I Endomorphisme nilpotent, trace d'un endomorphisme

I.A - Injectivité et valeur propre nulle

I.A.1) f est injectif $\Leftrightarrow \ker(f) = \{0\} \Leftrightarrow \ker(f - 0Id_E) = \{0\} \Leftrightarrow 0$ n'est pas valeur propre de f.

I.A.2) On est ici en dimension finie.
Dans ce cas, pour une application linéaire,
f injectif de E dans $E \Leftrightarrow f \in \mathrm{GL}(E) \Leftrightarrow 0$ n'est pas valeur propre de f.

I.A.3) Pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$,
M est inversible
$\Leftrightarrow M$ est associée dans une certaine base à un automorphisme
$\Leftrightarrow 0$ n'est pas valeur propre de l'endomorphisme associé
$\Leftrightarrow 0$ n'est pas valeur propre de M.

I.B - Matrice nilpotente

I.B.1) On a $N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $N^3 = 0$.

On en déduit que N est nilpotente et que $k(N) = 3$.

I.B.2) *a)* On a $M = P^{-1}NP$ et donc $M^2 = P^{-1}NPP^{-1}NP = P^{-1}N^2P$.
On en déduit que M^2 et N^2 sont semblables, avec la même matrice de passage.
On admet la propriété au rang p, on la montre au rang $p+1$.
On a donc $M^p = P^{-1}N^pP$.
$M^{p+1} = M^pM = P^{-1}N^pPP^{-1}NP = P^{-1}N^{p+1}P$.
La propriété est donc vérifiée au rang $p+1$, elle est donc vraie à tous les rangs.

b) N^p et $P^{-1}N^pP$ sont toutes les deux nulles ou toutes les deux non nulles.
Il en est donc de même pour M^p et N^p. Deux matrices semblables sont donc ou nilpotentes ou non nilpotentes en même temps. Dans le cas ou elles sont nilpotentes, elles ont aussi même indice de nilpotence.

I.B.3) $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(f)$ et $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$ sont semblables. Elles sont donc nilpotentes en même temps avec le même indice de nilpotence.

I.B.4) *a)* $n_{ij}^{(2)} = \displaystyle\sum_{p=1}^{n} n_{ip}n_{pj}$ avec $j \leqslant i+1$.
– Si $j \leqslant p$, alors, $n_{pj} = 0$,
– si $p < j$, alors $p < i+1$, donc $p \leqslant i$, et, $n_{ip} = 0$.
Dans tous les cas $n_{ip}n_{pj} = 0$ et donc $n_{ij}^{(2)} = 0$ quand $j \leqslant i+1$.

b) On montre bien sûr ceci par récurrence sur k.
La vérification initiale pour $k = 0$ est évidente, on l'a aussi pour $k = 1$ et on l'a montré pour $k = 2$.
On l'admet au rang k et on le montre au rang $k+1$.
$n_{ij}^{(k+1)} = \displaystyle\sum_{p=1}^{n} n_{ip}^{(k)}n_{pj}$, avec
– si $j \leqslant p$, alors $n_{pj} = 0$;
– si $p < j$, alors, $p < i+k$, donc, $p \leqslant i+k-1$, alors $n_{ip}^{(k)} = 0$.
On a toujours un des termes du produit qui est nul, donc $n_{ij}^{(k+1)} = 0$.

c) Quand $k \geqslant n$, alors, $i+k-1 \geqslant n$, on a donc toujours $j \leqslant i+k-1$, donc tous les coefficients de N^k sont nuls et $N^k = 0$.

N est bien nilpotente.

I.B.5) *a)* Le déterminant d'une matrice triangulaire étant le produit des termes diagonaux, les valeurs propres de f, qui sont celles de N, sont donc les termes diagonaux de N.

b) Si 0 est la seule valeur propre de f, alors, N vérifie les hypothèses du **I,B,4**), et est donc nilpotente. f est alors nilpotent aussi.

S'il existe une valeur propre non nulle λ, alors il existe un vecteur propre associé u. Un calcul classique par une récurrence enfantine donne $f^p(u) = \lambda^p u \neq 0$. f n'est donc pas nilpotente.

On a bien l'équivalence demandée.

I.B.6) C'est l'équivalence précédente appliquée à l'endomorphisme N de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

I.C - Trace et valeurs propres

I.C.1) On considère deux matrices semblables vérifiant $N = P^{-1}MP$, alors $\mathrm{Tr}(N) = \mathrm{Tr}(P^{-1}MP)$.

