I

I.A -

I.A.1) La singularité est bien sûr en $+\infty$, et la fonction est positive.

Sur l'intervalle, la fonction est majorée par e^{-xt}, dont l'intégrale converge car $x > 0$.

La même majoration donne donc : $0 \leqslant \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{t}\, dt \leqslant \int_1^{+\infty} e^{-xt}\, dt = \frac{1}{x}$.

I.A.2) On fait un développement limité à l'ordre 1 du numérateur, et on obtient :

$e^{-t} - e^{-xt} = (x-1)t + o(t)$.

Ce qui donne : $\dfrac{e^{-t} - e^{-xt}}{t} = x - 1 + o(1)$.

La limite, finie, en 0^+ de cette fonction existe et vaut $x - 1$.

I.A.3) Cette limite finie en 0 donne donc la convergence de l'intégrale en 0.

Sur $]0, 1]$ et sur $[1, +\infty[$, la fonction ne change pas de signe. Ce signe dépend de l'intervalle et de la valeur de x par rapport à 1.

La convergence absolue de l'intégrale équivaut alors à sa convergence, ce qu'on vient de montrer.

I.B -

I.B.1) On considère sur $[c, +\infty[\times]0, +\infty[$, $f(x, t) = \dfrac{e^{-t} - e^{-xt}}{t}$

Cette application est absolument intégrable par rapport à t sur $]0, +\infty[$,

de plus, $\left|\dfrac{\partial f}{\partial t}\right| = e^{-xt} \leqslant e^{-ct}$, qui ne dépend pas de x, et dont l'intégrale converge.

Ceci assure la classe $\mathscr{C}^1$ de F sur $[c, +\infty[$.

De plus, on a alors $F'(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-xt}\, dt = \frac{1}{x}$

I.B.2) Ce résultat est encore valable sur la réunion des intervalles précédents, donc sur $]0, +\infty[$.

On a $F'(x) = \dfrac{1}{x}$, et, $F(1) = 0$, ce qui donne immédiatement : $F(x) = \ln(x)$ sur $]0, +\infty[$.

I.C - Il suffit d'utiliser F en a et en b.

$$F(b) - F(a) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} - e^{-bt}}{t}\, dt - \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} - e^{-at}}{t}\, dt = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t}\, dt,$$

par linéarité des intégrales convergentes.

Ce qui prouve que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t}\, dt$ converge et vaut $\ln(b) - \ln(a)$.

I.D -

I.D.1) On a une double singularité en 0 et en 1. Remarquons encore que la fonction est positive.

En 0, $1 - e^{-t} \sim t$ et donc, $\dfrac{e^{-xt}}{t}(1 - e^{-t})^n \sim t^{n-1}$, dont l'intégrale converge évidemment !

En $+\infty$, quand $t \geqslant 1$, on a $0 \leqslant \dfrac{e^{-xt}}{t}(1 - e^{-t})^n \leqslant e^{-xt}$, dont l'intégrale converge encore une fois.

I.D.2) $\displaystyle -\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}(-1)^k(1 - e^{-kt}) = -\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}(-1)^k + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}(-1)^k e^{-kt} = -(1-1)^n + (1 - e^{-t})^n = (1 - e^{-t})^n$

I.D.3) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{t}(1 - e^{-t})^n\, dt = -\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}(-1)^k \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{t}(1 - e^{-kt})\, dt,$

par linéarité des intégrales convergentes.

On en déduit : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{t}(1 - e^{-t})^n\, dt = -\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}(-1)^k \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt} - e^{-(x+k)t}}{t}\, dt$

$$= -\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k(\ln(x+k)-\ln(x)) = -\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k\ln(x+k)+\ln(x)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k.$$

Finalement : $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-xt}}{t}(1-\mathrm{e}^{-t})^n\,\mathrm{d}t = -\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k\ln(x+k)$.

