I Existence et unicité de la solution

I.A - Unicité

I.A.1) Soit $x \in I$

a) Soit $x \in I$, alors $x+1 \in I$ car $f(x+1) = \varphi(x) - f(x)$. Ceci est la vérification initiale.
De même, si $x+n \in I$, on a $x+n+1 \in I$ en appliquant la même propriété à $x+n$.
La propriété est donc vraie pour tout n de $\mathbb{N}$.

b) On montre encore ce résultat par récurrence sur n.
La propriété est évidente pour $n = 0$.
Pour $n = 1$, il suffit de soustraire membre à membre les deux égalités $f(x+1)+f(x) = \varphi(x)$ et $g(x+1)+g(x) = \varphi(x)$, ce qui donne $f(x+1)+f(x)-g(x+1)-g(x) = 0$, ou encore $f(x) = g(x) - (f(x+1) - g(x+1))$
On admet donc la propriété jusqu'au rang n et on calcule
$g(x) + (-1)^{n+1}(f(x+n+1) - g(x+n+1)) = g(x) + (-1)^{n+1}(-f(x+n) + g(x+n))$
$= g(x) + (-1)^n(f(x+n) - g(x+n)) = f(x)$
La propriété est donc vraie pour tout n de $\mathbb{N}$.

I.A.2) f et g sont solution de (1), donc $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x+n) = \lim\limits_{n\to+\infty} g(x+n) = 0$
et, par passage à la limite dans la dernière relation démontrée, $\forall x \in I,\ f(x) = g(x)$, ou encore, $f = g$.

I.B - Existence

I.B.1) Soit $x \in I$
Comme φ décroit et tend vers 0 à l'infini, la série de terme général $(-1)^k\varphi(x+k)$ est alternée et vérifie le critère spécial. Elle converge donc.

I.B.2) On pose $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty}(-1)^k\varphi(x+k)$

a) On a donc $f(x+1) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty}(-1)^k\varphi(x+k+1) = -\sum\limits_{k'=1}^{+\infty}(-1)^{k'}\varphi(x+k') = -f(x)+\varphi(x)$, ceci pour tout x de I.

b) $f(x)$ est la somme d'une série alternée répondant au critère spécial dont le premier terme est positif.
$R_0(x)$ est du signe de $(-1)^1 f(x+1)$, donc négatif.
$R_1(x)$ est du signe de $(-1)^2 f(x+2)$, donc positif.
Compte tenu de ces signes, l'égalité $\varphi(x) - \varphi(x+1) + R_1(x) = f(x) = \varphi(x) + R_0(x)$ entraine alors $\varphi(x) - \varphi(x+1) \leqslant f(x) \leqslant \varphi(x)$

c) Comme la limite de φ est nulle à l'infini, il en est de même, par encadrement, pour celle de f.

.

II Premier exemple

II.A - Étude d'une application linéaire

II.A.1) θ est clairement de $\mathbb{R}[X]$ dans $\mathbb{R}[X]$.
$\theta(\lambda P+\mu Q)(X) = \frac{1}{e}(\lambda P+\mu Q)(X+1)+(\lambda P+\mu Q)(X) = \frac{1}{e}\lambda P(X+1)+\frac{1}{e}\mu Q(X+1)+\lambda P(X)+\mu Q(X)$
$= \lambda(\frac{1}{e}P(X+1) + P(X)) + \mu(\frac{1}{e}Q(X+1) + Q(X)) = \lambda\theta(P)(X) + \mu\theta(Q)(X)$
θ est donc aussi linéaire, c'est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.

II.A.2) Pour $P \neq 0$, le terme de plus haut degré de $P(X+1)$ est celui de $P(X)$, celui de $\theta(P)(X)$ est donc $\dfrac{1}{e}+1$ celui de $P(X)$.

De plus, θ est linéaire, donc $\theta(0)=0$.

Ce coefficient étant non nul, θ conserve bien le degré.

II.A.3) Le noyau de θ est donc formé de polynômes de même degré que le polynôme nul, il est donc réduit au polynôme nul.

