left(\frac{5+\sqrt{5}}{8}\right)^n=\left(\frac{5-\sqrt{5}}{8}\right)^n\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}n\geqslant 2\\ \left(\frac{5+\sqrt{5}}{5-\sqrt{5}}\right)^n=1\end{cases}$ impossible

Donc $X(\Omega)=\mathbb{N}\cap[2;+\infty[$

La série entière $\sum_{n\geqslant 1} n x^n$ a même rayon de convergence que $\sum_{n\geqslant 1} x^n$ qui est une série géométrique dont le rayon de convergence vaut 1 soit $S:\begin{array}{ccc}]-1;1[& \to & \mathbb{R}\\ x & \mapsto & \sum_{n=0}^{+\infty} x^n=\frac{1}{1-x}\end{array}$

$\forall x\in]-1;1[$, $\sum_{n=1}^{+\infty} n x^n=x\sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1}=x S'(x)=x\frac{1}{(1-x)^2}$

$$E(X)=\sum_{n=2}^{+\infty} n P(X=n)=\frac{1}{4}\sum_{n=2}^{+\infty} n c_{n-1}=\frac{1}{4}\sum_{n=2}^{+\infty} n\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\left(\frac{5+\sqrt{5}}{8}\right)^{n-1}-\frac{\sqrt{5}}{5}\left(\frac{5-\sqrt{5}}{8}\right)^{n-1}\right)$$

or $\left|\frac{5+\sqrt{5}}{8}\right|<1$ et $\left|\frac{5-\sqrt{5}}{8}\right|<1$ donc par linéarité de la somme de séries convergentes :

$$E(X)=\frac{\sqrt{5}}{20}\left(\frac{5+\sqrt{5}}{8}\right)^{-1}\sum_{n=2}^{+\infty} n\left(\frac{5+\sqrt{5}}{8}\right)^n-\frac{\sqrt{5}}{20}\left(\frac{5-\sqrt{5}}{8}\right)^{-1}\sum_{n=2}^{+\infty} n\left(\frac{5-\sqrt{5}}{8}\right)^n$$

$$E(X)=\left(\frac{\sqrt{5}-1}{10}\right)\left(\frac{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}{\left(1-\frac{5+\sqrt{5}}{8}\right)^2}-\frac{5+\sqrt{5}}{8}\right)-\left(\frac{\sqrt{5}+1}{10}\right)\left(\frac{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}{\left(1-\frac{5-\sqrt{5}}{8}\right)^2}-\frac{5-\sqrt{5}}{8}\right)$$

$$E(X)=\frac{\sqrt{5}-1}{10}\left(\frac{8(5+\sqrt{5})}{(8-(5+\sqrt{5}))^2}-\frac{5+\sqrt{5}}{8}\right)-\frac{\sqrt{5}+1}{10}\left(\frac{8(5-\sqrt{5})}{(8-(5-\sqrt{5}))^2}-\frac{5-\sqrt{5}}{8}\right)$$

$$E(X)=\frac{\sqrt{5}-1}{10}\left(\frac{8(5+\sqrt{5})}{14-6\sqrt{5}}-\frac{5+\sqrt{5}}{8}\right)-\frac{\sqrt{5}+1}{10}\left(\frac{8(5-\sqrt{5})}{14+6\sqrt{5}}-\frac{5-\sqrt{5}}{8}\right)$$

$E(X)=12$

Sur un grand nombre d'expériences la moyenne empirique des valeurs de X est proche de 12.

BONUS : un code Python simulant l'expérience aléatoire et affichant la moyenne empirique de X sur un million d'expériences :

```
import numpy as np

def X():
   P1=0
   P2=1
   n=0
   while P1!=P2:
      n=n+1
      P1=(P1-1+2*np.random.binomial(1,1/2))%5
      P2=(P2-1+2*np.random.binomial(1,1/2))%5
   return n

L=[X() for k in range(1000000)]
print(sum(L)/len(L))
```

III.A.1) $P^{-1}A^{n+1}P\omega=P^{-1}AP\times P^{-1}A^nP\omega$ or $P^{-1}A^nP\omega\in M_{3,1}(\mathbb{R})$

Ainsi d'après les propriétés de μ , A et P on a : $\|P^{-1}A^{n+1}P\omega\|\leqslant\mu\|P^{-1}A^nP\omega\|$

Soit $HR(n)$: « $\|P^{-1}A^nP\omega\|\leqslant\mu^n\|\omega\|$ »

Initialisation : par hypothèse HR(1) est vraie.

