Épreuve : MATHÉMATIQUES II — Filière TSI

Calculatrices autorisées

L'espace $E = \mathbb{R}^3$ est muni de sa structure euclidienne canonique, la base canonique de E, notée $\mathscr{B}_c = (e_1, e_2, e_3)$, étant orthonormale. $L(E)$ désigne l'ensemble des endomorphismes de E.

Les parties II, III et IV sont indépendantes entre elles.

Partie I -

Dans toute cette partie, on étudie des endomorphismes de E qui admettent une seule droite (vectorielle) stable et un seul plan (vectoriel) stable.

Rappel : un sous-espace F de E est stable par un endomorphisme f si $f(F) \subset F$.

I.A - Soit $f \in L(E)$. Soit $a \in E$ un vecteur non nul de E et $D = Vect(a)$, la droite vectorielle de vecteur directeur a.

I.A.1) Montrer que D est stable par f si et seulement si a est vecteur propre de f.

I.A.2) En déduire que tout endomorphisme f de E admet au moins une droite stable.

I.A.3) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Le résultat précédent reste-t-il vrai dans $\mathbb{R}^n$, quel que soit n ?

I.B - Soit $f \in L(E)$ et P un plan stable par f. On note $\widetilde{f}$ l'endomorphisme de P induit par f sur P, défini par $\widetilde{f}(x) = f(x)$ pour tout $x \in P$.

I.B.1) Montrer que le polynôme caractéristique de $\widetilde{f}$ divise celui de f.

I.B.2) Montrer que si $\widetilde{f}$ possède une droite stable, alors f possède au moins deux droites stables en général, sauf dans un cas particulier que l'on précisera.

I.C - Soit F un espace vectoriel réel de dimension 2 et $g \in L(F)$. On suppose que g ne possède pas de valeur propre réelle et on note M la matrice de g dans une base de F.

I.C.1) Soit g' l'endomorphisme de $\mathbb{C}^2$ de matrice M dans la base canonique de $\mathbb{C}^2$. Montrer qu'il existe un vecteur non nul de $\mathbb{C}^2$, $\varepsilon_1 = (a, b)$ et $\alpha \in \mathbb{C}$, $\alpha \notin \mathbb{R}$ vérifiant : $g'(\varepsilon_1) = \alpha\varepsilon_1$ et $g'(\overline{\varepsilon_1}) = \overline{\alpha} \times \overline{\varepsilon_1}$ où $\overline{\varepsilon_1} = (\overline{a}, \overline{b})$.

I.C.2) Montrer que $(\varepsilon_1 + \overline{\varepsilon}_1, \varepsilon_1 - \overline{\varepsilon}_1)$ est une base de $\mathbb{C}^2$. Quelle est la matrice de g' dans cette base ?

I.C.3) Montrer qu'il existe $Q \in \mathscr{M}_2(\mathbb{C})$ inversible et $(X, Y) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^*$, tels que :

$$M = Q \begin{pmatrix} X & -Y \\ Y & X \end{pmatrix} Q^{-1}.$$

On ***admettra*** que de la même manière :

il existe $Q \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ inversible et $(X, Y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ tels que :

$$M = Q \begin{pmatrix} X & -Y \\ Y & X \end{pmatrix} Q^{-1}.$$

I.D -

I.D.1) Soit $f \in L(E)$ admettant un seul plan stable et une seule droite stable non incluse dans ce plan. Montrer qu'il existe une base de E où la matrice de f s'écrit :

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & X & -Y \\ 0 & Y & X \end{pmatrix}, \text{ avec } (\lambda, X, Y) \in \mathbb{R}^3, Y \neq 0.$$

I.D.2) Soit $f \in L(E)$ de matrice M dans la base canonique $\mathscr{B}_c$ de E.
Soit P un plan d'équation $ax + by + cz = 0$ dans cette base, $n = (a, b, c)$ étant un vecteur non nul de E.

$$\text{On note } n' = (a', b', c') \text{ avec } \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix} = {}^tM \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}.$$

Montrer que, si P est stable par f, pour tout u élément de P, n' est orthogonal à u.
En déduire que P est stable par f si et seulement si n' est vecteur propre de l'endomorphisme de matrice ${}^tM$ dans $\mathscr{B}_c$.