θ est bien injective.

II.A.4) La restriction de θ à $\mathbb{R}_n[X]$ reste bien sûr linéaire, son image est incluse dans $\mathbb{R}_n[X]$ par conservation du degré, elle induit donc bien un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

II.A.5) θ_n est un endomorphisme injectif en dimension finie, c'est donc un automorphisme.

θ_n est bien bijectif.

II.A.6) Tout polynôme Q de $\mathbb{R}_n[X]$ possède donc un antécédent par θ_n, donc par θ.

Cet antécédent est unique par injectivité de θ.

P tel que $\dfrac{1}{e}P(X+1)+P(x)=Q(x)$ existe donc bien et est unique.

II.A.7) Soit P tels que $\theta(P)=Q$, alors

$$P(x+1)\exp(-(x+1))+P(x)\exp(-x)=\frac{1}{e}P(x+1)\exp(-x)+P(x)\exp(-x)$$

$$=\left(\frac{1}{e}P(x+1)+P(x)\right)\exp(-x)=Q(x)\exp(-x)$$

Si φ a la forme voulue, on a bien trouvé la solution de (1).

II.B - Exemple

II.B.1) Soit $n\in\mathbb{N}^*$

a) On dérive la relation $\dfrac{1}{e}P_n(X+1)+P_n(X)=X^n$, avec $n\geqslant 1$,

on obtient $\dfrac{1}{e}P_n'(X+1)+P_n'(X)=nX^{n-1}$.

$\dfrac{1}{n}P_n'$ est donc solution de (1) avec φ qui est X^{n-1}, c'est donc P_{n-1}.

b) Par une récurrence très facile, on a, pour $n\geqslant k$, $P_n^{(k)}=n(n-1)\cdots(n-k+1)P_{n-k}$.

II.B.2) Comme la dérivée d'ordre $n+1$ d'un polynôme de degré au plus n est nulle, la formule de Taylor avec reste intégrable appliquée entre X et $X+1$ donne

$$P_n(X+1)=\sum_{k=0}^{n}\frac{P_n^{(k)}(X)}{k!}=\sum_{k=0}^{n}\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}P_{n-k}(X)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}P_{n-k}(X).$$

II.B.3) $X^n=\dfrac{1}{e}P_n(X+1)+P_n(x)=\dfrac{1}{e}\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}P_{n-k}(X)+P_n(x)=\dfrac{1}{e}\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}P_{n-k}(X)+\left(\dfrac{1}{e}+1\right)P_n(x)$

$$=\frac{1}{e}\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}P_{n-k}(X)+\frac{e+1}{e}P_n(x)=X^n$$

On isole maintenant $P_n(X)$, ce qui donne : $P_n(X)=\dfrac{e}{e+1}X^n-\dfrac{1}{e+1}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}P_{n-k}(X)$.

II.B.4) **Remarque 1** *Encore une fois, l'algorithme sera très différent selon le langage utilisé ! En Pascal ou en Maple, ce sera très différent…*

Dans un langage récursif ayant une fonction *somme*, on a simplement besoin de tableaux de polynômes et de P_0

P_0 est constant k, et vérifie $\dfrac{1}{e}k+k=1$, il vaut donc $\dfrac{e}{e+1}$.

On décrit ici un algorithme dans un langage proche de Maple.

```
Procédure Poly(n)

si n=0
  alors P=e/(e+1)
  sinon
    P:=e/(e+1)*X^n-1/(e+1)*somme(binomial(n,k)*Poly(n-k),k variant de 1 à n)
fin du si

retourner P

fin de la procédure
```

III Deuxième exemple

III.A - Écriture intégrale de la solution

III.A.1) L'intégrale définissant f présente une singularité en 0 car $t \to \dfrac{t^x}{1+t}$ est définie et continue sur $]0,1]$.
Cette fonction est positive, on peut donc travailler par équivalence.
L'équivalent le plus simple en 0 est $t^x = \dfrac{1}{t^{-x}}$,
dont l'intégrale converge en 0 si et seulement si $-x < 1$, ou encore, $x > -1$,
ce qui est le cas sur I.

