



Le sujet comporte quatre parties. Dans les parties I et II, on établit des résultats utiles pour les parties suivantes. Le jury tiendra compte de la clarté et de la précision de la rédaction. En particulier, les candidats veilleront à justifier avec soin que les hypothèses des théorèmes utilisés sont bien vérifiées.

I**I.A –**

I.A.1) Soit x un réel strictement positif.

Montrer que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{t} dt$ est convergente et qu'elle vérifie les inégalités suivantes :

$$0 \leq \int_1^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{t} dt \leq \frac{1}{x}$$

I.A.2) Montrer que, pour tout réel $x > 0$, la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $t \mapsto \frac{e^{-t} - e^{-xt}}{t}$, admet une limite quand $t \rightarrow 0^+$, dont on donnera la valeur.

I.A.3) Dédurre de ce qui précède que, pour tout réel $x > 0$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} - e^{-xt}}{t} dt$ est absolument convergente.

I.B – On désigne désormais par F la fonction qui à $x > 0$ associe $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} - e^{-xt}}{t} dt$.

I.B.1) Soit c un réel strictement positif.

Montrer que la fonction F est de classe C^1 sur l'intervalle $[c, +\infty[$.

I.B.2) En déduire que F est de classe C^1 sur l'intervalle $]0, +\infty[$.

Calculer $F'(x)$ puis $F(x)$, pour tout $x \in]0, +\infty[$.

I.C – Soient a et b deux réels vérifiant $0 < a < b$.

Montrer que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} dt$ est convergente et calculer sa valeur.

On pourra utiliser la fonction F étudiée précédemment.

I.D – Dans cette question, on considère l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{t} (1 - e^{-t})^n dt$, dans laquelle x est un réel strictement positif et n un entier supérieur ou égal à 1.

I.D.1) Montrer que cette intégrale est convergente.

I.D.2) Vérifier que, pour tout réel t strictement positif et tout entier n supérieur ou égal à 1, on a

$$(1 - e^{-t})^n = - \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k (1 - e^{-kt})$$

I.D.3) En déduire la valeur de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{t} (1 - e^{-t})^n dt$.

II

Dans cette partie, on se place dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$ des polynômes réels.

On définit sur $\mathbb{R}[X]$ l'application Δ qui à $P \in \mathbb{R}[X]$ associe le polynôme $\Delta(P)$ défini par :

$$\Delta(P)(X) = P(X+1) - P(X)$$

Cette application Δ est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$, ce qu'on ne demande pas de justifier. Pour tout entier n supérieur ou égal à 2, on définit l'endomorphisme Δ^n obtenu en composant n endomorphismes égaux à Δ :

$$\Delta^n = \underbrace{\Delta \circ \Delta \circ \dots \circ \Delta}_{n \text{ fois}}$$

On considère la famille de polynômes $(P_n)_{n \geq 0}$ définie par

$$\begin{cases} P_0(X) = 1 \\ P_1(X) = X \\ P_n(X) = \frac{X(X+1) \dots (X+n-1)}{n!} = \frac{1}{n!} \prod_{j=0}^{n-1} (X+j) \quad \text{pour } n \geq 2 \end{cases}$$

Dans les questions qui suivent, n désigne toujours un entier supérieur ou égal à 1.

II.A –

II.A.1) Montrer que la famille $(P_k)_{0 \leq k \leq n}$ est une base de l'espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$ des polynômes réels de degré inférieur ou égal à n .

II.A.2) Soit k un entier vérifiant $1 \leq k \leq n$.

Déterminer $\Delta(P_k)(X)$ en fonction de $P_{k-1}(X+1)$. Donner également la valeur de $\Delta(P_0)$.

II.A.3) Soit m un entier supérieur ou égal à 1 et k un entier vérifiant $0 \leq k \leq n$.

Déterminer $\Delta^m(P_k)$ en distinguant les cas : $0 \leq m \leq k-1$, $m = k$ et $m \geq k+1$.

II.A.4) Dédurre de ce qui précède que, si P est un polynôme de degré inférieur ou égal à $n-1$, alors $\Delta^n(P) = 0$.

II.B – Soit $P \in \mathbb{R}[X]$.

II.B.1) Démontrer que le polynôme $\Delta^n(P)$ est donné par la formule

$$\Delta^n(P)(X) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} P(X+k)$$

On pourra effectuer une récurrence.

II.B.2) En déduire, pour tout entier r vérifiant $0 \leq r \leq n-1$, l'égalité suivante,

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k (X+k)^r = 0 \quad (\text{II.1})$$

III

Dans toute cette partie, n et r désignent des entiers supérieurs ou égaux à 1 et x un réel strictement positif.

III.A –

III.A.1) Montrer que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{t^r} (1-e^{-t})^n dt$ est convergente.

III.A.2) Montrer que l'intégrale $\int_0^1 \frac{e^{-xt}}{t^r} (1-e^{-t})^n dt$ converge si et seulement si $n \geq r$.

III.B – Désormais, on suppose la condition $1 \leq r \leq n$ vérifiée. On définit la fonction F_r qui à $x > 0$ associe :

$$F_r(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{t^r} (1-e^{-t})^n dt$$

III.B.1) Soit c un réel strictement positif.

Montrer que la fonction F_r est de classe C^1 sur l'intervalle $[c, +\infty[$.