II

II.A -

II.A.1) On a une famille de polynômes de degrés différents deux à deux, elle est donc libre.
D'autre part, on a $n+1$ polynômes dans un espace vectoriel de degré $n+1$, c'est donc une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

II.A.2) $P_k(X) = \dfrac{1}{k!}\displaystyle\prod_{j=0}^{k-1}(X+j)$, donc :

$$\Delta(P_k)(X) = \frac{1}{k!}\prod_{j=0}^{k-1}(X+1+j) - \frac{1}{k!}\prod_{j=0}^{k-1}(X+j) = \frac{1}{k!}\prod_{j=1}^{k}(X+j) - \frac{1}{k!}\prod_{j=0}^{k-1}(X+j)$$

$$= \left(\frac{1}{k!}\prod_{j=1}^{k-1}(X+j)\right)((X+k)-X) = \frac{1}{(k-1)!}\prod_{j=1}^{k-1}(X+j) = \frac{1}{(k-1)!}\prod_{j=0}^{k-2}(X+1+j)$$

$= P_{k-1}(X+1)$.

D'autre part, $P_0(X)=1$, donc, $\Delta(P_0)(X) = 1-1 = 0$.

II.A.3) À chaque fois qu'on applique Δ, on descend d'un indice, par récurrence très facile, on a donc, pour $m \leqslant k-1$, $\Delta^m(P_k)(X) = P_{k-m}(X+m)$.
Pour $m=k$, $\Delta^m(P_m)(X) = P_0(X+m) = 1$.
Enfin, à partir de ce moment, on aura la fonction nulle, pour $m \geqslant k+1$, $\Delta^m(P_k)(X) = 0$.

II.A.4) Si P est de degré inférieur ou égal à $n-1$, alors, P est combinaison linéaire des P_k, pour k variant de 0 à $n-1$.
On a alors toujours $\Delta^m(P_k)(X) = 0$, et, par linéarité, $\Delta^m(P)(X) = 0$.

II.B -

II.B.1) La vérification initiale est immédiate,

$$\Delta(P)(X) = P(X+1)-P(X) = -P(X)+P(X+1) = \sum_{k=0}^{1}\binom{1}{k}(-1)^{1-k}P(X+k).$$

On admet donc la propriété au rang n, on la montre au rang $n+1$.
Par linéarité,

$$\Delta^{n+1}(P)(X) = \Delta\left(\Delta^n(P)\right)(X) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{n-k}\Delta(P)(X+k)$$

$$= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{n-k}(P(X+1+k)-P(X+k)) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{n-k}P(X+1+k) - \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{n-k}P(X+k)$$

$$= \sum_{k=1}^{n+1}\binom{n}{k-1}(-1)^{n+1-k}P(X+k) - \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{n-k}P(X+k)$$

$$= P(X+n+1) + \sum_{k=1}^{n}\left(\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k}\right)(-1)^{n+1-k}P(X+k) + (-1)^{n+1}P(X)$$

$$= (-1)^{n+1}P(X) + \sum_{k=1}^{n}\binom{n+1}{k}(-1)^{n+1-k}P(X+k) + P(X+n+1) = \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}(-1)^{n+1-k}P(X+k).$$

Ce qui est bien la formule attendue, et termine la récurrence.

II.B.2) On prend $P(X) = X^r$, et, $r \leqslant n-1$, donc, $\Delta^n(P) = 0$.

Ce qui donne immédiatement : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} (X+k)^r = 0$.

On multiplie par $(-1)^n$, et on utilise $(-1)^{-k} = (-1)^k$, pour obtenir : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k (X+k)^r = 0$.

III

III.A -

III.A.1) La seule singularité est en $+\infty$ et la fonction est positive.

$0 \leqslant \dfrac{\mathrm{e}^{-xt}}{t^r}(1-\mathrm{e}^{-t})^n \leqslant \dfrac{\mathrm{e}^{-xt}}{t^r} = \mathrm{e}^{-xt/2}\dfrac{\mathrm{e}^{-xt/2}}{t^r} \leqslant \mathrm{e}^{-xt/2}$, pour t assez grand.

