I Cas $n = 1$ et méthode d'Euler

I.A - La méthode d'Euler

I.A.1) Quand N est grand, la longueur de l'intervalle $[k/N, (k+1)/N]$ est petite, et comme f est de classe $\mathscr{C}^1$, la dérivée est quasi constante sur cet intervalle.

Une valeur approchée de la variation de f est alors obtenue en prenant la valeur de la dérivée en k/N.

I.A.2) Par exemple :

```
Euler:=proc(f,N)
local y,Suite,k;
y:=1;Suite:=[y];
for k from 1 to N do
   y:=y+f(y)/N;Suite:=[op(Suite,y)]
end do;
Suite
end proc;
```

I.B - Préliminaires

I.B.1) On a une équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants et sans second membre.

De plus, on a une condition initiale $y(0) = 1$. Cette équation a donc une solution unique sur $\mathbb{R}$, de la forme $y = k\mathrm{e}^x$, avec ici $k = 1$, compte tenu de la condition initiale.

I.B.2) On connaît l'inégalité : $t - 1 < E(t) \leqslant t$. Pour $t > 0$, cela donne : $\dfrac{t-1}{t} < \dfrac{E[t]}{t} \leqslant 1$.

Compte tenu du théorème d'encadrement, la limite en $+\infty$ de $\dfrac{E[t]}{t}$ est bien 1.

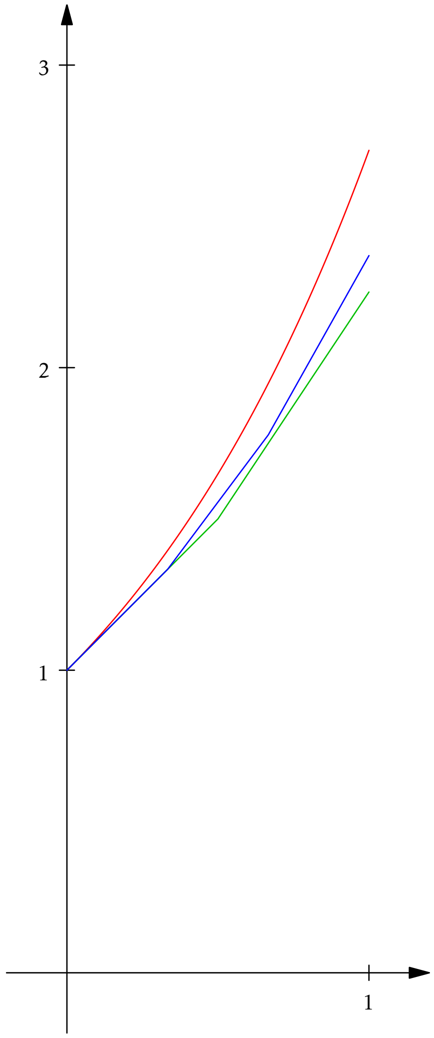
I.C - Mise en œuvre de la méthode d'Euler pour $\mathcal{E}_1$

I.C.1) Ici $f(y) = y$, donc $f(\tilde{y}_k) = \tilde{y}_k$, ce qui permet de mettre ce terme en facteur.

I.C.2) La suite $(\tilde{y}_k)$ est géométrique, on a donc $\tilde{y}_k = \left(1 + \dfrac{1}{N}\right)^k \tilde{y}_0 = \left(1 + \dfrac{1}{N}\right)^k$.

I.C.3) *a)* On va tracer :

- la solution exacte, l'exponentielle, en rouge,
- la première approximation d'Euler, y_2 en vert,
- et enfin, la seconde approximation d'Euler, y_3, en bleu.



b) y_N est affine sur l'intervalle $\left[\frac{k}{N}, \frac{k+1}{N}\right]$ et vaut respectivement $\left(1+\frac{1}{N}\right)^k$ et $\left(1+\frac{1}{N}\right)^{k+1}$ aux deux bornes.

La fonction proposée par l'énoncé vaut bien $\left(1+\frac{1}{N}\right)^k$ pour $t = \frac{k}{N}$

et $\left(1+\frac{1}{N}\right)^k \left(\frac{k+1}{N} + 1 - \frac{k}{N}\right) = \left(1+\frac{1}{N}\right)^{k+1}$ pour $t = \frac{k+1}{N}$.