On sait que $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$, donc $\mathrm{Tr}(N) = \mathrm{Tr}(MPP^{-1}) = \mathrm{Tr}(MI_n) = \mathrm{Tr}(M)$.

Deux matrices semblables ont bien même trace.

I.C.2) Il existe une base où la matrice de f est N, triangulaire supérieure. Alors $\mathrm{Tr}(f) = \mathrm{Tr}(N)$, c'est à dire la somme de ses éléments diagonaux, ou encore la somme des valeurs propre de N, et donc de celles de f.

I.C.3) On est sur les complexes, le polynôme caractéristique est scindé, et A est semblable à une matrice triangulaire supérieure N.

On a donc soit une valeur propre double λ, nulle puisque $\lambda + \lambda = 0$, soit deux valeurs propres simples, opposées puisque leur somme est nulle, ces deux valeurs propres étant alors non nulles.

– Dans le premier cas, $N = \begin{pmatrix} 0 & k \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et N est nilpotente, donc A est aussi nilpotente.

– Dans le second cas, A est diagonalisable.

Finalement A est soit nilpotente, soit diagonalisable.

I.C.4) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ est de trace nulle, non nilpotente, et non diagonalisable car le sous espace propre associé à la valeur propre 1 est de dimension 1 seulement.

Il suffit pour cela de regarder le rang de $A - I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$, c'est clairement une matrice de rang 2.

II Exponentielle d'un endomorphisme

II.A - Endomorphisme diagonalisable

II.A.1) *a)* $M = \mathcal{M}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} \exp(\lambda_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \exp(\lambda_n) \end{pmatrix}$

b) $\det(M) = \exp(\lambda_1) \times \cdots \times \exp(\lambda_n) \neq 0$, puisqu'une exponentielle n'est jamais nulle.

Donc $f \in \mathsf{GL}(E)$.

II.A.2) On a $D_2 = P_2^{-1}P_1D_1P_1^{-1}P_2 = \left(P_2^{-1}P_1\right)D_1\left(P_2^{-1}P_1\right)^{-1}$

D_1 et D_2 sont donc les matrices d'un même endomorphisme f dans deux bases différentes, la matrice de changement de base étant $P_2^{-1}P_1$. Or, on a admis que $\exp(f)$ ne dépendait pas de la base utilisée pour la définir.

Dans la première base, sa matrice est $\exp(D_1)$, et dans la seconde $\exp(D_2)$.

Ce qui donne $\exp(D_2) = \left(P_2^{-1}P_1\right)\exp(D_1)\left(P_2^{-1}P_1\right)^{-1} = P_2^{-1}P_1\exp(D_1)P_1^{-1}P_2$

Donc $P_2\exp(D_2)P_2^{-1} = P_1\exp(D_1)P_1^{-1}$.

Ceci permet bien de définir $\exp(M)$ avec M diagonalisable, le calcul dépend de la base, mais pas le résultat.

II.B - Endomorphisme nilpotent

II.B.1) M étant strictement triangulaire, puisque ses valeurs propres sont nulles, M^p a des termes diagonaux nuls dès que $p \geqslant 1$.

Les termes diagonaux de $exp(M)$ sont donc ceux de $M^0 = I$, égaux à 1.

II.B.2) Si M est la matrice de f dans une base $\mathcal{B}$, M^p est la matrice de f^p dans cette même base et $\exp(M)$ est la matrice de $\exp(f)$, toujours dans la même base.

$\exp(M)$ possède une valeur propre unique 1, il en est de même pour $\exp(f)$.

II.C - Somme d'endomorphismes diagonalisable et nilpotent

II.C.1) *a)* On va d'abord montrer que $g \circ \exp(d) = \exp(d) \circ g$.

Il suffit de montrer le résultat sur une base, ici une base de vecteurs propres de d.

Il suffit donc de le montrer pour un vecteur propre de d.

Soit u un tel vecteur propre et λ la valeur propre associée.

$g\left(\exp(d)(u)\right) = g(\exp(\lambda)\,u) = \exp(\lambda)\,g(u)$.

D'autre part, $d \circ g = g \circ d$, donc $d(g(u)) = g(d(u)) = g(\lambda\,u) = \lambda\,g(u)$.

Ceci prouve que $g(u)$ est soit nul, soit propre pour d et la valeur propre λ.

Dans tous les cas, $\exp(d)(g(u)) = \exp(\lambda)\,g(u)$.

On a bien montré que $g \circ \exp(d) = \exp(d) \circ g$.