Comme cette dernière fonction a une intégrale convergente en $+\infty$,

l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-xt}}{t^r}(1-\mathrm{e}^{-t})^n \,\mathrm{d}t$ converge.

III.A.2) La fonction est encore positive, et, la singularité est maintenant en 0.

Comme dans la première partie, en 0, $\dfrac{\mathrm{e}^{-xt}}{t^r}(1-\mathrm{e}^{-t})^n \sim \dfrac{1}{t^{r-n}}$, dont l'intégrale converge en 0 si et seulement si $r - n < 1$.

Mais comme ce sont des entiers, ceci équivaut à $r - n \leqslant 0$, c'est à dire $n \geqslant r$.

III.B -

III.B.1) On pose $f(x,t) = \dfrac{\mathrm{e}^{-xt}}{t^r}(1-\mathrm{e}^{-t})^n$

Pour $x \in [c, +\infty[$ et $t \in]0, +\infty[$, on a : $|f(x,t)| \leqslant \dfrac{\mathrm{e}^{-ct}}{t^r}(1-\mathrm{e}^{-t})^n$, qui ne dépend pas de x et dont l'intégrale converge.

Ceci assure la continuité de F_r sur $[c, +\infty[$.

De plus, $\dfrac{\partial f}{\partial x} = -\dfrac{\mathrm{e}^{-xt}}{t^{r-1}}(1-\mathrm{e}^{-t})^n$.

Pour $x \in [c, +\infty[$ et $t \in]0, +\infty[$, on a : $\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}\right| \leqslant \dfrac{\mathrm{e}^{-ct}}{t^{r-1}}(1-\mathrm{e}^{-t})^n$, qui ne dépend pas de x et dont l'intégrale converge.

Ceci assure la classe $\mathscr{C}^1$ de F_r sur $[c, +\infty[$.

De plus, $F_r'(x) = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\partial f}{\partial x} \,\mathrm{d}t = -F_{r-1}(x)$, pour $r \leqslant n$ et $r \geqslant 1$.

Ce qui est aussi $F_{r+1}'(x) = -F_r(x)$ pour $r \leqslant n-1$.

III.B.2) Les résultats de la question précédente sont valables sur la réunion des intervalles $[c, +\infty[$, avec $c > 0$, c'est à dire sur $]0, +\infty[$.

III.C -

III.C.1) Pour $t \geqslant 0$, l'inégalité $0 \leqslant 1 - \mathrm{e}^{-t}$ est évidente.

On considère maintenant $g(t) = t - 1 + \mathrm{e}^{-t}$, on a $g'(t) = 1 - \mathrm{e}^{-t} \geqslant 0$, donc g est croissante.

Comme $g(0) = 0$, g est positive pour $x \geqslant 0$, ce qui est la deuxième inégalité demandée.

III.C.2) Tout d'abord, $F_r(x) > 0$ car c'est l'intégrale d'une fonction continue, positive et non identiquement nulle.

Compte tenu de la majoration précédente, $\dfrac{\mathrm{e}^{-xt}}{t^r}(1-\mathrm{e}^{-t})^n \leqslant \mathrm{e}^{-xt}t^{n-r}$ dont l'intégrale converge en 0, car elle y a une limite finie, et en $+\infty$ par une majoration identique à la première question de cette partie.

Donc : $F_r(x) \leqslant \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xt}t^{n-r} \,\mathrm{d}t$.

On pose maintenant $u = xt$, changement de variable monotone de classe $\mathscr{C}^1$, les intégrales sont de même nature, ici convergentes, et donc égales.

$$F_r(x) \leqslant \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xt} t^{n-r}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u} \frac{u^{n-r}}{x^{n+1-r}}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{x^{n+1-r}} \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-u} u^{n-r}\,\mathrm{d}u.$$

III.C.3) L'intégrale apparaissant dans la majoration ne dépend pas de x, la puissance de x au dénominateur est strictement positive, la limite de $F_r(x)$ en $+\infty$ est donc nulle.