C'est donc la fonction affine cherchée.

c) Remarquons d'abord que la formule est valable pour $t = 1$ car $E[N] = N$.

Ensuite, si $t \in \left[\frac{k}{N}, \frac{k+1}{N}\right[$, alors $Nt \in [k, k+1[$, et donc, $k = E[Nt]$.

Sur cette intervalle, la formule donnée par l'énoncé est bien la même que dans la question précédente.

Pour t, on a décrit complètement l'intervalle $[0, 1]$, ce qui assure le résultat.

I.C.4) $y_N(t) = \left(1+\frac{1}{N}\right)^{E[Nt]} \left(t + 1 - \frac{E[Nt]}{N}\right) = \mathrm{e}^{E[Nt]\ln(1+1/N)} \left(t + 1 - \frac{E[Nt]}{N}\right)$

$= \mathrm{e}^{tE[Nt](1/(Nt)+\mathrm{o}(1/(Nt))} \left(t + 1 - t\frac{E[Nt]}{Nt}\right)$

L'exposant de l'exponentielle tend clairement vers t donc l'exponentielle tend vers e^t.

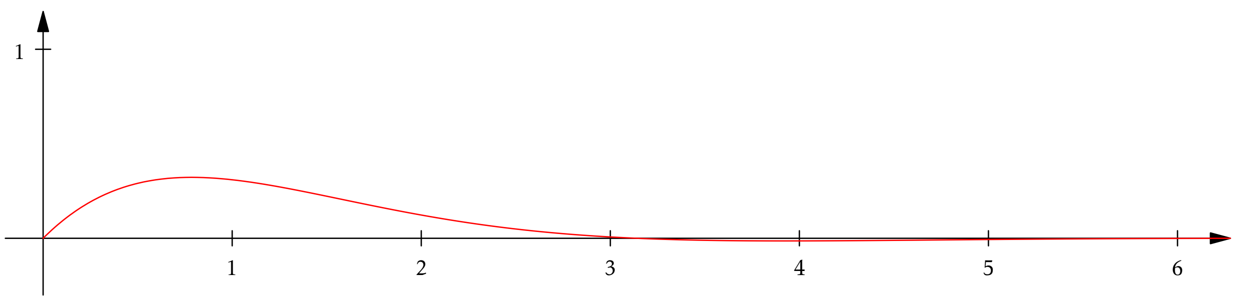
Comme le second terme du produit tend vers 1, $y_N(t) \to \mathrm{e}^t$, ce qui est le résultat demandé.

I.D - Étude d'un cas particulier avec second membre

I.D.1) On a une équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants, avec second membre continu sur $\mathbb{R}$, et condition initiale en 0.
Sans second membre, les solutions sont de la forme $y = k\,\mathrm{e}^t$.
On cherche une solution particulière à l'équation avec second membre sous la forme
$y = \mathrm{e}^{-t}(a\cos(t) + b\sin(t))$.
Alors, $y' = \mathrm{e}^{-t}(-a\sin(t) + b\cos(t)) - y$ et donc, $y' - y = \mathrm{e}^{-t}((-2a + b)\cos(t) + (-a - 2b)\sin(t))$.
Il suffit donc que a et b vérifient la système : $\begin{cases} -2a + b = 1 \\ -a - 2b = -2 \end{cases}$
$a = 0$ et $b = 1$ conviennent.
La solution générale de l'équation avec second membre est donc $y = k\,\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t}\sin(t)$.
$y(0) = 0$ donne $k = 0$.
La solution de l'équation différentielle avec la condition initiale est donc $y = \mathrm{e}^{-t}\sin(t)$.

I.D.2) On remarque que $y = \mathrm{e}^{-t}\sin(t) = \mathrm{Im}\left(\mathrm{e}^{(-1+\mathrm{i})t}\right)$.
L'exponentielle est développable en série entière sur $\mathbb{C}$.
On a donc $\forall t \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^{(-1+\mathrm{i})t} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1+\mathrm{i})^n t^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sqrt{2}^n\,\mathrm{e}^{3\mathrm{i}n\pi/4}}{n!} t^n$.
Ce qui donne en prenant la partie imaginaire $\forall t \in \mathbb{R}$, $y = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sqrt{2}^n}{n!} \sin\left(\frac{3n\pi}{4}\right) t^n$.