Hérédité : supposons qu'il existe $n\in\mathbb{N}^*$ tel que $HR(n)$ soit vraie.

Alors $\|P^{-1}A^{n+1}P\omega\|\leqslant\mu\|P^{-1}A^nP\omega\|\leqslant\mu\mu^n\|\omega\|=\mu^{n+1}\|\omega\|$ donc $HR(n+1)$ est vraie

Conclusion : $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\|P^{-1}A^nP\omega\|\leqslant\mu^n\|\omega\|$

III.A.2)a) $\mathrm{P}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\mathrm{P}\left(x\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+z\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right)=x\,\mathrm{P}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+y\,\mathrm{P}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+z\,\mathrm{P}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ distributivité

$\left\|\mathrm{P}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\right\|\leqslant\left\|x\,\mathrm{P}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right\|+\left\|y\,\mathrm{P}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right\|+\left\|z\,\mathrm{P}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\|$ inégalité triangulaire

$\left\|\mathrm{P}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\right\|\leqslant|x|\left\|\mathrm{P}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right\|+|y|\left\|\mathrm{P}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right\|+|z|\left\|\mathrm{P}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\|$ la norme est positivement homogène

III.A.2)b) Soient $\mathrm{U}=\begin{pmatrix}|x|\\|y|\\|z|\end{pmatrix}$ et $\mathrm{V}=\begin{pmatrix}\left\|\mathrm{P}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right\|\\\left\|\mathrm{P}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right\|\\\left\|\mathrm{P}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\|\end{pmatrix}$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz assure que : $\mathrm{U}^{\mathrm{T}}\mathrm{V}\leqslant\|\mathrm{U}\|\|\mathrm{V}\|$

or $\|\mathrm{U}\|=\sqrt{|x|^2+|y|^2+|z|^2}=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

et $\|\mathrm{V}\|=\sqrt{\left\|\mathrm{P}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right\|^2+\left\|\mathrm{P}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right\|^2+\left\|\mathrm{P}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\|^2}$

de plus : $\left\|\mathrm{P}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right\|^2=\left(\mathrm{P}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right)^{\mathrm{T}}\left(\mathrm{P}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}p_{1,1}\\p_{2,1}\\p_{3;1}\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix}p_{1,1}\\p_{2,1}\\p_{3;1}\end{pmatrix}=(p_{1,1})^2+(p_{2,1})^2+(p_{3,1})^2$

de même $\left\|\mathrm{P}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right\|^2=(p_{1,2})^2+(p_{2,2})^2+(p_{3,2})^2$

et $\left\|\mathrm{P}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\|^2=(p_{1,3})^2+(p_{2,3})^2+(p_{3,3})^2$

donc $\|\mathrm{V}\|=\mathrm{C}(\mathrm{P})$

en notant $\omega=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ la question III.A.2)a) donne donc :

$\|\mathrm{P}\,\omega\|\leqslant\mathrm{U}^{\mathrm{T}}\mathrm{V}\leqslant\|\mathrm{U}\|\|\mathrm{V}\|=\|\omega\|\,\mathrm{C}(\mathrm{P})$

III.A.3) $\|\mathrm{A}^n\mathrm{P}\,\omega\|=\|\mathrm{P}\,\mathrm{P}^{-1}\mathrm{A}^n\mathrm{P}\,\omega\|\leqslant\mathrm{C}(\mathrm{P})\|\mathrm{P}^{-1}\mathrm{A}^n\mathrm{P}\,\omega\|$ d'après III.A.2)b)

$\leqslant\mathrm{C}(\mathrm{P})\mu^n\|\omega\|$ d'après III.A.1)

III.A.4) $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_n=\mathrm{A}^n u=\mathrm{A}^n\mathrm{P}\,\omega$

