Mathématiques 2

TSI **2012**

4 heures Calculatrices autorisées

Ce problème est basé sur une illusion d'optique.

On dit que deux courbes $\mathcal{P}$ et $\mathcal{R}$ de l'espace font illusion si les trois propriétés suivantes sont vérifiées quels que soient les points P et R de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{R}$:

- P et R sont distincts ;
- si les deux vecteurs non nuls $\overrightarrow{p}$ et $\overrightarrow{r}$ dirigent respectivement la tangente à $\mathcal{P}$ en P et la tangente à $\mathcal{R}$ en R, le vecteur $\overrightarrow{PR}$ n'est colinéaire ni à $\overrightarrow{p}$ ni à $\overrightarrow{r}$;
- le produit vectoriel $\overrightarrow{p_1} = \overrightarrow{p} \wedge \overrightarrow{PR}$ est orthogonal au produit vectoriel $\overrightarrow{r_1} = \overrightarrow{r} \wedge \overrightarrow{PR}$.

Pour situer l'illusion d'optique, plaçons un observateur sur la droite (PR), hors du segment $[P, R]$ et regardant vers P et R. Son œil étant aligné avec P et R, ces points (distincts) lui semblent être confondus.

De plus, son œil est, a fortiori, dans le plan passant par P et dirigé par $\overrightarrow{p}$ et $\overrightarrow{PR}$ donc toute droite de ce plan lui semble être la tangente à $\mathcal{P}$; l'illusion est analogue pour la tangente à $\mathcal{R}$. Comme $\overrightarrow{p_1}$ et $\overrightarrow{r_1}$ sont orthogonaux, ces deux tangentes lui semblent être orthogonales donc les deux courbes semblent se couper à angle droit.

Deux courbes faisant illusion étant données, on peut aussi chercher l'ensemble des points M de l'espace d'où l'observateur jouit de l'illusion d'optique.

Pour mener cette étude, l'espace est muni de sa structure euclidienne canonique et rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$, noté également $Oxyz$. Le produit scalaire est noté $\bullet$, la norme euclidienne est notée $\|\ \|$ et la distance euclidienne d.

I Un premier exemple

I.A – Dans le plan Oxy, on considère la droite Δ d'équation $x = -3$, les points F et S de coordonnées $(1, 0)$ et $(-1, 0)$ et le point variable P de coordonnées (x, y).

I.A.1) Calculer les carrés des distances de P au point F et de P à la droite Δ.

I.A.2) Former une équation cartésienne de la courbe $\mathcal{P}$, ensemble des points P du plan Oxy qui sont équidistants de F et de Δ.

I.A.3) Quelle est la nature de $\mathcal{P}$ et que représentent S, F et Δ pour $\mathcal{P}$? Représenter $\mathcal{P}$.

I.A.4) Montrer que $\mathcal{P}$ admet dans l'espace la représentation paramétrique

$$x = 2t^2 - 1; \quad y = 4t; \quad z = 0$$

I.B – On considère de même la courbe $\mathcal{R}$ admettant la représentation paramétrique

$$x = 1 - 2u^2; \quad y = 0; \quad z = 4u$$

I.B.1) Montrer que $\mathcal{R}$ est une parabole passant par F et la représenter dans le plan Oxz.

I.B.2) Montrer que $\mathcal{R}$ se déduit de $\mathcal{P}$ par une symétrie orthogonale par rapport à une droite à préciser.

I.B.3) Sur un même dessin, représenter le repère $Oxyz$, puis les tangentes en S à $\mathcal{P}$ et en F à $\mathcal{R}$, et enfin $\mathcal{P}$ et $\mathcal{R}$ elles-mêmes.

I.C – Soit P le point de paramètre t sur $\mathcal{P}$ et R le point de paramètre u sur $\mathcal{R}$.

I.C.1) Donner, par leurs composantes, un vecteur $\overrightarrow{p}$ dirigeant la tangente en P à $\mathcal{P}$ et un vecteur $\overrightarrow{r}$ dirigeant la tangente en R à $\mathcal{R}$.

I.C.2) Calculer les composantes de $\overrightarrow{p_1} = \overrightarrow{p} \wedge \overrightarrow{PR}$ et de $\overrightarrow{r_1} = \overrightarrow{r} \wedge \overrightarrow{PR}$.

I.C.3) L'un de ces deux produits vectoriels peut-il être nul ?

I.D – Montrer que les deux courbes $\mathcal{P}$ et $\mathcal{R}$ font illusion.