III.A.2) f est bien définie sur I.
$f(x+1) + f(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^{x+1}}{t+1}\,\mathrm{d}t + \int_0^1 \frac{t^x}{t+1}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 t^x\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x+1}$.

III.A.3) On a clairement $f(x) \geqslant 0$, ce qui est aussi vrai pour $f(x+1)$.
On a donc $0 \leqslant f(x) \leqslant f(x+1) + f(x) = \dfrac{1}{x+1}$.

III.A.4) Les résultats précédents prouvent que $\forall x \in I,\ f(x+1) + f(x) = \varphi(x)$,
et que la limite de f en $+\infty$ est 0.
f est donc bien solution de (1).

III.B - Calcul de quelques valeurs et équivalents

III.B.1) Ceci est une conséquence directe du **I.B.2)**.

III.B.2) On a donc $f(0) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} = \sum_{k'=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k'\pm 1}}{k'} = \int_0^1 \frac{1}{t+1}\,\mathrm{d}t = \ln 2$, en posant $k' = k+1$.

III.B.3) Cette fois ci, $f(n) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{n+k+1} = \sum_{k'=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k'-n-1}}{k'}$, en posant $k' = k+n+1$.

III.B.4) *a)* $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{x+k+1}$ est alternée répondant au critère spécial.

Donc $|R_N| \leqslant |u_{N+1}|$, ce qui donne ici $|R_n| = \left| f(x) - \displaystyle\sum_{k=0}^{N} \frac{(-1)^k}{x+k+1} \right| \leqslant \frac{1}{x+N+2}$.

b) Il suffit d'avoir $\dfrac{1}{x+N+2} \leqslant \varepsilon$, c'est à dire $N \geqslant \dfrac{1}{\varepsilon} - x - 2$.
N'oublions pas que N doit être positif !
Si on a une fonction `somme`, il est inutile de faire une procédure. . .

```
N:=Max(Ent(1/epsilon)-x-1,0)
R:=somme((-1)^k/(x+k+1),k variant de 0 à N)
```

c) $x = 1,5$, $\varepsilon = 10^{-1}$, alors, $N = 8$ convient.
On obtient $0,28$ comme valeur approchée à 10^{-1} près.

Remarque 2 *La valeur exacte est* $\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{4}{3}$, *ou encore environ* $0,23746...$

III.B.5) $t \in]0,1]$, $x \leqslant y$ donne $t^x \geqslant t^y$, puis $\dfrac{t^x}{1+t} \geqslant \dfrac{t^y}{1+t}$, et enfin $f(x) \geqslant f(y)$.
f est décroissante sur I.

III.B.6) $\dfrac{1}{x+1} = f(x+1) + f(x) \leqslant 2f(x)$ donne $f(x) \geqslant \dfrac{1}{2(x+1)}$, pour $x \in I$.
$\dfrac{1}{x+1} = f(x) + f(x+1) \geqslant 2f(x+1)$ donne $f(x+1) \leqslant \dfrac{1}{2(x+1)}$,
ou encore, pour $x > 0$, $f(x) \leqslant \dfrac{1}{2x}$.

III.B.7) Le résultat précédent nous donne facilement $f(x) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2x}$.
$\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k} = (-1)^{n+1} f(n)$.
Donc $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k} \underset{+\infty}{\sim} \frac{(-1)^{n+1}}{2n}$.

III.B.8) $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k} = (-1)^{n+1} f(n)$,
donc la série de terme général $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k}$ est alternée, répondant au critère spécial.
Elle converge donc.

III.C - Étude de la fonction f

III.C.1) On va montrer que f est continue sur $[a, +\infty[$, avec $a > -1$.
$t \in]0,1]$ et $x \geqslant a$ donnent $0 \leqslant t^x \leqslant t^a$ et finalement $0 \leqslant \dfrac{t^x}{1+t} \leqslant \dfrac{t^a}{1+t}$.
$(x,t) \to \dfrac{t^x}{1+t}$ est continue sur $[a, +\infty[\times]0,1]$ et $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^a}{1+t}\,\mathrm{d}t$ converge.
Ce qui prouve que f est continue sur $[a, +\infty[$.
Par réunion de ces intervalles, f est continue sur $]-1, +\infty[$.