Donc $\|u_n\|\leqslant\|\mathrm{A}^n\mathrm{P}\,\omega\|\leqslant\mathrm{C}(\mathrm{P})\mu^n\|\omega\|=\mathrm{C}(\mathrm{P})\mu^n\|\mathrm{P}^{-1}u\|$

or d'après III.A.2)b) en remplaçant P par P^{-1} on a : $\|\mathrm{P}^{-1}u\|\leqslant\mathrm{C}(\mathrm{P}^{-1})\|u\|$

Donc $\|u_n\|\leqslant\mathrm{C}(\mathrm{P})\mu^n\mathrm{C}(\mathrm{P}^{-1})\|u\|=\mathrm{C}(\mathrm{P}^{-1})\mathrm{C}(\mathrm{P})\mu^n\|u\|$

III.A.5)a)

Si $0\leqslant\mu\leqslant1$ alors $\forall n\in\mathbb{N}$, $0^n\leqslant\mu^n\leqslant1^n$ car $x\mapsto x^n$ est croissante sur $[0;+\infty[$

ainsi $0\leqslant\mu^n\leqslant1$ donc $\|u_n\|\leqslant\mathrm{C}(\mathrm{P}^{-1})\mathrm{C}(\mathrm{P})\|u\|$ indépendant de n .

b) Si $0\leqslant\mu<1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty}\mu^n=0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\|u_n\|=0$ ainsi $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$.

III.B.1) $\chi_{\mathrm{A}}(\mathrm{X})=det(\mathrm{X}\,\mathrm{I}_3-\mathrm{A})=det(\mathrm{P}\,\mathrm{P}^{-1}(\mathrm{X}\,\mathrm{I}_3-\mathrm{A}))$

$=det(\mathrm{P}^{-1}(\mathrm{X}\,\mathrm{I}_3-\mathrm{A})\mathrm{P})$ car $det(\mathrm{AB})=det(\mathrm{BA})$

$=det(\mathrm{X}\,\mathrm{I}_3-\mathrm{P}^{-1}\mathrm{A}\,\mathrm{P})=\chi_{\mathrm{P}^{-1}\mathrm{A}\,\mathrm{P}}(\mathrm{X})$

Ainsi les deux polynômes ont les mêmes racines donc $Sp(\mathrm{A})=Sp(\mathrm{P}^{-1}\mathrm{A}\,\mathrm{P})$ et en particulier $\rho(\mathrm{A})=\rho(\mathrm{P}^{-1}\mathrm{A}\,\mathrm{P})$.

III.B.2) $Sp(\mathrm{D})=\{d_1;d_2;d_3\}$ donc $\rho(\mathrm{D})=max(|d_1|;|d_2|;|d_3|)$

III.B.3) Soit $\omega=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$,

$\|\mathrm{D}\,\omega\|^2=(x\,d_1)^2+(y\,d_2)^2+(z\,d_3)^2\leqslant max((d_1)^2;(d_2)^2;(d_3)^2)(x^2+y^2+z^2)$

Or par croissance de la fonction carrée sur $[0;+\infty[$,

$max((d_1)^2;(d_2)^2;(d_3)^2)=(max(|d_1|;|d_2|;|d_3|))^2=(\rho(\mathrm{D}))^2$

Donc, par croissance de la fonction racine carrée sur $[0;+\infty[$, et comme $\rho(\mathrm{D})\geqslant0$

$\|\mathrm{D}\,\omega\|\leqslant\rho(\mathrm{D})\sqrt{x^2+y+z^2}=\rho(\mathrm{D})\|\omega\|$

III.B.4) Puisque D est diagonalisable, il existe $\mathrm{P}\in\mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{P}^{-1}\mathrm{A}\,\mathrm{P}=\mathrm{D}$

Ainsi $\forall\omega\in\mathrm{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ $\|\mathrm{P}^{-1}\mathrm{A}\,\mathrm{P}\,\omega\|=\|\mathrm{D}\,\omega\|\leqslant\rho(\mathrm{D})\|\omega\|$ d'après III.B.3)

or $\rho(\mathrm{D})=\rho(\mathrm{A})$ d'après III.B.1) ainsi, $\|\mathrm{P}^{-1}\mathrm{A}\,\mathrm{P}\,\omega\|=\rho(\mathrm{A})\|\omega\|$