I.E – On reprend les notations du **I.C**. Soit μ un réel et M le point de la droite (PR) défini par $\overrightarrow{PM} = \mu\overrightarrow{PR}$.

I.E.1) Comment faut-il choisir μ pour que le point M ne soit pas sur le segment de droite $[PR]$ (afin que du point M on puisse voir simultanément P et R) ?

I.E.2) Exprimer les coordonnées (x, y, z) de M en fonction de t, u et μ, puis t et u en fonction de y, z et μ.

I.E.3) On fixe les coordonnées y et z du point M.

Montrer que le point M est un point depuis lequel on a l'illusion d'optique si et seulement si x est dans l'ensemble des valeurs prises par une certaine fonction de μ que l'on précisera.

I.E.4) Quels sont les points de l'axe Ox depuis lesquels on a l'illusion d'optique ?

II Coplanéarité et alignement

Soient, dans l'espace, quatre points M_1, M_2, M_3, M_4 de coordonnées (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3), (x_4, y_4, z_4) et soient u, v, w, h quatre nombres réels.

On leur associe les matrices

$$L = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{bmatrix} \qquad S = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{bmatrix} \qquad V = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ h \end{bmatrix}$$

On considère V comme un vecteur de $\mathbb{R}^4$; on note f l'application linéaire de $\mathbb{R}^4$ dans lui-même ayant L pour matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$.

On note V_1, V_2, V_3, V_4 les vecteurs lignes de L.

II.A –

II.A.1) En examinant le produit LV, montrer qu'il n'y a pas dans $\mathrm{Ker}(f)$ de vecteur non nul dont les trois premières composantes soient nulles.

II.A.2) Montrer que $\mathrm{Ker}(f)$ n'est pas réduit au vecteur nul si et seulement si le déterminant de L est nul.

II.A.3) Montrer que si V est non nul et appartient à $\mathrm{Ker}(f)$, alors

$$ux + vy + wz + h = 0$$

est l'équation d'un plan contenant M_1, M_2, M_3 et M_4.

II.A.4) Montrer que M_1, M_2, M_3 et M_4 sont coplanaires si et seulement si le déterminant de L est nul.

II.B –

II.B.1) On suppose que le rang de S est inférieur ou égal à 2.

Montrer que, quel que soit M_4, le déterminant de L est nul. En déduire que M_1, M_2, M_3 sont alignés.

II.B.2) Montrer que le rang de S est inférieur ou égal à 2 si et seulement si M_1, M_2, M_3 sont alignés.

II.C – On suppose que $M_1 \neq M_2$.

II.C.1) Montrer que la famille des deux vecteurs lignes (V_1, V_2) est libre.

II.C.2) Montrer que M_1, M_2, M_3 sont alignés si et seulement si il existe $\mu \in \mathbb{R}$ tel que $V_3 = \mu V_1 + (1 - \mu)V_2$.

II.D – On suppose ici que les points M_1, M_2, M_3, M_4 sont alignés et tous distincts.

II.D.1) Montrer que les deux dernières lignes de la matrice L sont combinaisons linéaires des deux premières.

II.D.2) Qu'en résulte-t-il pour le rang de L et la dimension de $\mathrm{Ker}(f)$?

II.D.3) Montrer que L admet, dans le cas où on s'est placé, 0 comme valeur propre, avec un ordre de multiplicité supérieur ou égal à 2.

II.E – ***Application***

On suppose M_1, M_2, M_3, M_4 non coplanaires. Une droite Δ rencontre en quatre points M'_4, M'_3, M'_2, M'_1, tous distincts, les quatre plans contenant respectivement les points (M_1, M_2, M_3), (M_1, M_2, M_4), (M_1, M_3, M_4) et (M_2, M_3, M_4).

On note M''_1, M''_2, M''_3, M''_4 les milieux des segments $[M_1M'_1]$, $[M_2M'_2]$, $[M_3M'_3]$, $[M_4M'_4]$. On se propose de démontrer que M''_1, M''_2, M''_3 et M''_4 sont coplanaires.

Pour cela, on utilise encore la matrice L construite à l'aide des coordonnées de (M_1, M_2, M_3, M_4) et aussi les matrices L' et L'' construites de la même façon à l'aide des coordonnées de (M'_1, M'_2, M'_3, M'_4) et de $(M''_1, M''_2, M''_3, M''_4)$.