III.B.2) En déduire que F_r est de classe C^1 sur l'intervalle $]0, +\infty[$. Montrer que si $r \leq n-1$, on a

$$\forall x > 0, F'_{r+1}(x) = -F_r(x)$$

III.C –

III.C.1) Montrer que, pour tout $t \geq 0$, on a $0 \leq 1 - e^{-t} \leq t$.

III.C.2) Montrer que, pour tout $x > 0$, on a :

$$0 < F_r(x) \leq \frac{1}{x^{n+1-r}} \int_0^{+\infty} e^{-u} u^{n-r} du$$

III.C.3) En déduire que $\lim_{x \rightarrow +\infty} F_r(x) = 0$.

III.D – On définit la fonction G_r qui, à $x > 0$, associe :

$$G_r(x) = \frac{(-1)^r}{(r-1)!} \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} (x+k)^{r-1} \ln(x+k)$$

On suppose dans cette question que $1 \leq r \leq n-1$.

Montrer que $\forall x > 0, G'_{r+1}(x) = -G_r(x)$.

III.E – Dans cette question, on utilisera le résultat $\lim_{x \rightarrow +\infty} G_r(x) = 0$ qu'on admet pour l'instant.

Montrer par récurrence sur l'entier r variant de 1 à n , qu'on a : $\forall x > 0, F_r(x) = G_r(x)$.

III.F – Le but de cette question est d'établir que $\lim_{x \rightarrow +\infty} G_r(x) = 0$. On utilisera l'égalité (II.1).

III.F.1) Montrer que, pour tout entier r vérifiant $1 \leq r \leq n-1$

$$\forall x > 0, G_{r+1}(x) = \frac{(-1)^{r+1}}{r!} \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} (x+k)^r \ln\left(1 + \frac{k}{x}\right)$$

III.F.2) Rappeler le développement limité de la fonction $u \mapsto \ln(1+u)$ à l'ordre r lorsque u tend vers 0. En utilisant ce développement limité pour la fonction $x \mapsto \ln\left(1 + \frac{k}{x}\right)$ lorsque $x \rightarrow +\infty$, montrer que :

$$G_{r+1}(x) = \frac{(-1)^{r+1}}{r!} \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} (x+k)^r \left(\sum_{j=1}^r \frac{(-1)^{j-1} k^j}{j x^j} \right) + o(1)$$

où $o(1)$ désigne une fonction admettant pour limite 0 lorsque $x \rightarrow +\infty$.

Vérifier qu'il existe des constantes A_s , où s est un entier relatif compris entre $-r$ et $r-1$, telles que :

$$G_{r+1}(x) = \frac{(-1)^{r+1}}{r!} \sum_{s=-r}^{r-1} A_s x^s + o(1) \quad \text{quand } x \rightarrow +\infty$$

III.F.3) Montrer que, pour tout entier s vérifiant $0 \leq s \leq r-1$, la constante A_s est nulle.

III.F.4) En déduire que, pour tout entier r vérifiant $1 \leq r \leq n$, on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} G_r(x) = 0$.

IV

Dans cette partie, a est un réel fixé. On considère la série entière de terme général $P_n(a) x^n$, $n \geq 0$, où (P_n) est la famille de polynômes étudiée dans la **partie II**.

IV.A – Dans cette question, on suppose que a est un entier relatif négatif.

IV.A.1) Préciser la valeur de $P_n(a)$ lorsque $n \geq |a| + 1$. En posant $p = |a|$, donner la valeur de $P_n(a)$ lorsque $0 \leq n \leq p$ en fonction de $\binom{p}{n}$

IV.A.2) Justifier l'existence de la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} P_n(a) x^n$ pour tout réel x et la calculer.

IV.B – Dans cette question, on suppose que a n'est pas un entier négatif.

IV.B.1) Déterminer le rayon de convergence R de la série entière $\sum_{n \geq 0} P_n(a) x^n$.

IV.B.2) Pour tout réel x tel que cette série converge, on pose $S_a(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} P_n(a) x^n$.

Montrer que $\forall x \in]-R, R[, (1-x)S'_a(x) - aS_a(x) = 0$.

IV.B.3) En déduire la valeur de $S_a(x)$ pour $x \in]-R, R[$.

IV.C – Dans cette question, on étudie la convergence de la série de terme général $|P_n(a)|$, $n \geq 0$, lorsque $a \notin \mathbb{Z}^-$. On suppose que c est un réel fixé, et on définit une suite $(u_n)_{n \geq 1}$ en posant

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = n^c |P_n(a)|$$

IV.C.1) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $w_n = \ln u_{n+1} - \ln u_n$.

Montrer qu'il existe une unique valeur de c qu'on explicitera, pour laquelle la série de terme général w_n , $n \geq 1$, converge.

Dans la suite de cette question, on suppose que c est désormais égal à cette valeur.

IV.C.2) Montrer que la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ converge et que sa limite L , qu'on ne cherchera pas à calculer, est strictement positive. En déduire que : $|P_n(a)| \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{L}{n^c}$.

IV.C.3) Préciser pour quelles valeurs de a la série de terme général $|P_n(a)|$ converge. Donner dans ce cas la valeur de $\sum_{n=0}^{+\infty} P_n(a)$ et celle de $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n P_n(a)$. On citera avec précision le théorème utilisé.

• • • FIN • • •