Remarque 1 *Ce sujet propose une partie de programmation, en principe sous Maple ou Mathematica.*
Afin de coller au changement de programme, on utilisera le langage Python.
On sera bien sûr en calcul approché, l'énonce ne précise d'ailleurs pas si on veut du calcul exact ou du calcul approché !
Ceci donnera d'ailleurs paradoxalement une petite idée de comment on peut traiter formellement de polynômes...

Remarque 2 *Ce sujet propose des questions qu'on ne pourra plus traiter avec le nouveau programme, qu'il faudra admettre.*
Afin de coller au changement de programme, on les corrigera très succinctement.

I Polynômes et nombres de Bernoulli

I.A -

I.A.1) Si on a $P = Q + \lambda$ avec $Q \in H$, alors, $\displaystyle\int_0^1 P(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 Q(x)\,\mathrm{d}x + \lambda = \lambda$,

ce qui nous donne la valeur de λ et celle de $Q = P - \displaystyle\int_0^1 P(x)\,\mathrm{d}x$.

Réciproquement, si on pose $Q = P - \displaystyle\int_0^1 P(x)\,\mathrm{d}x$,

alors $P = Q + \int_0^1 P(x)\,\mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_0^1 Q(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 P(x)\,\mathrm{d}x - \int_0^1 P(x)\,\mathrm{d}x = 0$, donc $Q \in H$.

On a bien un seul couple $(Q, \lambda) \in H \times \mathbb{R}$ qui répond à la question.

De plus, $Q = P - \displaystyle\int_0^1 P(x)\,\mathrm{d}x$ et $\lambda = \displaystyle\int_0^1 P(x)\,\mathrm{d}x$.

I.A.2) On prend un polynôme quelconque R, P une primitive quelconque, qui est aussi un polynôme, puis Q le polynôme associé à P comme dans la question précédente.

On a $Q \in H$ et $Q' = P' = R$, on a bien Q un polynôme de H primitive du polynôme R.

D est bien surjectif.

I.A.3) D est bien injectif puisque $P' = Q'$ entraîne $P = Q + k$,

mais comme $\displaystyle\int_0^1 P(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 Q(x)\,\mathrm{d}x + k$ ou encore $0 = 0 + k$, c'est à dire $k = 0$ et $P = Q$.

D est bien un isomorphisme.

I.A.4) *a)* Q est bien un polynôme !

Considérons R la primitive de P qui s'annule en 0.

Alors $Q(x) = R(x) + \displaystyle\int_0^1 (t-1)P(t)\,\mathrm{d}t$.

On fait une intégration par parties dans cette dernière intégrale,

$$Q(x) = R(x) + [(t-1)R(t)]_0^1 - \int_0^1 R(t)\,\mathrm{d}t = R(x) - \int_0^1 R(t)\,\mathrm{d}t$$

On vérifie alors facilement $\displaystyle\int_0^1 Q(x)\,\mathrm{d}x = 0$, comme dans la toute première question.

On a bien $Q \in H$.

b) D'une façon beaucoup plus élémentaire, $Q'(x) = P(x)$, donc $Q = \varphi(P)$.

I.B -

I.B.1) On a $B_1 = \varphi(B_0)$, une primitive de B_0 est X, donc $B_1(x) = x - \displaystyle\int_0^1 x\,\mathrm{d}x = x - \frac{1}{2}$.

$B_1 = X - \dfrac{1}{2}$.

On a $B_2 = \varphi(B_1)$, une primitive de B_1 est $\dfrac{X^2 - X}{2}$,

donc $B_1(x) = \dfrac{x^2 - x}{2} - \displaystyle\int_0^1 \dfrac{x^2 - x}{2}\,\mathrm{d}x = \dfrac{x^2 - x}{2} + \dfrac{1}{12}$.

$B_2 = \dfrac{1}{2}X^2 - \dfrac{1}{2}X + \dfrac{1}{12}$.

I.B.2)

I.C -

I.C.1) $C'_{n+1}(x) = (-1)^{n+1}(-1)B'_{n+1}(1-x) = (-1)^n B_n(1-x) = C_n(x)$,

I.C.2) C_n est clairement un polynôme.

Pour montrer que $C_{n+1} = \varphi(C_n)$, il suffit de montrer que $C_(n+1)$ est d'intégrale bulle entre 0 et 1.