II.E.1) On note V'_1, V'_2, V'_3, V'_4 les vecteurs lignes de L'. En considérant les points M'_1, M_2, M_3, M_4, montrer qu'il existe des réels β_1, γ_1, δ_1 tels que

$$V'_1 = \beta_1 V_2 + \gamma_1 V_3 + \delta_1 V_4 \quad \text{avec} \quad \beta_1 + \gamma_1 + \delta_1 = 1$$

II.E.2) Montrer qu'il existe une matrice carrée T de taille 4 vérifiant :

$$\begin{cases} \text{les termes diagonaux sont nuls} \\ \text{sur chaque ligne, la somme des termes vaut 1} \\ L' = T.L \end{cases}$$

II.E.3) Montrer que le vecteur-colonne de composantes $(1, 1, 1, 1)$ est vecteur propre de T et donner la valeur propre associée.

II.E.4) Montrer que L est inversible et que L' et T sont de rang 2.

II.E.5) En utilisant la trace de T, donner la liste des valeurs propres de T.

II.E.6) Montrer que $L'' = (L + L')/2$ et justifier que L'' n'est pas inversible.

II.E.7) Conclure.

III Un deuxième exemple

III.A – On considère la courbe $\mathcal{P}$ du plan $z = 0$ admettant dans $Oxyz$ la représentation paramétrique

$$x = 5\cos(t); \quad y = 3\sin(t); \quad z = 0$$

III.A.1) Montrer qu'il s'agit d'une ellipse dont on précisera les foyers F et F'.

III.A.2) Représenter $\mathcal{P}$ dans le plan Oxy.

III.B – On considère de même la courbe $\mathcal{R}$ du plan $y = 0$ admettant dans $Oxyz$ la représentation paramétrique

$$x = 4\operatorname{ch}(u); \quad y = 0; \quad z = 3\operatorname{sh}(u)$$

(ch et sh désignent le cosinus hyperbolique et le sinus hyperbolique.)

III.B.1) Montrer que $\mathcal{R}$ est une partie d'une hyperbole $\mathcal{H}$ dont on donnera une équation cartésienne.

III.B.2) Préciser, sans justification, les asymptotes de $\mathcal{H}$.

III.B.3) Représenter $\mathcal{R}$ dans le plan Oxz.

III.C – Sur un même dessin, représenter le repère $Oxyz$, les points F et F' puis les tangentes remarquables à $\mathcal{P}$ et $\mathcal{R}$, et enfin $\mathcal{P}$ et $\mathcal{R}$ elles-mêmes.

III.D – Soient P le point de paramètre t sur $\mathcal{P}$ et R le point de paramètre u sur $\mathcal{R}$.

Donner, par leurs composantes, un vecteur $\overrightarrow{p}$ dirigeant la tangente en P à $\mathcal{P}$ et un vecteur $\overrightarrow{r}$ dirigeant la tangente en R à $\mathcal{R}$.

On ne terminera pas la démonstration du fait que $\mathcal{P}$ et $\mathcal{R}$ font illusion.

III.E – Les réels x, y, z, t et u étant donnés, soient M le point de coordonnées x, y, z, P le point de paramètre t sur $\mathcal{P}$ et R le point de paramètre u sur $\mathcal{R}$. On leur associe la matrice

$$S = \begin{bmatrix} 5\cos(t) & 3\sin(t) & 0 & 1 \\ 4\operatorname{ch}(u) & 0 & 3\operatorname{sh}(u) & 1 \\ x & y & z & 1 \end{bmatrix}$$

On note V_1, V_2 et V_3 ses vecteurs lignes.

III.E.1) En utilisant l'un des résultats de la **partie II**, montrer que M, P et R sont alignés si et seulement si il existe un réel μ tel que $V_3 = \mu V_1 + (1 - \mu)V_2$.

III.E.2) En déduire une représentation paramétrique de l'ensemble des points M ainsi obtenus, de la forme

$$x = x(t, u, \mu); \quad y = y(t, u, \mu); \quad z = z(t, u, \mu)$$

III.E.3) Comment faut-il choisir μ pour que l'observateur placé en M ait l'illusion d'optique ?