III.D - $G'_{r+1}(x) = \dfrac{(-1)^{r+1}}{r!} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \left(r(x+k)^{r-1} \ln(x+k) + (x+k)^{r-1} \right)$

$$= \frac{(-1)^{r+1}}{(r-1)!} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} (x+k)^{r-1} \ln(x+k) + \frac{(-1)^{r+1}}{r!} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} (x+k)^{r-1}$$

$= -G_r(x) + 0$, en utilisant **II.B.2**, on a bien $r - 1 \geqslant 0$.

On a bien le résultat demandé !

III.E - Il faut d'abord montrer que $F_1(x) = G_1(x)$.

$$F_1(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-xt}}{t} (1 - \mathrm{e}^{-t})^n\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-xt}}{t} \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k \mathrm{e}^{-kt} \right) \mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{1}{t} \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k \mathrm{e}^{-(x+k)t} \right) \mathrm{d}t$$

Remarquons que : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k = (1-1)^n = 0$; donc on a : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k \mathrm{e}^{-t} = 0$.

Ce qui nous donne : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{t} \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k \mathrm{e}^{-t} \right) \mathrm{d}t = 0$.

On enlève cette quantité à $F_1(x)$, et on regroupe les deux intégrales, qui sont bien sûr convergentes !

$$F_1(x) = -\int_0^{+\infty} \frac{1}{t} \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k \left(\mathrm{e}^{-t} - \mathrm{e}^{-(x+k)t} \right) \right) \mathrm{d}t = -\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t} - \mathrm{e}^{-(x+k)t}}{t}\,\mathrm{d}t$$

$$= -\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k \ln(x+k) = G_1(x)$$

On admet l'égalité au rang r, F_{r+1} et G_{r+1} ont donc même dérivée : elles diffèrent d'une constante. Mais comme elles ont la même limite en $+\infty$, elles sont égales.

La récurrence est démontrée.

III.F -

III.F.1) $G_{r+1}(x) = \dfrac{(-1)^{r+1}}{r!} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} (x+k)^r \ln(x+k)$

On utilise maintenant l'égalité : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k (x+k)^r = 0$.

On la multiplie par $\ln(x)$ et on la soustrait à $G_{r+1}(x)$, ceci donne :

$$G_{r+1}(x) = \frac{(-1)^{r+1}}{r!} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} (x+k)^r (\ln(x+k) - \ln(x)) = \frac{(-1)^{r+1}}{r!} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} (x+k)^r \ln\left(1 + \frac{k}{x}\right)$$

III.F.2) $\ln(1+u) = \displaystyle\sum_{j=1}^{r} (-1)^{j+1} \frac{u^j}{j} + \mathrm{o}(u^r)$

On remplace u par $\dfrac{k}{x}$ pour obtenir :

$$G_{r+1}(x) = \frac{(-1)^{r+1}}{r!} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} (x+k)^r \left(\sum_{j=1}^{r} (-1)^{j+1} \frac{k^j}{j x^j} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{x^r}\right) \right)$$

$$= \frac{(-1)^{r+1}}{r!} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} (x+k)^r \left(\sum_{j=1}^{r} (-1)^{j+1} \frac{k^j}{j x^j} \right) + \mathrm{o}(1).$$

La première partie est polynomiale de degré r, qu'on divise par des termes en x^j, de $j=1$ à r. On obtient donc des termes en x^s, pour s variant de $-r$ à $r-1$.