I.D.3) Comme le suggère l'énoncé, on zappe l'étude (facile) de la fonction…
On trouve, si on cherche, un maximum en $\pi/4$ et un minimum, peu visible, en $5\pi/4$.
Ce qui donne



I.D.4) h est continue donc localement intégrable sur $[0, +\infty[$, la singularité en en $+\infty$.
Comme $|y(t)| \leqslant \mathrm{e}^{-t}$, y est intégrable, donc son intégrale converge.
De la même façon, l'intégrale de $\mathrm{e}^{-t}\cos(t)$ converge aussi.
On a donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\sin(t)\,\mathrm{d}t = \mathrm{Im}\left(\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{(-1+\mathrm{i})t}\,\mathrm{d}t\right) = \mathrm{Im}\left(\left[\frac{\mathrm{e}^{(-1+\mathrm{i})t}}{-1+\mathrm{i}}\right]_0^{+\infty}\right) = \mathrm{Im}\left(\frac{1}{1-\mathrm{i}}\right) = \frac{1}{2}$

II Généralités

II.A - Quelques propriétés qualitatives des solutions de $\mathcal{E}_n$

II.A.1) $y'' - y = 0$ est une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants sans second membre.
L'équation caractéristique est $r^2 - 1 = 0$, de racines simples $r = 1$ et $r = -1$.
Les solutions réelles sont donc $y = A\,\mathrm{e}^t + B\,\mathrm{e}^{-t}$ avec A et B réels, tandis que les solutions complexes sont $y = A\,\mathrm{e}^t + B\,\mathrm{e}^{-t}$ avec A et B complexes !

II.A.2) y est n-fois dérivable, donc $y^{(n)}$ aussi, donc y est $2n$-fois dérivable, donc $y^{(n)}$ aussi…
Par récurrence très élémentaire, y est indéfiniment dérivable, donc de classe $\mathscr{C}^\infty$.

II.A.3) On dérive donc la relation $y^{(n)} - y = 0$, ce qui donne $y^{(n+1)} - y' = 0$, ou encore ${y'}^{(n)} - y' = 0$.
On a bien y' qui est aussi solution de $\mathcal{E}_n$.

II.A.4) Si y est une solution à valeurs réelles de $\mathcal{E}_n$, c'est aussi une solution à valeurs complexes !
On prend donc $\tilde{y} = y$ qui est bien une solution à valeurs complexes, et on a bien $y = \mathfrak{Re}(\tilde{y})$ car y et $\tilde{y}$ sont réelles et égales !
Réciproquement, comme $\mathcal{E}_n$ est à coefficients réels, les parties réelles des solutions à valeurs complexes sont aussi solutions, et à valeurs réelles !

II.B - Structure de l'ensemble des solutions

II.B.1) Il suffit de montrer que, dans l'ensemble des applications $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$,
l'application $\varphi : \quad y \to y^{[n]} - y$ est un endomorphisme.
Ceci est élémentaire compte tenu de la linéarité de la dérivation et que la dérivée d'une application de classe $\mathscr{C}^\infty$ est aussi de class $\mathscr{C}^\infty$.
Ainsi $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$, son noyau est bien un espace vectoriel réel.

II.B.2) On a $Y = \begin{pmatrix} y \\ y' \\ y'' \\ \vdots \\ y^{(n-2)} \\ y^{(n-1)} \end{pmatrix}$, donc, $Y' = \begin{pmatrix} y' \\ y'' \\ y^{(3)} \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \\ y^{(n)} \end{pmatrix}$.

Ainsi, y est solution de $\mathcal{E}_n$ si et seulement si $Y' = \begin{pmatrix} y' \\ y'' \\ y^{(3)} \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \\ y \end{pmatrix}$.