En appliquant p fois cette propriété, y compris si $p = 0$, on a $g^p \circ \exp(d) = \exp(d) \circ g^p$.

Ensuite $\exp(g) \circ \exp(d) = \displaystyle\sum_{p=0}^{k(g)-1} g^p \circ \exp(d) = \sum_{p=0}^{k(g)-1} \exp(d) \circ g^p = \exp(d) \circ \sum_{p=0}^{k(g)-1} g^p$

$= \exp(d) \circ \exp(g)$.

b) Si M est la matrice de f dans une base $\mathcal{B}$, D y est la matrice de d, diagonalisable, et N y est la matrice de g, nilpotent.

$DN = ND$ entraine $d \circ g = g \circ d$ et $M = D + N$ entraine $f = d + g$.

Comme le couple (d, g) est unique, il en est donc de même du couple (D, N).

II.C.2) On a $M = D + N$ avec $DN = ND$.

$PMP^{-1} = PDP^{-1} + PNP^{-1}$ avec PDP^{-1} diagonalisable et PNP^{-1} nilpotente.

De plus $PDP^{-1}PNP^{-1} = PDNP^{-1} = PNDP^{-1} = PNP^{-1}PDP^{-1}$.

Donc PDP^{-1} et PNP^{-1} forment l'unique couple associé à PMP^{-1}.

Ainsi $\exp(PMP^{-1}) = \exp(PDP^{-1})\exp(PNP^{-1}) = P\exp(D)P^{-1}P\exp(N)P^{-1}$

$= P\exp(D)\exp(N)P^{-1} = P\exp(M)P^{-1}$.

III Le cas $n = 2$

III.A - f non diagonalisable

III.A.1) Si $\lambda \neq \mu$, alors, f aurait deux valeurs propres simples et serait diagonalisable.
Comme ça n'est pas le cas, $\lambda = \mu$ et $\dim(E_\lambda) = 1$ car f n'est pas diagonalisable.

Il existe une base où la matrice de f est triangulaire supérieure, égale à $M = \begin{pmatrix} \lambda & k \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$.

$M - \lambda I_2 = \begin{pmatrix} 0 & k \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $(M - \lambda I_2)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

On a bien alors $(f - \lambda Id_E)^2 = 0$.

III.A.2) $(f - \lambda Id_E)(u) = (f - \lambda Id_E)^2(v) = 0$, d'où $u \in E_\lambda$.
D'autre part $u \neq 0$ car $v \notin E_\lambda$
Il suffit maintenant de montrer que la famille (u, v) est libre.
On considère $\alpha u + \beta v = 0$,
on applique $f - \lambda Id_E$ à cette égalité, $\alpha (f - \lambda Id_E)(u) + \beta (f - \lambda Id_E)(v) = 0$.
$(f - \lambda Id_E)(u) = 0$ et $(f - \lambda Id_E)(v) = u$, on obtient donc $\beta u = 0$ et ensuite $\beta = 0$.
L'égalité du départ devient $\alpha u = 0$ et donc $\alpha = 0$.
La famille est libre, (u, v) est une base.

On a $f(u) = \lambda v$ et $f(v) = u + \lambda v$, la matrice de f dans la base (u, v) est donc $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$

III.B - Si M est diagonalisable, elle est semblable à $D(\lambda, \mu)$, ou $D(\lambda, \lambda)$.
Si M n'est pas diagonalisable, on vient de voir qu'elle est semblable à $M(\lambda)$.
Toute matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ est semblable à une matrice de $J_2(\mathbb{C})$.

III.C - Une matrice diagonale D s'écrit $D = D + 0$ avec 0 nilpotente et $D \times 0 = 0 \times D$, c'est donc une matrice de $\Gamma_2(\mathbb{C})$.

$M(a) = D + N$ avec $D = aI_2$, diagonale donc diagonalisable, et $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, nilpotente.

De plus $I_2 N = N I_2 = N$, c'est encore une matrice de $\Gamma_2(\mathbb{C})$.
On a bien $J_2(\mathbb{C}) \subset \Gamma_2(\mathbb{C})$.

III.D - $\Gamma_2(\mathbb{C}) \subset \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ est évident.
Réciproquement, une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ est semblable à une matrice de $J_2(\mathbb{C})$, donc à une matrice de $\Gamma_2(\mathbb{C})$.
Mais une matrice semblable à une matrice de $\Gamma_2(\mathbb{C})$ est une matrice de $\Gamma_2(\mathbb{C})$.
On a bien également $\mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \subset \Gamma_2(\mathbb{C})$.
Finalement, on a bien $\mathcal{M}_2(\mathbb{C}) = \Gamma_2(\mathbb{C})$.