$\displaystyle\int_0^1 C_{n+1}(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 (-1)^{n+1} B_{n+1}(1-x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 (-1)^{n+1} B_{n+1}(u)\,\mathrm{d}u = 0$, en posant : $u = 1 - x$.

I.C.3) Remarquons que $C_0 = B_0 = 1$, donc, par récurrence très facile, $C_n = B_n$ à tous les rangs.

Donc : $C_n(x) = B_n(1-x) = (-1)^n B_n(x)$, ce qui est le résultat demandé.

I.C.4) On applique la relation précédente avec $2n+1$ à la place de n, et, $x = 0$.

On a : $B_{2n+1}(1) = (-1)^{2n+1} B_{2n+1}(0) = -B_{2n+1}(0)$, mais, $B_{2n+1}(0) = B_{2n+1}(1)$ pour $n \geqslant 1$.

On en déduit dans ce cas là : $B_{2n+1}(0) = B_{2n+1}(1) = 0$.

I.D - On représente un polynôme par la liste de ses coefficients suivants les puissance croissantes.

La première procédure calcule le suivant dans la suite des polynômes de Bernoulli.

On démarre avec une constante nulle, et, à chaque fois qu'on ajoute un monôme, on enlève à la constante son intégrale entre 0 et 1.

Calcul du suivant

```
def Suivant(P):
    Q=[0]
    for i in range(len(P)):
        Q.append(P[i]/(i+1))
        Q[0]=Q[0]-Q[-1]/(i+2)
    return Q
```

La seconde procédure calcule le n-ème polynôme de Bernoulli

Calcul des polynômes de Bernoulli

```
def B(n):       # ne convient pas pour n=0
    P=[1]
    for i in range(n):
        P=Suivant(P)
    return P
```

La dernière procédure calcule sa valeur pour une valeur de x.

Calcul de $B_n(x)$

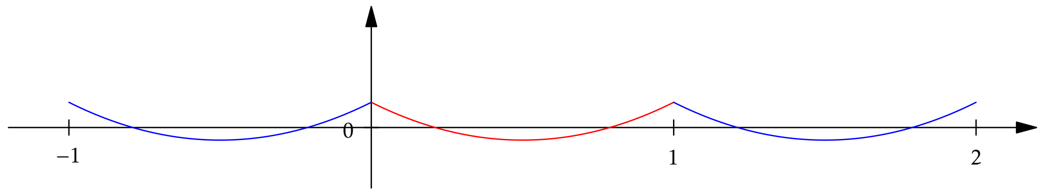
```
def bern(n,x):
    if n==0:
        return 1
    P=B(n)
    Result=0
    for i in range(len(P)):
        Result=Result+P[i]*x**i
    return Result
```

II Développement de Fourier

II.A -

II.A.1) B_2 a un minimum en $x = \dfrac{1}{2}$.

Le graphe demandé :



II.A.2) On a $B_2(x) = \dfrac{1}{2}x^2 - \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{12}$.

Pour $\overline{B_2}$, la continuité est assurée par le fait que $B_2(0) = B_2(1) = \dfrac{1}{12}$.

La dérivée à gauche en 1 n'est pas la dérivée à droite en 0, on n'a donc pas la classe $\mathscr{C}^1$.

Mais ces dérivées existent et sur $[0, 1]$, B_2 est de classe $\mathscr{C}^1$.

On a donc $\overline{B_2}$ de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux.

II.A.3) Par contre, $\overline{B_1}$ n'est pas continue car $B_1(0) \neq B_1(1)$.

II.B -

II.B.1) P est de classe $\mathscr{C}^1$, puisque c'est un polynôme !

Par construction, $\overline{P}$ est donc de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux !

Le problème de la continuité de $\overline{P}$ provient de la continuité en 0, ou en 1 exclusivement. On aura cette continuité si et seulement si $P(0) = P(1)$.

II.B.2) $\overline{P}$ est donc de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux, périodique de période 1, donc sa série de Fourier converge en tout point.

En un point où $\overline{P}$ est continue, elle converge vers la valeur au point.

En un point où $\overline{P}$ est discontinue, elle converge vers la demi somme des limites à droite et à gauche au point. Compte tenu de la définition de $\overline{P}$, celle ci vaut partout la demi somme de ses limites à droite et à gauche.

Finalement, la série de Fourier de $\overline{P}$ converge en tout point vers la valeur de $\overline{P}$ en ce point.

Les coefficients de Fourier sont : $\alpha_0 = \displaystyle\int_0^1 \overline{P}(x)\,\mathrm{d}x$.