Mais $\begin{pmatrix} y' \\ y'' \\ y^{(3)} \\ \vdots \\ y^{(n-1)} \\ y \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} y \\ y' \\ y'' \\ \vdots \\ y^{(n-2)} \\ y^{(n-1)} \end{pmatrix}$ si et seulement si $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$

On a bien y solution de $\mathcal{E}_n$ si et seulement si $Y' = AY$, avec la matrice A précisée ci dessus.

II.B.3) θ est linéaire par linéarité de la dérivation et de la prise de la valeur d'une application en un point.
θ est bijective car $Y' = AY$, système différentiel linéaire du premier ordre à coefficients constants sans second membre, avec la condition initiale $Y(0) = \begin{pmatrix} y(0) \\ y'(0) \\ y''(0) \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(0) \end{pmatrix}$,
possède *(surjective)* une solution **unique** *(injective)*.
On a donc montré que $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel de dimension n, celle de $\mathbb{R}^n$.

III Les cas $n = 3$ et $n = 4$

III.A - Le cas $n = 3$: méthode de variation de la constante

III.A.1) Quand on a $y = \mathrm{e}^t$, alors $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $y^{(n)} = y$, donc y est solution de $\mathcal{E}_n$.
Ceci est bien sûr encore vrai pour $n = 3$.

III.A.2) $z(t) = y(t)\,\mathrm{e}^{-t}$, qu'on peut aussi écrire $y(t) = z(t)\,\mathrm{e}^{t}$. On note h la fonction exponentielle, jamais nulle.

On a donc $y''' = z'''h + 3z''h + 3z'h + z(t)h$.

L'équation différentielle devient donc $z'''h + 3z''h + 3z'h = 0$, ou encore $z''' + 3z'' + 3z' = 0$.

III.A.3) On pose $Z = z'$, l'équation différentielle devient $Z'' + 3Z' + 3Z = 0$.

On a une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants. L'équation caractéristique est $r^2 + 3r + 3 = 0$, dont les racines sont $r_{1,2} = \dfrac{-3 \pm \mathrm{i}\sqrt{3}}{2}$.

Sur $\mathbb{C}$, on a donc $Z = A'\,\mathrm{e}^{r_1 t} + B'\,\mathrm{e}^{r_2 t}$.

Sur $\mathbb{R}$, on a $Z = \left(\alpha' \cos \frac{\sqrt{3}}{2} t + \beta' \sin \frac{\sqrt{3}}{2} t\right) \mathrm{e}^{-3t/2}$.

Sur $\mathbb{C}$, on a donc $z = A\,\mathrm{e}^{r_1 t} + B\,\mathrm{e}^{r_2 t} + C$.

Sur $\mathbb{R}$, on a $z = \left(\alpha \sin \frac{\sqrt{3}}{2} t + \beta \cos \frac{\sqrt{3}}{2} t\right) \mathrm{e}^{-3t/2} + \gamma$.

III.A.4) Sur $\mathbb{C}$, on a donc $y = A\,\mathrm{e}^{(r_1+1)t} + B\,\mathrm{e}^{(r_2+1)t} + C\,\mathrm{e}^{t}$.

Sur $\mathbb{R}$, on a $z = \left(\alpha \sin \frac{\sqrt{3}}{2} t + \beta \cos \frac{\sqrt{3}}{2} t\right) \mathrm{e}^{-t/2} + \gamma\,\mathrm{e}^{t}$.

Une solution périodique ne doit pas contenir d'exponentielle à coefficients réels, ce qui implique $\alpha = \beta = \gamma = 0$, elle est donc nulle.

Il n'y a pas de solution périodique non nulle, encore moins 2π périodique non nulle...

III.B - Le cas $n = 4$: recherche de séries entières solutions

III.B.1) On détermine le rayon de convergence de la série entière $A(t)$ en appliquant le théorème de d'Alembert à $t_0 \neq 0$.

On pose $u_k = \left|\dfrac{t_0^{4k}}{(4k)!}\right|$. On calcule $\dfrac{u_{k+1}}{u_k} = \dfrac{t_0^4}{(4k+4)(4k+3)(4k+2)(4k+1)} \to 0$ quand $k \to +\infty$.

Il y a toujours convergence, le rayon de convergence est donc $R = +\infty$.