III.B.5) $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}=\mathrm{A}\,u_n\ \Leftrightarrow\ \mathrm{P}^{-1}u_{n+1}=\mathrm{P}^{-1}\mathrm{A}\,\mathrm{P}(\mathrm{P}^{-1}u_n)$

donc $\|\mathrm{P}^{-1}u_{n+1}\|\leqslant\rho(\mathrm{A})\|\mathrm{P}^{-1}u_n\|$ d'après III.B.4)

Ainsi, si $\rho(\mathrm{A})\leqslant1$ alors $\forall n\in\mathbb{N}$, $\|\mathrm{P}^{-1}u_{n+1}\|\leqslant\|\mathrm{P}^{-1}u_n\|$

Donc la suite $(\|\mathrm{P}^{-1}u_n\|)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

De plus la suite $(\|\mathrm{P}^{-1}u_n\|)_{n\in\mathbb{N}}$ est constituée de termes positifs donc la suite $(\|\mathrm{P}^{-1}u_n\|)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée : $\exists\,\mathrm{M}>0$ tel que $\forall n\in\mathbb{N}$, $\|\mathrm{P}^{-1}u_n\|\leqslant\mathrm{M}$

Enfin, d'après le III.A.2) $\forall n\in\mathbb{N}$, $\|u_n\|=\|\mathrm{P}\,\mathrm{P}^{-1}u_n\|\leqslant\mathrm{C}(\mathrm{P})\|\mathrm{P}^{-1}u_n\|\leqslant\mathrm{C}(\mathrm{P})\mathrm{M}$

Donc la suite $(\|u_n\|)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

III.B.6) Dans la question II.F.3, on a : $\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$ avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

$$\chi_A(X) = (X-1)\begin{vmatrix} X-\frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & X-\frac{1}{2} \end{vmatrix} = (X-1)\left(\left(X-\frac{3}{4}\right)\left(X-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{16}\right)$$

$$= (X-1)\left(X^2-\frac{5}{4}X+\frac{5}{16}\right) = (X-1)\left(X-\frac{5+\sqrt{5}}{8}\right)\left(X-\frac{5-\sqrt{5}}{8}\right)$$

donc $Sp(A) = \left\{1 ; \frac{5+\sqrt{5}}{8} ; \frac{5-\sqrt{5}}{8}\right\}$ ainsi, $\rho(A) = 1$.

De plus, $\chi_A(X)$ étant scindé et à racines simples A est diagonalisable dans $M_3(\mathbb{R})$.

D'après le III.B.5, la suite $\left(\left\|\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}\right\|\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc bornée.

La question II.F.3 prouve que $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$ converge vers $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left\|\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}\right\| = 0$.

La suite $\left(\left\|\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}\right\|\right)_{n\in\mathbb{N}}$ étant une suite de réels convergente, elle est bornée, ce qui est donc cohérent avec le III.B.5).

III.B.7) La relation précédente $\|P^{-1}u_{n+1}\| \leqslant \rho(A)\|P^{-1}u_n\|$ permet par récurrence d'assurer que $\forall n\in\mathbb{N}$, $\|P^{-1}u_n\| \leqslant (\rho(A))^n \|P^{-1}u\|$

Si $\rho(A)<1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} (\rho(A))^n = 0$ (car $\rho(A)\geqslant 0$)

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \|P^{-1}u_n\| = 0$

Enfin $\|u_n\| = \|P P^{-1}u_n\| \leqslant C(P)\|P^{-1}u_n\| \underset{n\to 0}{\to} 0$

Donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

III.C.1) A est triangulaire, ses valeurs propres sont donc les termes de sa diagonale, ainsi $Sp(A) = \{1\}$ et $\rho(A) = 1$.

Supposons par l'absurde que A est diagonalisable dans $M_3(\mathbb{C})$, alors elle est semblable à I_3. Soit $P\in GL_3(\mathbb{C})$, telle que $A = P I_3 P^{-1}$ alors $A = I_3$ ce qui est faux.

Donc A n'est pas diagonalisable dans $M_3(\mathbb{C})$.

III.C.2 Soit $HR(l)$: « $A^l = \begin{pmatrix} 1 & 0 & l \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ »

Initialisation : $A^1 = A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ donc HR(1) est vraie.

Hérédité : supposons qu'il existe $l\in\mathbb{N}^*$ tel que $HR(l)$ soit vraie alors

$A^{l+1} = A A^l = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & l \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & l+1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ donc $HR(l+1)$ est vraie.