III.C.2) On a $f(x) = \dfrac{1}{x+1} - f(x+1) \xrightarrow[x \to -1^+]{} +\infty$, car $f(0) = \ln 2$.
Ceci entraine aussi, une limite étant finie et l'autre infinie, $f(x) \underset{-1^+}{\sim} \dfrac{1}{x+1}$.

III.C.3) *a)* L'unique singularité est bien en 0.
$\left|t^x (\ln t)^k\right| = \left|t^{\frac{1+x}{2}} (\ln t)^k\right| t^{\frac{x-1}{2}}$.
La limite en 0 de $|t^{\frac{1+x}{2}} (\ln t)^k|$ est nulle par croissances comparées, puisque $\dfrac{1+x}{2} > 0$.
Donc, pour t assez petit, $\left|t^x (\ln t)^k\right| \leqslant t^{\frac{x-1}{2}} = \dfrac{1}{t^{\frac{1-x}{2}}}$.
Mais $\dfrac{1-x}{2} < 1$, donc $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t^{\frac{1-x}{2}}}\,\mathrm{d}t$ converge.

Finalement $\displaystyle\int_0^1 \left|t^x(\ln t)^k\right| \mathrm{d}t$ converge,
la fonction $t \to t^x(\ln t)^k$ est bien intégrable sur $]0,1]$.

b) On va faire une intégration par partie dans les intégrales généralisées, en intégrant t^x et en dérivant $(\ln t)^k$.
La limite en 0 de $\dfrac{t^{x+1}}{x+1}(\ln t)^k$ est nulle, donc finie, car $x+1>0$.
Les deux intégrales vont donc être de même nature, ici convergentes, et on aura l'égalité habituelle...
On prend ici $k \geqslant 1$, le crochet sera donc nul aussi en 1.
Finalement, on a $\displaystyle\int_0^1 t^x(\ln t)^k \,\mathrm{d}t = 0 - \int_0^1 \frac{t^{x+1}}{x+1}\,\frac{k(\ln t)^{k-1}}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{-k}{x+1}\int_0^1 t^x(\ln t)^{k-1}\,\mathrm{d}t.$
La relation de récurrence pour $k \geqslant 1$ est donc $I_k(x) = \dfrac{-k}{x+1} I_{k-1}(x)$.
Et pour $k \in \mathbb{N}$, on a $I_{k+1}(x) = \dfrac{-(k+1)}{x+1} I_k(x)$.
Une récurrence facile nous donne $I_k(x) = (-1)^k \dfrac{k!}{(x+1)^k} I_0(x)$.
Or $I_0(x) = \displaystyle\int_0^1 t^x \,\mathrm{d}t = \frac{1}{x+1}$, donc, $I_k(x) = (-1)^k \dfrac{k!}{(x+1)^{k+1}}$ pour $k \in \mathbb{N}$.

III.C.4) *a)* $\left|\dfrac{(\ln t)^k}{1+t} t^x\right| \underset{t\to 0^+}{\sim} \left|t^x(\ln t)^k\right|$,
en utilisant le III.C.3.a), on a l'intégrabilité de $\varphi_k(t,x)$ par rapport à t sur $]0,1]$.