Pour $k \geqslant 1$, $\alpha_k = 2\displaystyle\int_0^1 \overline{P}(x)\cos(2k\pi x)\,\mathrm{d}x$, et, $\beta_k = 2\displaystyle\int_0^1 \overline{P}(x)\sin(2k\pi x)\,\mathrm{d}x$

II.C - Rappelons d'abord que pour tous les entiers $\overline{P}$ a la même valeur, à fortiori ici aussi.

Si x n'est pas un entier, $\overline{B_{2n}}(-x) = \overline{B_{2n}}(k+1-x)$ avec $k \in \mathbb{Z}$ tel que $k+1-x \in]0, 1[$.

Mais $\overline{B_{2n}}(k+1-x) = B_{2n}(k+1-x) = (-1)^{2n}B_{2n}(x-k) = \overline{B_{2n}}(x-k) = \overline{B_{2n}}(x)$.

Finalement, $\overline{B_{2n}}$ est bien paire.

De plus, comme $B_{2n}(0) = B_{2n}(1)$, $\overline{B_{2n}}$ est aussi continue sur $\mathbb{R}$.

II.D -

II.D.1) $I_0(n) = \displaystyle\int_0^1 B_{2n}(x)\,\mathrm{d}x = 0$, puisque c'est un polynôme de Bernoulli pour un indice non nul.

II.D.2) On va partir de $I_k(n+1)$ et faire deux intégrations par parties successives en dérivant les polynômes de Bernoulli.

$$I_k(n+1) = \int_0^1 B_{2n+2}(x)\cos(2k\pi x)\,\mathrm{d}x = \left[B_{2n+2}(x)\frac{\sin(2k\pi x)}{2k\pi}\right]_0^1 - \int_0^1 B_{2n+1}(x)\frac{\sin(2k\pi x)}{2k\pi}\,\mathrm{d}x$$

$$= -\int_0^1 B_{2n+1}(x)\frac{\sin(2k\pi x)}{2k\pi}\,\mathrm{d}x = \left[B_{2n+1}(x)\frac{\cos(2k\pi x)}{(2k\pi)^2}\right]_0^1 - \int_0^1 B_{2n}(x)\frac{\cos(2k\pi x)}{(2k\pi)^2}\,\mathrm{d}x$$

$$= -\int_0^1 B_{2n}(x)\frac{\cos(2k\pi x)}{(2k\pi)^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{I_k(n)}{(2k\pi)^2}$$

II.D.3) $I_k(1) = \displaystyle\int_0^1 B_2(x)\cos(2k\pi x)\,\mathrm{d}x = -\int_0^1 B_1(x)\frac{\sin(2k\pi x)}{2k\pi}\,\mathrm{d}x$

$$= \left[B_1(x)\frac{\cos(2k\pi x)}{(2k\pi)^2}\right]_0^1 - \int_0^1 B_0(x)\frac{\cos(2k\pi x)}{(2k\pi)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{(2k\pi)^2} - \int_0^1 \frac{\cos(2k\pi x)}{(2k\pi)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{(2k\pi)^2}$$

II.D.4) Compte tenu de la relation de récurrence et de la condition initiale qu'on vient d'établir, on montre facilement que : $I_k(n) = (-1)^{n-1}\dfrac{1}{(2k\pi)^{2n}}$, pour k et n dans $\mathbb{N}^*$.

Compte tenu de la continuité, sur $[0,1]$, $\overline{B_{2n}} = B_{2n}$.
Compte tenu de la parité, $\beta_k = 0$. De plus, $\alpha_0 = 0$.
Enfin, pour $k \neq 0$, $\alpha_k = 2I_k(n)$.

Ce qui donne finalement pour $x \in [0,1]$: $B_{2n}(x) = 2(-1)^{n-1}\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{(2k\pi)^{2n}}\cos(2k\pi x)$.

II.D.5) On réécrit : $B_{2n}(x) = 2(-1)^{n-1}\dfrac{1}{(2\pi)^{2n}}\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^{2n}}\cos(2k\pi x)$.

Ce qui donne pour $x = 0$: $B_{2n}(0) = b_{2n} = 2(-1)^{n-1}\dfrac{1}{(2\pi)^{2n}}\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^{2n}}$.

Ce qui prouve d'ailleurs que cette série converge, mais plus simplement, c'est une série de Riemann avec un exposant $2n > 1$.