Conclusion : $\forall l\in\mathbb{N}^*$, $A^l = \begin{pmatrix} 1 & 0 & l \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

III.C.3) Soit $u = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ alors $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_n = A^n \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Ainsi $\|u_n\| = \sqrt{n^2+1} \underset{n\to+\infty}{\to} +\infty$ donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas bornée.

III.D.1)a) Si $A\in T_3(\mathbb{R})$ alors $\chi_A(X)$ n'admet pas de racines complexes donc $\chi_A(X)$ est scindé dans $\mathbb{R}[X]$ ce qui assure que A est trigonalisable : $\exists T\in M_3(\mathbb{R})$ triangulaire et $\exists Q\in GL_3(\mathbb{R})$ telle que $T = Q^{-1}AQ$.

b) $Sp(A) = \{t_{1,1} ; t_{2,2} ; t_{3,3}\}$ donc $\rho(A) = max(|t_{1,1}| ; |t_{2,2}| ; |t_{3,3}|)$

III.D.2)a) Soient $U = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in M_{2,1}(\mathbb{R})$ et $V = \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} \in M_{2,1}(\mathbb{R})$.

L'inégalité de Cauchy-Schwarz assure que : $|U^T V| \leqslant \|U\| \times \|V\|$

Par croissance de la fonction carrée sur $[0;+\infty[$, on a : $(U^T V)^2 \leqslant \|U\|^2 \times \|V\|^2$

Ainsi $(ay+bz)^2 \leqslant (a^2+b^2)(y^2+z^2)$

b)

$(a^2+b^2+c^2)(y^2+z^2) = (a^2+b^2)(y^2+z^2)+c^2y^2+c^2z^2 \geqslant (a^2+b^2)(y^2+z^2)+c^2z^2$ car $c^2y^2\geqslant 0$

$\geqslant (ay+bz)^2+c^2z^2$ d'après III.D.2)a)

III.D.3)a) Soit $\omega\in M_{3,1}(\mathbb{R})$, $\|T\omega\| = \|(D+T-D)\omega\| = \|D\omega+(T-D)\omega\|$

$\leqslant \|D\omega\| + \|(T-D)\omega\|$ d'après l'inégalité triangulaire

b) D'après III.B.3) $\|D\omega\| \leqslant \rho(D)\|\omega\|$

Or $\rho(D) = max(|t_{1,1}| ; |t_{2,2}| ; |t_{3,3}|) = \rho(A)$ donc $\|D\omega\| \leqslant \rho(A)\|\omega\|$

Par ailleurs $T-D = \begin{pmatrix} 0 & t_{1,2} & t_{1,3} \\ 0 & 0 & t_{2,3} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Ainsi, en notant $\omega=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ on a : $(\mathrm{T}-\mathrm{D})\omega=\begin{pmatrix}t_{1,2}y+t_{1,3}z\\t_{2,3}z\\0\end{pmatrix}$

D'où $\|(\mathrm{T}-\mathrm{D})\omega\|^2=(t_{1,2}y+t_{1,3}z)^2+(t_{2,3}z)^2\leqslant\left((t_{1,2})^2+(t_{1,3})^2+(t_{2,3})^2\right)(y^2+z^2)$ cf III.D.2)b)

Or $y^2+z^2\leqslant x^2+y^2+z^2=\|\omega\|^2$ car $x^2\geqslant 0$

$\left((t_{1,2})^2+(t_{1,3})^2+(t_{2,3})^2\right)(y^2+z^2)\leqslant\left((t_{1,2})^2+(t_{1,3})^2+(t_{2,3})^2\right)\|\omega\|^2$ car $\left((t_{1,2})^2+(t_{1,3})^2+(t_{2,3})^2\right)\geqslant 0$

Ainsi $\|(\mathrm{T}-\mathrm{D})\omega\|^2=\left((t_{1,2})^2+(t_{1,3})^2+(t_{2,3})^2\right)\|\omega\|^2$

Puis par croissance de la fonction racine carrée sur $[0;+\infty[$:

$\|(\mathrm{T}-\mathrm{D})\omega\|=\sqrt{(t_{1,2})^2+(t_{1,3})^2+(t_{2,3})^2}\|\omega\|$