Il en est de même, avec quelques petites différences de calcul, pour les trois autres séries entières.

Sur l'ouvert de convergence, la somme d'une série entière se dérive terme à terme.

On a donc $B'(t) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \dfrac{t^{4k}}{(4k)!} = A(t)$. De même $C'(t) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \dfrac{t^{4k+1}}{(4k+1)!} = B(t)$.

Enfin, $D'(t) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \dfrac{t^{4k+2}}{(4k+2)!} = C(t)$.

III.B.2) *a)* On a $\sigma_k = \left(1 + (-1)^k\right)\left(1 + \mathrm{i}^k\right)$.

Si k est impair, $(-1)^k = -1$, donc $\sigma_k = 0$.

b) Si $k = 2p$, avec p impair, alors $\mathrm{i}^k = (-1)^p = -1$, donc $\sigma_k = 0$.

Si $k = 4p$, alors $(-1)^k = 1$ et $\mathrm{i}^k = (-1)^(2p) = 1$, donc $\sigma_k = 4$.

$\sigma_k \neq 0$ si et seulement si k est un multiple de 4.

c) $\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}t} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t} = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \dfrac{t^k}{k!} + \sum\limits_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \dfrac{t^k}{k!} + \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \mathrm{i}^k \dfrac{t^k}{k!} + \sum\limits_{k=0}^{+\infty} (-\mathrm{i})^k \dfrac{t^k}{k!} = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \sigma_k \dfrac{t^k}{k!} = \sum\limits_{p=0}^{+\infty} 4 \dfrac{t^{4p}}{(4p)!}$.

On a donc $A(t) = \dfrac{1}{4}\left(\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}t} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}\right) = \dfrac{1}{2}\,(\mathrm{ch}\, t + \cos t)$.

d) On a $B' = A$ et $B(0) = 0$, donc $B(t) = \dfrac{1}{4}\left(\mathrm{e}^t - \mathrm{e}^{-t} - \mathrm{i}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} + \mathrm{i}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}\right) = \dfrac{1}{2}\,(\mathrm{sh}\, t + \sin t)$.

De même $C' = B$ et $C(0) = 0$, donc $C(t) = \dfrac{1}{4}\left(\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}t} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}\right) = \dfrac{1}{2}\,(\mathrm{ch}\, t - \cos t)$.

Enfin $D' = C$ et $D(0) = 0$, donc $D(t) = \dfrac{1}{4}\left(\mathrm{e}^t - \mathrm{e}^{-t} + \mathrm{i}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} - \mathrm{i}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}\right) = \dfrac{1}{2}\,(\mathrm{sh}\, t - \sin t)$.

III.B.3) On a $y(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k t^k$ sur $\mathbb{R}$.

Donc $y^{(4)}(t) = \sum_{k=4}^{+\infty} k(k-1)(k-2)(k-3)a_k t^{k-4} = \sum_{k=0}^{+\infty} (k+4)(k+3)(k+2)(k+1)a_{k+4} t^k$ sur $\mathbb{R}$, en réindexant la somme.

Comme y est solution de l'équation différentielle,

on obtient $\sum_{k=0}^{+\infty} \left((k+4)(k+3)(k+2)(k+1)a_{k+4} - a_k\right) t^k = 0$ sur $\mathbb{R}$.

Ce qui donne $\forall k \in \mathbb{N}$, $(k+4)(k+3)(k+2)(k+1)a_{k+4} - a_k = 0$.

Ainsi, on peut déterminer les a_{4k} en fonction de a_0, les a_{4k+1} en fonction de a_1, les a_{4k+2} en fonction de a_2 et enfin les a_{4k+3} en fonction de a_3.

Montrons par récurrence que $\forall k \in \mathbb{N}$, $a_{4k} = \dfrac{a_0}{(4k)!}$.

La vérification initiale est immédiate.

Si on admet la propriété au rang k,

alors $a_{4k+4} = a_{4(k+1)} = \dfrac{a_{4k}}{(4k+4)(4k+3)(4k+2)(4k+1)} = \dfrac{a_0}{(4k+4)!}$.

La propriété est donc démontrée.