b) φ_0 est clairement $\mathscr{C}^\infty$ sur $]0,1]\times]-1,+\infty[$.
On va d'abord montrer que f est $\mathscr{C}^\infty$ sur $[a,+\infty]$ avec $a>-1$.
Pour cela, il suffit de majorer en valeur absolue $\dfrac{\partial^k \varphi_0}{\partial x^k}$ par une fonction ne dépendant pas de x et intégrable sur $]0,1]$.
On calcule facilement $\dfrac{\partial^k \varphi_0}{\partial x^k} = \dfrac{(\ln t)^k}{1+t} t^x$,
donc, $\left|\dfrac{\partial^k \varphi_0}{\partial x^k}\right| \leqslant \left|\dfrac{(\ln t)^k}{1+t} t^a\right|$, sur $]0,1]\times[a,+\infty[$.
Cette dernière fonction est bien intégrable sur $]0,1]$.
Ceci assure que f est $\mathscr{C}^\infty$ sur $[a,+\infty[$, et que $f^{(k)}(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{\partial^k \varphi_0}{\partial x^k}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{(\ln t)^k}{1+t} t^x \,\mathrm{d}t.$
Par réunion des intervalles du type $[a,+\infty]$ avec $a>-1$, on a la propriété sur $]-1,+\infty[$.

III.C.5) *a)* $\left|f^{(k)}(x)\right| = \displaystyle\int_0^1 \left|\frac{(\ln t)^k}{1+t} t^x\right| \mathrm{d}t$, car la fonction est de signe constant.
$$\int_0^1 \left|\frac{(\ln t)^k}{1+t} t^x\right| \mathrm{d}t \leqslant \int_0^1 \left|(\ln t)^k t^x\right| \mathrm{d}t = \left|\int_0^1 (\ln t)^k t^x \,\mathrm{d}t\right| = |I_k(x)|,$$
car la fonction est aussi de signe constant !
Finalement, $\left|f^{(k)}(x)\right| \leqslant \dfrac{k!}{(x+1)^k} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.
On a bien la limite nulle demandée.

b) Notons d'abord que $f^{(k)}(x+1) + f^{(k)}(x) = \dfrac{(-1)^k\, k!}{(x+1)^k}$,
formule qui se montre facilement par récurrence sur les dérivées de φ.
$$\sum_{j=0}^N (-1)^j \left(f^{(k)}(x+j+1) + f^{(k)}(x+j)\right) = \sum_{j=0}^N (-1)^j \frac{(-1)^k\, k!}{(x+j+1)^k} = (-1)^k\, k! \sum_{j=0}^N \frac{(-1)^j}{(x+j+1)^k}$$

Cette dernière expression est la somme partielle d'une série alternée répondant au critère spécial, elle a donc une limite finie quand $N \to +\infty$.

Notons aussi que $\displaystyle\sum_{j=0}^{N}(-1)^j\left(f^{(k)}(x+j+1)+f^{(k)}(x+j)\right)=(-1)^N f^{(k)}(x+N+1)+f^{(k)}(x)$.

On passe donc à la limite quand $N \to +\infty$,

et on obtient $\displaystyle f^{(k)}(x)=(-1)^k\,k!\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{(-1)^j}{(x+j+1)^k}$

III.C.6) *a)* h est 2π périodique, de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux, donc sa série de Fourier converge. Comme, de plus, h est continue, elle est égale à la somme de sa série de Fourier.
Celle ci se calcule facilement, $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ b_n = 0$, car h est paire.

$\displaystyle a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}h(t)\,\mathrm{d}t=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}t\,\mathrm{d}t=\frac{\pi}{2}.$

$\displaystyle \forall n\in\mathbb{N}^*,\ a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}h(t)\cos(nt)\,\mathrm{d}t==\frac{2}{\pi}\left(\left[t\frac{\sin(nt)}{n}\right]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}\frac{\sin(nt)}{n}\,\mathrm{d}t\right)=\frac{-2}{\pi}\left(\frac{1-(-1)^n}{n^2}\right)$

Donc, pour n pair, $n=2p$, $a_{2p}=0$, et pour n impair, $n=2p+1$, $\displaystyle a_{2p+1}=\frac{-4}{(2p+1)^2\pi}$.

Ce qui donne $\displaystyle \forall t\in\mathbb{R},\ h(t)=\frac{\pi}{2}+\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{-4}{(2p+1)^2\pi}\cos((2p+1)t)$.

b) On applique cette égalité pour $t=0$, et on obtient $\displaystyle 0=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{(2p+1)^2}$.

Finalement, $\displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{(2p+1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$.

c) La question **III.C.5**) nous donne $\displaystyle f'(0)=-\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{(-1)^j}{(j+1)^2}=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k^2}$.