Ce qui donne : $G_{r+1}(x) = \dfrac{(-1)^{r+1}}{r!}\displaystyle\sum_{s=-r}^{r-1} A_s x^s + \mathrm{o}(1) = \dfrac{(-1)^{r+1}}{r!}\displaystyle\sum_{s=0}^{r-1} A_s x^s + \mathrm{o}(1)$

L'existence des coefficient A_s est démontrée, on en cherche maintenant une expression.

$$G_{r+1}(x) = \frac{(-1)^{r+1}}{r!}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\left(\sum_{i=0}^{r}\binom{r}{i}x^i k^{r-i}\right)\left(\sum_{j=1}^{r}(-1)^{j+1}\frac{k^j}{jx^j}\right) + \mathrm{o}(1).$$

Pour avoir le terme en x^s, il faut prendre $i = s + j$.

On obtient alors, avec la convention des coefficients binomiaux « inconnus » nuls :

$$A_s = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\left(\sum_{j=1}^{r}(-1)^{j+1}\frac{k^j}{j}\binom{r}{s+j}k^{r-s-j}\right) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\left(\sum_{j=1}^{r}(-1)^{j+1}\frac{k^{r-s}}{j}\binom{r}{s+j}\right)$$

$$= \left(\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}k^{r-s}\right)\left(\sum_{j=1}^{r}\frac{(-1)^{j+1}}{j}\binom{r}{s+j}\right).$$

III.F.3) Remarquons que, pour $0 \leqslant s \leqslant r-1$, on a : $1 \leqslant r-s \leqslant n-1$ en utilisant $r \leqslant n-1$,ce qui est vérifié quand on considère $G_{r+1}(x)$.

On applique encore le **II.B.2**, avec $r-s$ à la place de r, et, en prenant aussi $X = 0$.

Ce qui donne : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}k^{r-s} = 0$, et donc : $A_s = 0$ pour $s \geqslant 0$.

III.F.4) Finalement : $G_{r+1}(x) = \mathrm{o}(1)$, sa limite en $+\infty$ est bien nulle !

IV

IV.A -

IV.A.1) $P_n(a) = \dfrac{1}{n!}\displaystyle\prod_{j=0}^{n-1}(a+j)$.

Si $n \geqslant |a|+1$, j prend la valeur $-a$, et donc, $P_n(a) = 0$.

Si $n \leqslant |a|$, en posant $p = |a|$,

$$P_n(a) = \frac{1}{n!}\prod_{j=0}^{n-1}(-p+j) = (-1)^n\frac{\prod_{j=0}^{n-1}(p-j)}{n!} = (-1)^n\frac{p!}{n!(p-n)!} = (-1)^n\binom{p}{n}$$

IV.A.2) La série est donc nulle à partir d'un certain rang, donc convergente.

$$\sum_{n=0}^{+\infty}P_n(a)x^n = \sum_{n=0}^{p}(-1)^n\binom{p}{n}x^n = (1-x)^p = (1-x)^{-a}$$

IV.B -

IV.B.1) Dans ce cas, aucun des $P_n(a)$ n'est nul, on peut chercher le rayon de convergence par application du théorème de d'Alembert.

$$\left|\frac{P_{n+1}(a)x^{n+1}}{P_n(a)x^n}\right| = \left|\frac{\prod_{j=0}^{n}(p-j)}{\prod_{j=0}^{n-1}(p-j)}\times\frac{n!}{(n+1)!}\right||x| = \left|\frac{p-n}{n+1}\right||x| = \left|\frac{n-p}{n+1}\right||x|,$$ dont la limite en $+\infty$ est $|x|$.

Le rayon de convergence est donc égal à 1.