Enfin d'après III.D.3)a) : $\|\mathrm{T}\omega\|\leqslant\rho(\mathrm{A})\|\omega\|+\sqrt{(t_{1,2})^2+(t_{1,3})^2+(t_{2,3})^2}\|\omega\|$

Donc $\|\mathrm{T}\omega\|\leqslant\left(\rho(\mathrm{A})+\sqrt{(t_{1,2})^2+(t_{1,3})^2+(t_{2,3})^2}\right)\|\omega\|$

III.D.4)a) $det(\Delta_\delta)=\delta^3\neq 0$ donc Δ_δ est inversible et $(\Delta_\delta)^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\frac{1}{\delta}&0\\0&0&\frac{1}{\delta^2}\end{pmatrix}$

Par multiplication matricielle on montre que $(\Delta_\delta)^{-1}\mathrm{T}\Delta_\delta=\begin{pmatrix}t_{1,1}&\delta t_{1,2}&\delta^2 t_{1,3}\\0&t_{2,2}&\delta t_{2,3}\\0&0&t_{3,3}\end{pmatrix}$

b) $(\Delta_\delta)^{-1}\mathrm{T}\Delta_\delta$ est une matrice triangulaire et $(\Delta_\delta)^{-1}\mathrm{Q}^{-1}\mathrm{A}\,\mathrm{Q}\Delta_\delta=(\mathrm{Q}\Delta_\delta)^{-1}\mathrm{A}(\mathrm{Q}\Delta_\delta)$ donc les raisonnements précédents effectués pour T sont aussi valides pour $(\Delta_\delta)^{-1}\mathrm{T}\Delta_\delta$.

Ainsi le III.D.3)b) donne : $\|(\Delta_\delta)^{-1}\mathrm{T}\Delta_\delta\|\leqslant\left(\rho(\mathrm{A})+\sqrt{(\delta t_{1,2})^2+(\delta^2 t_{1,3})^2+(\delta t_{2,3})^2}\right)\|\omega\|$

Donc $\|(\Delta_\delta)^{-1}\mathrm{T}\Delta_\delta\|\leqslant\left(\rho(\mathrm{A})+\sqrt{\delta^2(t_{1,2})^2+\delta^4(t_{1,3})^2+\delta^2(t_{2,3})^2}\right)\|\omega\|$

III.5.D) En posant $\mathrm{P}=\mathrm{Q}\Delta_\delta$, et $\mu=\left(\rho(\mathrm{A})+\sqrt{\delta^2(t_{1,2})^2+\delta^4(t_{1,3})^2+\delta^2(t_{2,3})^2}\right)$ l'inégalité précédente s'écrit : $\|\mathrm{P}^{-1}\mathrm{A}\,\mathrm{P}\|\leqslant\mu\|\omega\|$ hypothèse requise au III.A.

Il suffit donc de choisir δ tel que $\mu<1$ pour assurer, conformément au III.A.5)b), que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$.

Si $\rho(\mathrm{A})<1$ alors $0<1-\rho(\mathrm{A})$

Il suffit de choisir $\delta>0$ tel que $\sqrt{\delta^2(t_{1,2})^2+\delta^4(t_{1,3})^2+\delta^2(t_{2,3})^2}<1-\rho(\mathrm{A})$

Si $\sqrt{(t_{1,2})^2+(t_{1,3})^2+(t_{2,3})^2}<1-\rho(\mathrm{A})$ alors $\delta=1$ convient pour avoir $\mu<1$

Sinon, en posant $\delta<1$ on a $\delta^4<\delta^2$ donc :

$\sqrt{\delta^2(t_{1,2})^2+\delta^4(t_{1,3})^2+\delta^2(t_{2,3})^2}<\sqrt{\delta^2(t_{1,2})^2+\delta^2(t_{1,3})^2+\delta^2(t_{2,3})^2}=\delta\sqrt{(t_{1,2})^2+(t_{1,3})^2+(t_{2,3})^2}$

Ainsi en posant par exemple $\delta=\dfrac{1-\rho(\mathrm{A})}{\sqrt{(t_{1,2})^2+(t_{1,3})^2+(t_{2,3})^2}}$

on a : $\sqrt{\delta^2(t_{1,2})^2+\delta^4(t_{1,3})^2+\delta^2(t_{2,3})^2}<1-\rho(\mathrm{A})$ donc $\mu<1$.