Reprenons : $b_{2n} = 2(-1)^{n-1}\dfrac{1}{(2\pi)^{2n}}S_{2n}$, ce qui donne bien : $S_{2n} = \dfrac{(-1)^{n-1}}{2}(2\pi)^{2n}b_{2n}$.

II.D.6) $S_2 = \dfrac{1}{2}(2\pi)^2 b_2 = 2\pi^2\dfrac{1}{12} = \dfrac{\pi^2}{6}$.

III La formule d'Euler - Mac Laurin

III.A - Comme dans la partie précédente, on va procéder à une double intégration par parties en dérivant le polynôme de Bernoulli.

On utilisera : $B_{2n}(0) = B_{2n}(1) = b_{2n}$, et aussi : $B_{2n-1}(0) = B_{2n-1}(1) = 0$.

$$J_n = \int_0^1 B_{2n}(x)f^{(2n)}(x)\,\mathrm{d}x = \left[B_{2n}(x)f^{(2n-1)}(x)\right]_0^1 - \int_0^1 B_{2n-1}(x)f^{(2n-1)}(x)\,\mathrm{d}x$$

$$= b_{2n}\left(f^{(2n-1)}(1) - f^{(2n-1)}(0)\right) - \left[B_{2n-1}(x)f^{(2n-2)}(x)\right]_0^1 + \int_0^1 B_{2n-2}(x)f^{(2n-2)}(x)\,\mathrm{d}x$$

$$= b_{2n}\left(f^{(2n-1)}(1) - f^{(2n-1)}(0)\right) + J_{n-1}.$$

III.B - On va écrire : $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 B_0(x)f(x)\,\mathrm{d}x$, puis intégrer par parties en primitivant cette fois ci le polynôme de Bernoulli.

On utilisera : $B_1(1) = \dfrac{1}{2}$, $B_1(0) = -\dfrac{1}{2}$, et aussi : $B_2(0) = B_2(1) = b_2$.

$$\int_0^1 B_0(x)f(x)\,\mathrm{d}x = [B_1(x)f(x)]_0^1 - \int_0^1 B_1(x)f'(x)\,\mathrm{d}x = \frac{f(0)+f(1)}{2} - [B_2(x)f'(x)]_0^1 - \int_0^1 B_2(x)f''(x)\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{f(0)+f(1)}{2} - b_2\left(f'(1) - f'(0)\right) + J_1.$$

III.C - Il suffit de montrer cette formule par récurrence.

Vérification initiale

Au rang $n = 1$, il s'agit simplement de la formule montrée ci-dessus.

Hérédité

On l'admet au rang n et on la montre au rang $n+1$.

On écrira la formule de la première question sous la forme :
$J_n = -b_{2n+2}\left(f^{(2n+1)}(1) - f^{(2n+1)}(0)\right) + J_{n+1}$.
On a donc : $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{f(0)+f(1)}{2} - \sum_{k=1}^{n} b_{2k}\left(f^{(2k-1)}(1) - f^{(2k-1)}(0)\right) + J_n$
$= \dfrac{f(0)+f(1)}{2} - \sum\limits_{k=1}^{n} b_{2k}\left(f^{(2k-1)}(1) - f^{(2k-1)}(0)\right) - b_{2n+2}\left(f^{(2n+1)}(1) - f^{(2n+1)}(0)\right) + J_{n+1}$
$= \dfrac{f(0)+f(1)}{2} - \sum\limits_{k=1}^{n+1} b_{2k}\left(f^{(2k-1)}(1) - f^{(2k-1)}(0)\right) + J_{n+1}$.
Ce qui est la formule demandée.
Conclusion
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{f(0)+f(1)}{2} - \sum_{k=1}^{n} b_{2k}\left(f^{(2k-1)}(1) - f^{(2k-1)}(0)\right) + J_n$.