IV Recherche de l'ensemble des solutions

On voudrait maintenant trouver tous les couples de courbes qui font illusion. On va se limiter à chercher $\mathcal{P}$ et $\mathcal{R}$ faisant illusion et vérifiant **en plus** :

- $\mathcal{P}$ admet une représentation paramétrique de la forme $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{F}(t)$ où la fonction vectorielle $\overrightarrow{F}$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée vérifie $\forall t \in \mathbb{R}$, $\overrightarrow{F}'(t) \neq \overrightarrow{0}$;
- $\mathcal{R}$ admet une représentation paramétrique de la forme $\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{G}(u)$ où la fonction vectorielle $\overrightarrow{G}$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée vérifie $\forall u \in \mathbb{R}$, $\overrightarrow{G}'(u) \neq \overrightarrow{0}$;
- il existe deux réels t_0 et u_0 rendant minimale la distance PR ;
- $\mathcal{P}$ n'est pas contenue dans une droite et $\mathcal{R}$ non plus.

On note P_0 (et R_0) les points de paramètres t_0 (et u_0) sur $\mathcal{P}$ (et $\mathcal{R}$).

Soient donc $\mathcal{P}$ et $\mathcal{R}$ deux courbes ayant **toutes** ces propriétés.

On rappelle que l'intersection d'un cône de révolution avec un plan ne passant pas par le sommet du cône est une ellipse, une hyperbole ou une parabole.

IV.A – On note P et R les points $P(t)$ et $R(u)$, $\overrightarrow{V}$ le produit vectoriel $\overrightarrow{PR} \wedge \overrightarrow{F}'(t)$, $\overrightarrow{W}$ le produit vectoriel $\overrightarrow{PR} \wedge \overrightarrow{G}'(u)$ et $\varphi(t, u)$ le produit scalaire de $\overrightarrow{V}$ et $\overrightarrow{W}$.

Montrer que $\varphi(t, u)$ est nul pour tout couple (t, u) de réels.

IV.B –

IV.B.1) En utilisant $\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{OR} - \overrightarrow{OP}$, exprimer la dérivée partielle de $\| \overrightarrow{PR} \|^2$ par rapport à u en fonction du produit scalaire $\overrightarrow{PR} \bullet \overrightarrow{G}'(u)$.

IV.B.2) Montrer que $\overrightarrow{P_0R_0}$ est orthogonal à $\overrightarrow{G}'(u_0)$ et à $\overrightarrow{F}'(t_0)$.

IV.C – Dans cette question, on fixe la valeur de t et on choisit un repère orthonormé $PXYZ$ d'origine P avec l'axe $\overrightarrow{PZ}$ dans la direction de $\overrightarrow{F}'(t)$.

On note v la troisième composante de $\overrightarrow{F}'(t)$.

On abrègera en X, Y, Z, X', Y' et Z' les composantes de $\overrightarrow{PR(u)}$ et de $\overrightarrow{G}'(u)$.

IV.C.1) Traduire par une relation entre ces divers nombres la nullité de $\varphi(t, u)$.

IV.C.2) Montrer que la fonction h telle que $h(u) = \dfrac{Z^2}{X^2 + Y^2 + Z^2}$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.

IV.C.3) En utilisant **IV.C.1**, montrer que h est constante sur $\mathbb{R}$.

IV.C.4) En déduire que $\mathcal{R}$ est contenue dans une surface, qu'on notera $\mathcal{S}(t)$ et qui est, suivant la valeur de la constante précédente, soit le plan passant par P et orthogonal à $\overrightarrow{F}'(t)$, soit un cône de révolution de sommet P et dont l'axe est dirigé par $\overrightarrow{F}'(t)$.

IV.D – Dans cette question, on fixe la valeur de t à $t = t_0$, donc $P = P_0$.

IV.D.1) Montrer que le point R_0 appartient à $\mathcal{S}(t_0)$.

IV.D.2) Montrer que $\mathcal{R}$ est contenue dans le plan Γ passant par P_0 et orthogonal à $\overrightarrow{F}'(t_0)$.

IV.E –

IV.E.1) Montrer que $\mathcal{P}$ n'est pas incluse dans le plan Γ.

IV.E.2) On fixe t à une valeur t_1 telle que le point $P_1 = P(t_1)$ de $\mathcal{P}$ ne soit pas dans le plan Γ.

Montrer que $\mathcal{S}(t_1)$ est un cône de révolution de sommet P_1.

IV.F –

IV.F.1) Montrer que $\mathcal{R}$ est contenue dans une ellipse, une hyperbole ou une parabole, elle-même contenue dans le plan Γ.

IV.F.2) Montrer de même que $\mathcal{P}$ est contenue dans une ellipse, une hyperbole ou une parabole, elle-même contenue dans un plan Π perpendiculaire à Γ et que l'on précisera .

• • • FIN • • •