IV.A. Soit $\mathrm{D}=\begin{pmatrix}m_{1,1}&0&0\\0&m_{2,2}&0\\0&0&m_{3,3}\end{pmatrix}$ alors $det(\mathrm{D})=m_{1,1}m_{2,2}m_{3,3}\neq 0$ car aucun terme de la diagonale de M n'est nul et $\mathrm{D}^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{m_{1,1}}&0&0\\0&\frac{1}{m_{2,2}}&0\\0&0&\frac{1}{m_{3,3}}\end{pmatrix}$ et

$\mathrm{D}^{-1}\mathrm{M}=\begin{pmatrix}1&\frac{m_{1,2}}{m_{1,1}}&\frac{m_{1,3}}{m_{1,1}}\\\frac{m_{2,1}}{m_{2,2}}&1&\frac{m_{2,3}}{m_{2,2}}\\\frac{m_{3,1}}{m_{3,3}}&\frac{m_{3,2}}{m_{3,3}}&1\end{pmatrix}$ donc $\mathrm{I}-\mathrm{D}^{-1}\mathrm{M}=\begin{pmatrix}0&-\frac{m_{1,2}}{m_{1,1}}&-\frac{m_{1,3}}{m_{1,1}}\\-\frac{m_{2,1}}{m_{2,2}}&0&-\frac{m_{2,3}}{m_{2,2}}\\-\frac{m_{3,1}}{m_{3,3}}&-\frac{m_{3,2}}{m_{3,3}}&0\end{pmatrix}$

On a donc $\mathrm{X}_{n+1}=(\mathrm{I}-\mathrm{D}^{-1}\mathrm{M})\mathrm{X}_n+\mathrm{D}^{-1}\mathrm{B}$

IV.B. $\mathrm{M}\in\mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ donc l'unique solution de $\mathrm{MX}=\mathrm{B}$ est $\tilde{\mathrm{X}}=\mathrm{M}^{-1}\mathrm{B}$

IV.C. $(\mathrm{I}-\mathrm{D}^{-1}\mathrm{M})\tilde{\mathrm{X}}=\tilde{\mathrm{X}}-\mathrm{D}^{-1}\mathrm{M}\tilde{\mathrm{X}}=\tilde{\mathrm{X}}-\mathrm{D}^{-1}\mathrm{B}$

Ainsi $\tilde{\mathrm{X}}=(\mathrm{I}-\mathrm{D}^{-1}\mathrm{M})\tilde{\mathrm{X}}+\mathrm{D}^{-1}\mathrm{B}$

D'où : $\mathrm{X}_{n+1}-\tilde{\mathrm{X}}=(\mathrm{I}-\mathrm{D}^{-1}\mathrm{M})(\mathrm{X}_n-\tilde{\mathrm{X}})+\mathrm{D}^{-1}\mathrm{B}-\mathrm{D}^{-1}\mathrm{B}=(\mathrm{I}-\mathrm{D}^{-1}\mathrm{M})(\mathrm{X}_n-\tilde{\mathrm{X}})$

IV.C En posant $u_n=\mathrm{X}_n-\mathrm{X}$ et $\mathrm{A}=\mathrm{I}-\mathrm{D}^{-1}\mathrm{M}$ on retrouve la relation $u_{n+1}=\mathrm{A}u_n$

Ainsi d'après le III.D.5), si $\rho(\mathrm{I}-\mathrm{D}^{-1}\mathrm{M})<1$ alors la suite $(\mathrm{X}_n-\tilde{\mathrm{X}})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\|\mathrm{X}_n-\tilde{\mathrm{X}}\|=0$ ce qui signifie que la suite $(\mathrm{X}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\tilde{\mathrm{X}}$.