III.D - On va écrire $f(x) = g((1-x)a+bx)$ et faire le changement de variable : $u = (1-x)a + bx$.
$\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 g((1-x)a+bx)\,\mathrm{d}x = \int_a^b g(u)\frac{\mathrm{d}u}{b-a}$
Donc : $\displaystyle\int_a^b g(u)\,\mathrm{d}u = (b-a)\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$, mais aussi : $\displaystyle\int_a^b g(u)\,\mathrm{d}u = \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.
On utilisera : $f(0) = g(a)$, $f(1) = g(b)$, et aussi : $f^{(k)}(x) = (b-a)^k g^{(k)}((1-x)a+bx)$.
On utilisera aussi : $J_n = \displaystyle\int_0^1 B_{2n}(x)(b-a)^{2n} g^{(2n)}((1-x)a+bx)\,\mathrm{d}x$.
On remplace maintenant $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ par sa valeur :
$\displaystyle\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x = \frac{b-a}{2}(g(b)-g(a)) - (b-a)\sum_{k=1}^{n} b_{2k}(b-a)^{2k-1}\left(g^{(2k-1)}(b) - g^{(2k-1)}(a)\right) + (b-a)J_n$
$= \dfrac{b-a}{2}(g(b)-g(a)) - \sum\limits_{k=1}^{n} b_{2k}(b-a)^{2k}\left(g^{(2k-1)}(b) - g^{(2k-1)}(a)\right) + (b-a)J_n$
$= \dfrac{b-a}{2}(g(b)-g(a)) - \sum\limits_{k=1}^{n} b_{2k}(b-a)^{2k}\left(g^{(2k-1)}(b) - g^{(2k-1)}(a)\right)$
$\quad + \displaystyle\int_0^1 (b-a)^{2n+1} B_{2n}(x) g^{(2n)}((1-x)a+bx)\,\mathrm{d}x$.
Ce qui est exactement la formule demandée.

IV La formule de Stirling pour la fonction Γ

IV.A - Remarquons d'abord que la fonction qu'on intègre est toujours positive. On ne le rappellera pas quand on utilisera les critères de comparaison ou d'équivalence.
On a : $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$
On a un double problème de convergence de cette intégrale en 0 et en $+\infty$.
Étude en 0
La fonction est ici équivalente à $t^{x-1} = \dfrac{1}{t^{1-x}}$ dont l'intégrale converge en 0 si et seulement si $1 - x < 1$ ou encore $x > 0$.
Étude en $+\infty$
$t^{x-1}\,\mathrm{e}^{-t} = \left(t^{x-1}\,\mathrm{e}^{-t/2}\right)\mathrm{e}^{-t/2} \leqslant \mathrm{e}^{-t/2}$ pour t assez grand.
Comme l'intégrale de cette fonction converge en $+\infty$, notre intégrale converge aussi.
Conclusion
L'intégrale définissant $\Gamma(x)$ converge si et seulement si $x > 0$.

IV.B -

IV.B.1) On va faire une intégration par partie sur l'intégrale définissant $\Gamma(x+1)$. On rappelle qu'on n'aura l'égalité habituelle que si
- l'intégrale du départ converge, ce qui est le cas ici, et,
- le « crochet » a une limite finie en $+\infty$ et en 0, ce qu'on vérifiera.

Rappelons que $x > 0$.

$\Gamma(x+1) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^x \,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$

Dans le « crochet », en dérivant t^x, on aura : $-t^x\,\mathrm{e}^{-t}$ qui tend vers
- 0 en $+\infty$, à cause de l'exponentielle,
- 0 en 0, à cause de la puissance.

On a donc : $\Gamma(x+1) = -\displaystyle\int_0^{+\infty} -xt^{x-1}\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = x\Gamma(x)$.

IV.B.2) On montre par récurrence que $\Gamma(n+1) = n!$

Vérification initiale

$\Gamma(1) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = 1 = 1!$

Hérédité

On admet que $\Gamma(n+1) = n!$, et on calcule $\Gamma(n+2)$.

$\Gamma(n+2) = (n+1)\Gamma(n+1) = (n+1)n! = (n+1)!$

Conclusion

Pour $n \in \mathbb{N}$, on a donc : $\Gamma(n+1) = n!$

IV.C - On a $f(x,t) = t^{x-1}\,\mathrm{e}^{-t}$ qui est continue sur $]0,+\infty[\times]0,+\infty[$, de même que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t) = t^{x-1}\ln(t)\,\mathrm{e}^{-t}$.

Pour montrer la classe $\mathscr{C}^1$ de Γ, il nous suffit de majorer $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right|$ par une fonction ψ qui ne dépend pas de x et dont l'intégrale converge sur $]0,+\infty[$.

On prend $x \in [a,b]$, avec $0 < a < b$ et on prend
- $\psi(t) = t^{a-1}\,|\ln(t)|$ pour $t \leqslant 1$, et,
- $\psi(t) = t^{b-1}\ln(t)\,\mathrm{e}^{-t}$ pour $t \geqslant 1$

Pour la convergence de l'intégrale de ψ en 0, on écrit $\psi(t) = \left(t^{a/2}\,|\ln(t)|\right) \times \dfrac{1}{t^{1-a/2}}$,

tandis que la convergence de l'intégrale de ψ en $+\infty$, on écrit $\psi(t) = \left(t^{b-1}\ln(t)\,\mathrm{e}^{-t/2}\right) \times \mathrm{e}^{-t/2}$.