I.D.3) Soit $f \in L(E)$. Montrer l'équivalence des trois propositions suivantes :

i) f admet une unique droite stable.

ii) f admet un unique plan stable.

iii) Le polynôme caractéristique de f admet une seule racine réelle soit simple, soit triple et le sous-espace propre associé est de dimension 1.

- version du 28 janvier 2010 8h55

Partie II -

II.A - Soit $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ a & b & c \end{pmatrix}$ avec a, b, c réels.

II.A.1) Déterminer le polynôme caractéristique de M.

II.A.2) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, une valeur propre de M. Déterminer l'espace propre attaché à cette valeur propre. Préciser en particulier sa dimension.

II.A.3) Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur son polynôme caractéristique pour que M soit diagonalisable.

II.A.4) Soit $f \in L(E)$ de matrice M dans $\mathscr{B}_c$. A quelle condition f admet-elle une droite stable et une seule ?

II.B - Étude d'un exemple :

Soit f de matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ t^3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ avec $t \in \mathbb{R}$.

II.B.1) Montrer que f possède un unique plan stable noté P_t et une unique droite stable notée D_t que l'on déterminera.

II.B.2) Montrer que Δ, réunion de toutes les droites D_t, $t \in \mathbb{R}$, est incluse dans la surface Σ d'équation $y^2 = xz$. Quelle est la nature de la surface Σ ? Déterminer l'ensemble $\Sigma \setminus \Delta$, complémentaire de Δ dans Σ.

II.B.3) Tracer la courbe intersection de (Σ) et du plan d'équation $z = 1$. En déduire une représentation de (Σ).

II.C - On considère la surface (S_1) d'équation $y^2 = 4xz$.

II.C.1) Déterminer la nature de (S_1) et l'équation du plan tangent en tout point $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$ de la surface. Vérifier que ce plan contient toujours le point $(0,0,0)$.

II.C.2) Montrer que si $x_0 \neq 0$, il existe un réel t tel que le plan tangent en M_0 à (S_1) soit P_t.

II.D - On cherche ici des surfaces de $\mathbb{R}^3$ possédant la même propriété que (S_1).

Soit f une application de classe C^2 définie sur U ouvert de $\mathbb{R}^2$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et soit S_f la surface d'équation $z = f(x, y)$.

II.D.1) Écrire l'équation du plan tangent en un point quelconque M_0 de S_f, le point M_0 ayant pour coordonnées x_0, y_0 et $z_0 = f(x_0, y_0)$.

II.D.2) Écrire les conditions portant sur f et ses dérivées premières pour qu'en tout point le plan tangent soit un des plans de la famille $(P_t)_{t \in \mathbb{R}}$.

II.D.3) On note, pour x fixé, $u : y \longmapsto f(x, y)$.

Montrer qu'on a alors : $u''(y)(y - 2xu'(y)) = 0$.

II.D.4) On suppose ici $U = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$.

Déterminer les fonctions f telles qu'en tout point (x, y) de U,

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{y}{2x}.$$

II.D.5) Déterminer les surfaces correspondant à cette condition.

Partie III -

On considère dans cette partie l'endomorphisme g_r de E défini pour tout r de $\mathbb{R}$, non nul, par sa matrice $B(r)$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

On donne $B(r) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ r^2 & 0 & -r \\ r & r & 0 \end{pmatrix}$.

III.A - Déterminer le polynôme caractéristique de g_r. Déterminer ses éléments propres.

III.B - On note, pour tout $r \in \mathbb{R}$, Δ_r l'unique espace propre de g_r.

Soit Γ l'intersection de l'ensemble des droites Δ_r avec le plan d'équation $z = 1$.