De la même façon, on montre que $a_{4k+1} = \dfrac{a_1}{(4k+1)!}$.

On montre aussi que $a_{4k+2} = 2\dfrac{a_2}{(4k+2)!}$, le 2 en facteur est nécessaire pour la vérification initiale et n'intervient pas dans l'hérédité.

Enfin, on obtient $a_{4k+3} = 6\dfrac{a_3}{(4k+3)!}$, avec le même argument pour le 6.

On reprend maintenant en séparant les termes de la série entière

$y(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k t^k = \sum_{k=0}^{+\infty} a_{4k} t^{4k} + \sum_{k=0}^{+\infty} a_{4k+1} t^{4k+1} + \sum_{k=0}^{+\infty} a_{4k+2} t^{4k+2} + \sum_{k=0}^{+\infty} a_{4k+3} t^{4k+3}$

$= a_0 \sum_{k=0}^{+\infty} \dfrac{t^{4k}}{(4k)!} + a_1 \sum_{k=0}^{+\infty} \dfrac{t^{4k+1}}{(4k+1)!} + 2a_2 \sum_{k=0}^{+\infty} \dfrac{t^{4k+2}}{(4k+2)!} + 6a_3 \sum_{k=0}^{+\infty} \dfrac{t^{4k+3}}{(4k+3)!}$

$= a_0 A(t) + a_1 B(t) + 2a_2 C(t) + 6a_3 D(t)$.

Comme (A, B, C, D) sont combinaison linéaires de $(\text{ch}, \text{sh}, \cos, \sin)$, il en est de même de y.

On a donc $\forall t \in \mathbb{R}$, $y(t) = z_1 \text{ch}(t) + z_2 \text{sh}(t) + z_3 \cos(t) + z_4 \sin(t)$.

III.B.4) La famille $(\text{ch}, \text{sh}, \cos, \sin)$ est donc génératrice de $\mathcal{S}_4(\mathbb{C})$ qui est de dimension 4, c'est donc une base.

Comme ce sont des fonctions à valeurs réelles, c'est aussi une base de $\mathcal{S}_4(\mathbb{R})$.

III.B.5) Les fonctions de la base donnée son développables en série entière sur $\mathbb{R}$, il en est donc de même de toutes les solutions.

Le mieux est d'utiliser le développement en série entière avec $a_k = \dfrac{y^{(k)}(0)}{k!}$.

On a donc $a_0 = 1$, $a_1 = 1$, $a_2 = \dfrac{1}{2}$ et $a_3 = \dfrac{-1}{6}$.

Donc $y(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \dfrac{t^{4k}}{(4k)!} + \sum_{k=0}^{+\infty} \dfrac{t^{4k+1}}{(4k+1)!} + \sum_{k=0}^{+\infty} \dfrac{t^{4k+2}}{(4k+2)!} - \sum_{k=0}^{+\infty} \dfrac{t^{4k+3}}{(4k+3)!}$

IV Retour au cas général

IV.A - Expression des solutions dans le cas général

IV.A.1) On a $y_k(t) = e^{\omega^k t}$, $\omega^n = 1$, donc $y_k^{(n)}(t) = (\omega^k)^n e^{\omega^k t} = (\omega^n)^k e^{\omega^k t} = e^{\omega^k t} = y_k(t)$

On a bien $y_k \in \mathcal{E}_n$.

IV.A.2) On a $y_k(t) = \mathrm{e}^{\omega^k t} = \mathrm{e}^{\cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right)t}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right)t}$.
Le module de $y_k(t)$ est donc $\mathrm{e}^{\cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right)t}$.
On considère une combinaison linéaire nulle des y_k, $a_0y_0 + a_1y_1 + \cdots + a_{n-1}y_{n-1} = 0$.
On considère, s'il existe, p, le premier k tel que $a_k \neq 0$.
Alors en $+\infty$, la somme est à la fois nulle, et à la fois équivalente en module à $a_p\,\mathrm{e}^{\cos\left(\frac{2p\pi}{n}\right)t}$, ce qui est impossible.
Il n'y a donc pas de coefficient a_k non nul, la famille est libre.