Chaque fonction entre parenthèses tend vers 0 à la borne considérée, ce qui permet, pour x assez petit ou assez grand selon les cas, de majorer $\psi(x)$ par une fonction dont l'intégrale converge.

Le détail de la suite est laissé au lecteur !

Donc Γ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a,b]$, donc sur $]0,+\infty[$.

Si on le désire, on a une expression de $\Gamma'(x)$ sous forme d'une intégrale.

IV.D -

IV.D.1) Notons d'abord que $\Gamma(x) > 0$, puisque c'est l'intégrale d'une fonction continue, positive, non identiquement nulle, et que, de plus, les bornes d'intégration sont dans le bon sens.

g est donc bien définie sur $]0,+\infty[$.

Comme Γ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]0,+\infty[$, g y est aussi de classe $\mathscr{C}^\infty$.

Elle y est donc aussi, à fortiori, de classe $\mathscr{C}^{2n}$.

IV.D.2) $g(x+1) - g(x) = \ln(\Gamma(x+1)) - \ln(\Gamma(x)) = \ln(x\Gamma(x)) - \ln(\Gamma(x)) = \ln(x)$.

IV.D.3) On considère : $x > 0$.

On pose $H(x) = \displaystyle\int_x^{x+1} g(t)\,\mathrm{d}t$, qui est clairement dérivable puisque g est continue.

On a immédiatement : $H'(x) = g(x+1) - g(x) = \ln(x)$.

Comme $x \mapsto x\ln(x) - x$ est une primitive du logarithme,
on a : $H(x) = \displaystyle\int_x^{x+1} g(t)\,\mathrm{d}t = x\ln(x) - x + K$, pour $x > 0$.

IV.D.4) Reprenons la formule d'Euler - Mac Laurin, avec $a = x$, $b = x + 1$.
Il faudra prendre t et non pas x comme variable d'intégration, de plus, $b - a = 1$ simplifie la formule.
Ce qui donne :

$$\int_x^{x+1} g(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left(g(x+1) - g(x)\right) - \sum_{k=1}^{p} b_{2k}\left(g^{(2k-1)}(x+1) - g^{(2k-1)}(x)\right) + \int_x^{x+1} B_{2p}(t)g^{(2p)}((1-t)x + (x+1)t)\,\mathrm{d}t.$$

Ou encore :

$$x\ln(x) - x + K = \frac{\ln\left(\Gamma(x+1)\right) - \ln\left(\Gamma(x)\right)}{2} - \sum_{k=1}^{p} b_{2k}\left(g^{(2k-1)}(x+1) - g^{(2k-1)}(x)\right) + \int_x^{x+1} B_{2p}(t)g^{(2p)}(x+t)\,\mathrm{d}t.$$

De plus, on a : $g(x+1) - g(x) = \ln(x)$, qu'on dérive : $g'(x+1) - g'(x) = \dfrac{1}{x}$.
Si on dérive n fois avec $n \geqslant 1$, par une récurrence facile qu'on n'écrit pas ici, il est en effet plus difficile d'établir la bonne formule que de la démontrer, on obtient :

$$g^{(n)}(x+1) - g^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}.$$

Et donc : $g^{(2k-1)}(x+1) - g^{(2k-1)}(x) = \dfrac{(2k-2)!}{x^{2k-1}}$.
La formule d'Euler - Mac Laurin devient :

$$x\ln(x) - x + K = \frac{\ln\left(\Gamma(x+1)\right) - \ln\left(\Gamma(x)\right)}{2} - \sum_{k=1}^{p} \frac{(2k-2)!}{x^{2k-1}} b_{2k} + \int_x^{x+1} B_{2p}(t)g^{(2p)}(x+t)\,\mathrm{d}t.$$

Ce qui donne finalement :

$$\frac{\ln\left(\Gamma(x+1)\right) - \ln\left(\Gamma(x)\right)}{2} = x\ln(x) - x + K + \sum_{k=1}^{p} \frac{(2k-2)!}{x^{2k-1}} b_{2k} - \int_x^{x+1} B_{2p}(t)g^{(2p)}(t+x)\,\mathrm{d}t.$$