$\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2}$ est absolument convergente. Les sous-séries convergent et on peut donc séparer les termes de rang pair et ceux de rang impair.

$\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2}=\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{4p^2}+\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{1}{(2p+1)^2}=\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2}+\frac{\pi^2}{8}.$

On obtient donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2}=\frac{\pi^2}{6}$.

On calcule maintenant $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^2}-\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k^2}=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1-(-1)^k}{k^2}=\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{2}{(2p+1)^2}$,

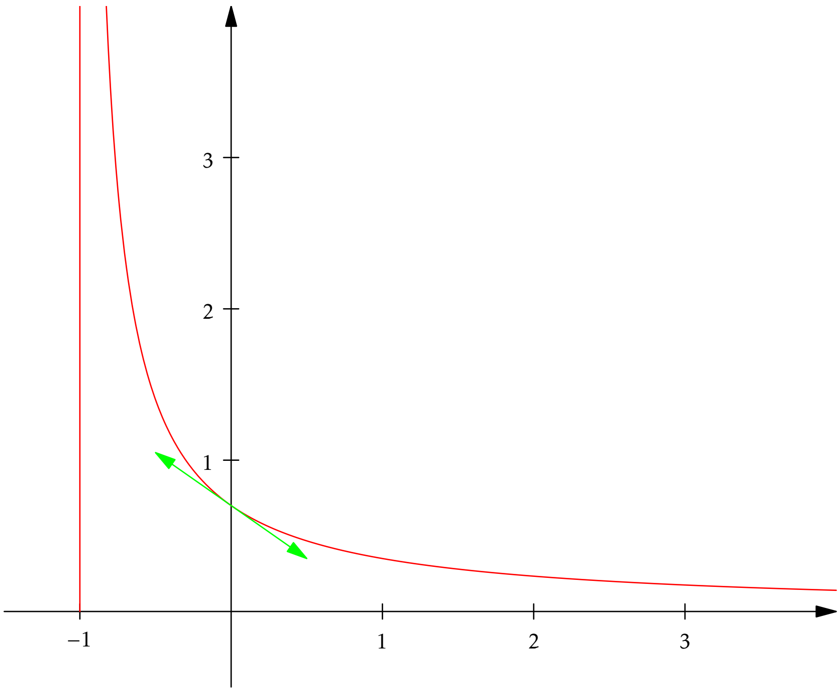
car les termes de rang pair sont nuls.

Ce qui donne $\displaystyle\frac{\pi^2}{6}-\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k^2}=\frac{\pi^2}{4}$, donc, $\displaystyle f'(0)=\frac{\pi^2}{6}-\frac{\pi^2}{4}=\frac{-\pi^2}{12}$.

III.C.7) On a une asymptote verticale en $x = -1$, horizontale quand $x \to +\infty$.

La fonction est décroissante, vaut $\ln 2$ en 0, avec une tangente de pente $\dfrac{-\pi^2}{12}$.

L'allure générale est donc :



III.C.8) *a)* $\dfrac{\left|f^{(n)}(0)\right|}{n!} = \displaystyle\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{(-1)^j}{(j+1)^{n+j}}$, en effet, cette série est alternée répondant au critère spécial et son premier terme est positif.

La somme de cette série est donc encadrée par deux termes consécutifs de la suite des sommes partielles ;

– majorée par la suite des sommes partielles au rang 0, qui vaut 1 ;

– minorée par la suite des sommes partielles au rang 1, qui vaut $1 - \dfrac{1}{2^{n+1}}$, lui même minoré par $1 - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$.

On a donc bien $\dfrac{n!}{2} \leqslant \left|f^{(n)}(0)\right| \leqslant n!$.

b) On a donc une série entière avec des coefficients compris entre $\dfrac{1}{2}$ et 1,

– pour $|x| < 1$, cette série converge, donc $R \geqslant 1$;

– pour $|x| > 1$, cette série diverge, donc $R \leqslant 1$.

Le rayon de convergence est 1.