III.E -

III.E.1) $A(\theta)$ est diagonalisable facilement avec $D = \begin{pmatrix} i\theta & 0 \\ 0 & -i\theta \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

On a donc $A(\theta) = PDP^{-1}$.

Puis, $\exp(A(\theta)) = P\exp(D)P^{-1} = P\begin{pmatrix} \exp(i\theta) & 0 \\ 0 & \exp(-i\theta) \end{pmatrix} P^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

III.E.2) Il est clair que $\exp(A(\theta)) = \exp(A(\theta + 2\pi))$, l'exponentielle n'est pas ici injective.

III.E.3) Une matrice de $J_2(\mathbb{C}) \cap \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ est semblable à $D(a, b)$ ou $M(a)$ avec a et b non nuls.
– Si $a = \rho \exp(i\theta)$ et $b = \rho' \exp(i\theta')$, alors $a = \exp(i\theta \ln(\rho))$ et $b = \exp(i\theta' \ln(\rho'))$.

C'est à dire $D(a, b) = \exp\left(\begin{pmatrix} i\theta \ln(\rho) & 0 \\ 0 & i\theta' \ln(\rho') \end{pmatrix}\right)$.

– Comme $a \neq 0$, $M(a)$ est semblable à $\begin{pmatrix} a & a \\ 0 & a \end{pmatrix}$, en remplaçant le premier vecteur de base par $\dfrac{1}{a}$ fois lui-même.

Avec les mêmes notations pour a,

$$\begin{pmatrix} a & a \\ 0 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \exp\left(\begin{pmatrix} i\theta\ln(\rho) & 0 \\ 0 & i\theta\ln(\rho) \end{pmatrix}\right)\exp\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right)$$

$$= \exp\left(\begin{pmatrix} i\theta\ln(\rho) & 0 \\ 0 & i\theta\ln(\rho) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \exp\left(\begin{pmatrix} i\theta\ln(\rho) & 1 \\ 0 & i\theta\ln(\rho) \end{pmatrix}\right)$$

III.E.4) Toute matrice de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ est semblable à une matrice de $J_2(\mathbb{C}) \cap \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$, donc semblable à l'image par l'exponentielle d'un élément de $J_2(\mathbb{C})$.

Soit $M \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$, on a $N = P^{-1}MP \in J_2(\mathbb{C}) \cap \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$.

$N = \exp\left(Q^{-1}BQ\right)$ avec $Q^{-1}BQ \in J_2(\mathbb{C})$ et donc $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$,

donc $M = P\exp\left(Q^{-1}BQ\right)P^{-1} = \exp\left(\left(PQ^{-1}\right)B\left(PQ^{-1}\right)^{-1}\right) = \exp(A)$.

On a bien trouvé une matrice A antécédent de M pour l'exponentielle.

L'exponentielle est bien surjective.

III.F - Soient λ et μ les valeurs propres de M. Celles de $\exp(M)$ sont $\exp(\lambda)$ et $\exp(\mu)$.

$\det(\exp(M)) = \exp(\lambda)\exp(\mu)$, et $\exp(\mathrm{Tr}(M)) = \exp(\lambda+\mu) = \exp(\lambda)\exp(\mu)$.

On a bien l'égalité demandée.

III.G -

III.G.1) Il faut montrer que $SL_2(\mathbb{C})$ est une partie de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$, non vide, stable par produit et passage à l'inverse.

– Une matrice de déterminant 1 est inversible.

– $I_2 \in SL_2(\mathbb{C})$, il est non vide.

– Le déterminant du produit est le produit des déterminants, $SL_2(\mathbb{C})$ est stable par produit.

– Le déterminant de l'inverse est l'inverse du déterminant et $\dfrac{1}{1} = 1$, $SL_2(\mathbb{C})$ est stable par passage à l'inverse.

On a bien un sous-groupe.

Si $M \in L_0(\mathbb{C})$, sa trace est nulle, l'exponentielle de sa trace est 1.

Donc le déterminant de $\exp(M) = 1$, on a bien $\exp(M) \in SL_2(\mathbb{C})$.

III.G.2) Soit $M \in L_0(\mathbb{C})$, elle est soit diagonalisable, soit non diagonalisable.