IV.E. En utilisant l'échelonnement-réduction des matrices augmentées :

$$\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&10&1&11\\0&2&10&12\end{pmatrix}\underset{L}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&10&1&11\\0&0&49&49\end{pmatrix}\quad \mathrm{L}_3\leftarrow 5\mathrm{L}_3-\mathrm{L}_2$$

$$\underset{L}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&10&1&11\\0&0&1&1\end{pmatrix}\quad \mathrm{L}_3\leftarrow\frac{1}{49}\mathrm{L}_3$$

$$\underset{L}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&10&0&10\\0&0&1&1\end{pmatrix}\quad L_2\leftarrow L_2-L_3$$

$$\underset{L}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&1\\0&0&1&1\end{pmatrix}\quad L_2\leftarrow\frac{1}{10}L_2\quad \text{Ainsi }\tilde{X}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$I_3-D^{-1}M=I_3-\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\frac{1}{10}&0\\0&0&\frac{1}{10}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&10&1\\0&2&10\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&-\frac{1}{10}\\0&-\frac{1}{5}&0\end{pmatrix}$$

Ainsi $\chi_{(I_3-D^{-1}M)(X)}=X\left(X^2-\frac{1}{50}\right)$ d'où $Sp\left(I_3-D^{-1}M\right)=\left\{-\frac{1}{\sqrt{50}};0;\frac{1}{\sqrt{50}}\right\}$ et $\rho\left(I_3-D^{-1}M\right)=\frac{1}{\sqrt{50}}<1$

Pour le deuxième exemple :

$$\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&10&11\\0&10&2&12\end{pmatrix}\underset{L}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&10&11\\0&0&-98&-98\end{pmatrix}\quad L_3\leftarrow L_3-10L_2$$

$$\underset{L}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&10&11\\0&0&1&1\end{pmatrix}\quad L_3\leftarrow\frac{1}{-98}L_3$$

$$\underset{L}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&1\\0&0&1&1\end{pmatrix}\quad L_2\leftarrow L_2-10L_3\quad \text{Ainsi }\tilde{X}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$I_3-D^{-1}M=I_3-\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&\frac{1}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&10\\0&10&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&-1\\0&-5&0\end{pmatrix}$$

Ainsi $\chi_{(I_3-D^{-1}M)(X)}=X\left(X^2-5\right)$ d'où $Sp\left(I_3-D^{-1}M\right)=\left\{-\sqrt{5};0;\sqrt{5}\right\}$ et $\rho\left(I_3-D^{-1}M\right)=\sqrt{5}>1$

IV.F. Pour le premier exemple :

$$X_1=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&-\frac{1}{10}\\0&-\frac{1}{5}&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\\frac{11}{10}\\\frac{12}{10}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1,1\\1,2\end{pmatrix}$$

$$X_2=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&-\frac{1}{10}\\0&-\frac{1}{5}&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1,1\\1,2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\\frac{11}{10}\\\frac{12}{10}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0,98\\0,98\end{pmatrix}$$

$$X_3=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&-\frac{1}{10}\\0&-\frac{1}{5}&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0,98\\0,98\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\\frac{11}{10}\\\frac{12}{10}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1,002\\1,004\end{pmatrix}$$

De même $X_4=\begin{pmatrix}1\\0,9996\\0,9996\end{pmatrix}$ la suite semble effectivement converger vers $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$. Puisque $\frac{1}{\sqrt{5}}<1$, la question IV.D nous assure cette convergence.

Pour le deuxième exemple on trouve $X_1=\begin{pmatrix}1\\11\\6\end{pmatrix}$, $X_2=\begin{pmatrix}1\\-49\\-49\end{pmatrix}$, $X_3=\begin{pmatrix}1\\501\\251\end{pmatrix}$ et $X_4=\begin{pmatrix}1\\-2499\\-2499\end{pmatrix}$ la suite ne semble pas converger vers $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$. Cette fois, puisque $\sqrt{5}>1$, le résultat du IV.D ne peut s'appliquer.

BONUS : Un code Python implémentant la méthode de Jacobi :

```
def Jacobi(M,B,X0,n):
   X=X0
   for k in range(n):
      X=[1/M[0][0]*(-M[0][1]*X[1]-M[0][2]*X[2]+B[0]),1/M[1][1]*(-M[1][0]*X[0]-M[1][2]*X[2]+B[1]),1/M[2][2]*(-M[2][0]*X[0]-M[2][1]*X[1]+B[2])]
   return X

print(Jacobi([[1,0,0],[0,1,10],[0,10,2]],[1,11,12],[1,0,0],4))
```