III.B.1) Montrer qu'une représentation paramétrique de Γ est :

$$x = \frac{r^2 + 4}{r(2 + r^2)}, \quad y = \frac{r}{r^2 + 2}.$$

III.B.2) Soit Γ' l'ensemble d'équation cartésienne $y(x + y)^2 = x - y$.

Comparer Γ et Γ'.

III.B.3) On considère la base orthonormée

$$I = \frac{e_1 + e_2}{\sqrt{2}}, J = \frac{-e_1 + e_2}{\sqrt{2}}.$$

Déterminer l'équation de Γ' dans cette nouvelle base (les nouvelles coordonnées seront notées X, Y).

Partie IV -

Dans cette partie, on associe à tout triplet $V = (x, y, z)$ de $\mathbb{R}^3$, la matrice :

$$A_V = \begin{pmatrix} x & y & z \\ z & x & y \\ y & z & x \end{pmatrix}$$

IV.A -

IV.A.1) Montrer que si $u \in \mathbb{C}$ est tel que $u^3 = 1$, alors le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ u \\ u^2 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de A_V.

IV.A.2) En déduire une matrice $P \in \mathscr{M}_3(\mathbb{C})$ inversible et indépendante de V, telle que $P^{-1} A_V P$ soit diagonale, et préciser les valeurs propres de A_V.

IV.A.3) Soit $J = A_{(0,1,0)} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Exprimer la matrice A_V au moyen des matrices I_3, J et J^2. Préciser comment les valeurs propres de A_V se déduisent de celles de J.

On notera $\mathrm{j} = \mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{3}}$.

IV.A.4) Soit f_V l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice A_V dans la base canonique. Donner des conditions nécessaires et suffisantes pour que f_V ait une et une seule droite stable ainsi qu'un et un seul plan stable.

IV.A.5) Donner une expression factorisée de $\det(A_V)$, au moyen de deux termes réels. On pourra utiliser les résultats de la question IV.A.2).

IV.B - Montrer que $g : V \mapsto A_V$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels entre $\mathbb{R}^3$ et $\{A_V, V \in \mathbb{R}^3\}$.

IV.C - Soit $\mathcal{S} = \{V \in \mathbb{R}^3 \mid \det(A_V) = 1\}$.

IV.C.1) Déterminer la nature de la courbe intersection de $\mathcal{S}$ avec le plan :

$$\Pi_\lambda = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = \lambda\}$$

selon le réel λ.

En déduire que $\mathcal{S}$ est une surface de révolution, dont on précisera l'axe.

IV.C.2) À tout $V = (x, y, z)$ et $V' = (x', y', z')$ dans $\mathbb{R}^3$, on associe $V * V' = V'' = (x'', y'', z'')$ tel que :

$$x'' = xx' + yz' + zy', \quad y'' = xy' + yx' + zz', \quad y'' = xz' + yy' + zx'.$$

Comment peut-on interpréter $A_{V''}$ en fonction des matrices A_V et $A_{V'}$? Montrer que $\mathcal{S}$ est stable pour la loi $*$, et que $(\mathcal{S}, *)$ est un groupe commutatif.

IV.C.3) Soit $\mathbf{U} = \{u \in \mathbb{C}, |u| = 1\}$. Pour $(u, t) \in \mathbb{R} \times \mathbf{U}$, on pose :

$$F(t, u) = \frac{1}{3}\Big(\mathrm{e}^{-2t} + \mathrm{e}^{t}(u + \overline{u}), \mathrm{e}^{-2t} + \mathrm{e}^{t}(\mathrm{j}^2\, u + \mathrm{j}\,\overline{u}), \mathrm{e}^{-2t} + \mathrm{e}^{t}(\mathrm{j}\, u + \mathrm{j}^2\,\overline{u})\Big).$$

Montrer F est une bijection de $\mathbb{R} \times \mathbf{U}$ sur $\mathcal{S}$.

IV.C.4) Calculer $F(t, u) * F(t', u')$. Que peut-on en déduire ?

• • • FIN • • •