– Si elle est diagonalisable, les valeurs propres sont opposées,

elle est semblable à $D(a,-a) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -a \end{pmatrix}$

– Si elle est non diagonalisable, la valeur propre est double, donc nulle,

elle est donc semblable à $M(0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

III.G.3) On a bien $\det(N') = 1$, et donc, $N' \in SL_2(\mathbb{C})$.

$\exp(D(a)) = \begin{pmatrix} \exp(a) & 0 \\ 0 & \exp(-a) \end{pmatrix}$, qui n'est pas semblable à N', car celle ci n'est pas diagonalisable.

$\exp(N) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, qui n'est pas semblable à N', car ses valeurs propres sont 1,double, et non -1, double.

$\widetilde{\exp}$ n'est donc pas surjective.

Comme $\exp(D(a)) = \exp(D(a+2i\pi))$, $\widetilde{\exp}$ n'est pas injective non plus.

IV Le cas $n = 3$

IV.A - Si on a trois valeurs propres simples, alors, f est diagonalisable.
De plus, $f = f + 0$, avec 0 nilpotente et $0 \times f = f \times 0$.
On a bien $f \in \Gamma_3(\mathbb{C})$.

IV.B - Une valeur propre triple

IV.B.1) $f - \lambda Id_E$ possède une unique valeur propre nulle, elle est donc nilpotente.

IV.B.2) $f = \lambda Id_E + (f - \lambda Id_E)$ avec $(\lambda Id_E) \times (f - \lambda Id_E) = (f - \lambda Id_E) \times (\lambda Id_E)$.
On a bien $f \in \Gamma_3(\mathbb{C})$.

IV.C - Une valeur propre double et une simple

IV.C.1) On sait qu'il existe une base où la matrice de f est triangulaire supérieure, c'est à dire une base où sa matrice est $\begin{pmatrix} \lambda & a & b \\ 0 & \lambda & c \\ 0 & 0 & \nu \end{pmatrix}$.
On appelle (e_1, e_2, e_3) les vecteurs de cette base,
les colonnes de la matrice donnent alors $\begin{cases} f(e_1) = \lambda e_1 \\ f(e_2) = ae_1 + \lambda e_2 \\ f(e_3) = be_1 + ce_2 + \nu e_3 \end{cases}$

IV.C.2) Le déterminant de (e_1, e_2, e_3') dans la base (e_1, e_2, e_3) est $\begin{vmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & \beta \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$.
On a bien une nouvelle base de E.

IV.C.3) $f\left(e_3'\right) = f(e_3) + \alpha f(e_1) + \beta f(e_2) = \nu e_3 + be_1 + ce_2 + \alpha\lambda e_1 + \beta a e_1 + \beta\lambda e_2$
$= \nu(e_3 + \alpha e_1 + \beta e_2) + (b + \alpha\lambda + \beta a - \alpha\nu)e_1 + (c + \beta\lambda - \beta\nu)e_2$.
e_3' sera propre pour la valeur propre ν si et seulement si $\alpha(\lambda - \nu) + \beta c + b = 0$ et $\beta(\lambda - \mu) + c = 0$.
Comme $\lambda - \nu \neq 0$, on trouve β qui convient dans la deuxième équation puis α dans la première.

IV.C.4) Dans cette base (e_1, e_2, e_3'), la matrice de f est $M = \begin{pmatrix} \lambda & a & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \nu \end{pmatrix}$.

IV.C.5) On a $M = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \nu \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
La première matrice est diagonalisable et la seconde nilpotente !
De plus, par un calcul simple, $\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \nu \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \nu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
On a donc $M \in \Gamma_3(\mathbb{C})$, et donc, $f \in \Gamma_3(E)$.

IV.D - On est sur $\mathbb{C}$, le polynôme caractéristique de f est scindé, et on a trois cas pour les valeurs propres : une triple, une double et une simple, trois simples.
Dans tous les cas, on a montré que $f \in \Gamma_3(E)$, donc $f \in \Gamma_3(E)$.

IV.E - Un exemple

IV.E.1) $R(\theta)$ est diagonalisable facilement avec $D = \begin{pmatrix} i\theta & 0 & 0 \\ 0 & -i\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} i & -i & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
On a donc $R(\theta) = PDP^{-1}$.

Puis, $\exp(R(\theta)) = P\exp(D)P^{-1} = P\begin{pmatrix} \exp(i\theta) & 0 & 0 \\ 0 & \exp(-i\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

IV.E.2) Clairement, $\exp(R(\theta)) = \exp(R(\theta + 2\pi))$.
L'application $\exp$ n'est pas injective.