IV.A.3) La famille donnée des y_k est libre de n vecteurs, et formée de solutions de $\mathcal{E}_n$, qui est dimension n.
Cette famille est donc une base de $\mathcal{S}_n(\mathbb{C})$.
La forme générale des éléments de $\mathcal{S}_n(\mathbb{C})$ est donc $y = a_0y_0 + a_1y_1 + \cdots + a_{n-1}y_{n-1} = 0$.

IV.A.4) les y_k sont développables en série entière sur $\mathbb{R}$, il en est de même de leurs combinaisons linéaires !

IV.B - Étude des solutions 2π-périodiques de $\mathcal{E}_n$

IV.B.1) On va donc calculer les coefficients de Fourier de y', qu'on traitera systématiquement par parties en primitivant y'.
$a_0(y') = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} y'(t)\,\mathrm{d}t = 0 = 0 \cdot b_1(y)$, car y est 2π-périodique.
Maintenant, on a $k \geqslant 1$.
$$a_k(y') = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} y'(t)\cos(kt)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\left[y(t)\cos(kt)\right]_0^{2\pi} + \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} y(t)k\sin(kt)\,\mathrm{d}t = k\cdot b_k(y).$$
$$b_k(y') = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} y'(t)\sin(kt)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\left[y(t)\sin(kt)\right]_0^{2\pi} - \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} y(t)k\cos(kt)\,\mathrm{d}t = -k\cdot a_k(y).$$

IV.B.2) $c_0(y') = a_0(y') = 0 = \mathrm{i}\cdot 0 \cdot c_0(y)$.
Maintenant, on a $k \geqslant 1$.
$$c_k(y') = \frac{1}{2}(a_k(y') - \mathrm{i}b_k(y')) = \frac{1}{2}(kb_k(y) + \mathrm{i}ka_k(y) = \mathrm{i}k(a_k(y) - \mathrm{i}b_k(y)) = \mathrm{i}kc_k(y).$$
$$c_{-k}(y') = \frac{1}{2}(a_k(y') + \mathrm{i}b_k(y')) = \frac{1}{2}(kb_k(y) - \mathrm{i}ka_k(y) = \mathrm{i}(-k)(a_k(y) + \mathrm{i}b_k(y)) = \mathrm{i}(-k)c_{(-k)}(y).$$
On a bien montré que $\forall k \in \mathbb{Z}$, $c_k(y') = \mathrm{i}kc_k(y)$.
On applique n fois cette propriété et l'égalité $y^{(n)} = y$, et donc $\forall k \in \mathbb{Z}$, $c_k(y^{(n)}) = \mathrm{i}^n k^n c_k(y) = c_k(y)$.
Ce qui donne $(\mathrm{i}^n k^n - 1)\,c_k(y) = 0$.
Si n est impair, i^n est imaginaire, donc $(\mathrm{i}^n k^n - 1) \neq 0$, et enfin $c_k(y) = 0$.

IV.B.3) Si f est T-périodique de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$, alors la série de Fourier de f converge en tout point et sa somme est la demi somme des limites à droite et à gauche au point considéré.
Une solution 2π-périodique de $\mathcal{E}_n$ est de classe $\mathscr{C}^{+\infty}$, donc de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux et continue sur $\mathbb{R}$.
Sa série de Fourier converge donc en tout point et la somme de sa série de Fourier est elle-même.
Si n est impair, les c_k (et c_{-k}) sont nuls, donc les a_k et les b_k. La série de Fourier est donc nulle, et donc la fonction aussi !
Si n est pair, on pose $n = 2p$, on a encore l'égalité $(\mathrm{i}^n k^n - 1)\,c_k(y) = 0$,
qui devient ici $\left((-1)^p k^{2p} - 1\right)c_k(y) = 0$.
Le coefficient de c_k est nul si et seulement si $k = \pm 1$ et p pair.
Il n'y a des solutions non nulles 2π-périodiques que si n est un multiple de 4, et alors seuls a_1 et b_1 peuvent ne pas être nuls.
Ces solutions non nulles 2π-périodiques sont donc de la forme $y(t) = a_1\cos(t) + b_1\sin(t)$ à condition que n soit un multiple de 4..