IV.B.2) On se place donc sur $]-1,1[$, et on calcule :

$$(-x)S_a'(x) - aS_a(x) = (1-x)\sum_{n=1}^{+\infty} nP_n(a)x^{n-1} - a\sum_{n=0}^{+\infty} P_n(a)x^n$$
$$= \sum_{n=1}^{+\infty} nP_n(a)x^{n-1} - \sum_{n=1}^{+\infty} nP_n(a)x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} aP_n(a)x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} nP_n(a)x^{n-1} - \sum_{n=0}^{+\infty} nP_n(a)x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} aP_n(a)x^n$$
$$= \sum_{n=1}^{+\infty} nP_n(a)x^{n-1} - \sum_{n=0}^{+\infty}(n+a)P_n(a)x^n = \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)P_{n+1}(a)x^n - \sum_{n=0}^{+\infty}(n+a)P_n(a)x^n$$
$$= \sum_{n=0}^{+\infty}\left((n+1)P_{n+1}(a) - (n+a)P_n(a)\right)x^n$$

Calculons maintenant le coefficient de x^n en utilisant $P_{n+1}(a) = \dfrac{a+n}{n+1}P_n(a)$:

$$(n+1)P_{n+1}(a) - (n+a)P_n(a) = \left((n+1)\frac{a+n}{n+1} - (n+a)\right)P_n(a) = 0.$$

S_a vérifie donc bien l'équation différentielle indiquée.

IV.B.3) On résout cette équation différentielle sur $]-1,1[$, qui est un intervalle admissible :

$S_a(x) = K\mathrm{e}^{\int \frac{a}{1-x}\,\mathrm{d}x} = K\mathrm{e}^{-a\ln(1-x)} = K(1-x)^{-a}$.

D'autre part, $S_a(0) = P_0(a) = 1$, donc $K = 1$.

Finalement, sur $]-1,1[$, $S_a(x) = (1-x)^{-a}$.

IV.C -

IV.C.1) $w_n = \ln(u_{n+1}) - \ln(u_n) = \ln\left((n+1)^c\left|\dfrac{n+a}{n+1}\right|\,|P_n(a)|\right) - \ln\left(n^c\,|P_n(a)|\right)$

$$= c\ln(n+1) + \ln\left(1+\frac{a}{n}\right) - \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - c\ln(n) = (c-1)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) + \ln\left(1+\frac{a}{n}\right)$$

On fait un développement limité à l'ordre 2 de w_n, ce qui donne :

$$w_n = \frac{c-1}{n} - \frac{c-1}{2n^2} + \frac{a}{n} - \frac{a^2}{2n^2} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right) = \frac{c-1+a}{n} - \frac{c-1+a^2}{2n^2} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Ceci est le terme général d'une série convergente si et seulement si $c-1+a = 0$.

L'unique valeur de c cherchée est donc $c = 1-a$.

IV.C.2) La convergence de la série des w_n équivaut à la convergence de la *suite* $\ln(u_n)$.

Si on appelle l la limite de cette suite, alors la suite u_n converge vers $L = \mathrm{e}^l > 0$.

Donc, en $+\infty$, $n^c\,|P_n(a)| \to L$, ou, ce qui est la même chose ici, $+\infty$, $n^c\,|P_n(a)| \sim L$,

ce qui entraine : $|P_n(a)| \sim \dfrac{L}{n^c} = \dfrac{L}{n^{1-a}}$.

IV.C.3) On a donc la convergence de la série des $|P_n(a)|$ si et seulement si $1-a > 1$, c'est à dire si et seulement si $a < 0$.

Dans ce cas, S_n est définie sur $[-1,1]$ puisqu'on a convergence absolue en 1 et en -1. D'autre part, comme somme de série entière, elle est aussi continue sur $[-1,1]$.

$x \to (1-x)^{-a}$ est aussi définie et continue sur $[-1,1]$, et ces deux fonctions sont égales sur l'ouvert, donc égales sur $[-1,1]$.

On a donc : $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} P_n(a) = (1-1)^{-a} = 0$, et , $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n P_n(a) = (1-(-1))^{-a} = 2^{-a}$.

Vu la longueur du sujet, certaines démonstrations ont été rédigées succinctement.

À la question **III.F.2**, *il faut aussi supposer $r \leqslant n-1$, ce que l'énoncé ne fait pas clairement.*