TSI 2 Centrale 2009 math 1 corrigé

Partie I

Notons g la fonction $g : t \mapsto \dfrac{e^t}{1+t}$. Elle est de classe C^∞ sur $\mathbf{R} - \{-1\}$ comme quotient de fonctions C^∞ et dont le dénominateur ne s'annule pas.

I.A.1) g est continue sur $\mathbf{R} - \{-1\}$ et d'intégrale divergente en $t = -1$.

Par conséquent la fonction f est définie sur $]-1, +\infty[$.

I.A.2) f est de classe C^∞ car produit de Id et d'une primitive de g elle même C^∞.

On obtient $f'(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{e^t}{1+t}dt + x\frac{e^x}{1+x}$.

$f'(x)$ est somme de deux termes, clairement positifs pour $x \geq 0$ ou négatifs pour $x \leq 0$.

Ainsi f est décroissante sur $]-1, 0]$ et croissante sur $[0, +\infty[$.

I.A.3) On a aussi $f(x) = (-x)\displaystyle\int_x^0 \frac{e^t}{1+t}dt$ produit de facteurs tous positifs quand $-1 < x \leq 0$ et les bornes de l'intégrale sont dans l'ordre croissant..

Dans ces conditions, $\displaystyle\int_x^0 \frac{e^t}{1+t}dt \geq \int_x^0 \frac{e^x}{1+t}dt = -e^x \ln(1+x)$

On en déduit $f(x) \geq e^x x \ln(1+x)$ puis $\displaystyle\lim_{x \to -1^+} f(x) = +\infty$.

I.A.4) Pour $x > 0$ on a $\dfrac{f(x)}{x} = \displaystyle\int_0^x \frac{e^t}{1+t}dt \geq \int_0^x e^t dt = e^x - 1$ de limite $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$.

La courbe de f présente donc une branche parabolique dans la direction Oy quand x tend vers $+\infty$.

I.B.1) Dans cette question $k \in \mathbf{N}^*$.

Une approximation de $\displaystyle\int_0^{x_k} g(t)dt$ par la méthode des trapèzes s'obtient en subdivisant l'intervalle $[0, x_k]$ au pas de $\dfrac{1}{n}$ et en sommant les aires des k trapèzes associés aux points $(x_i, 0)$ et $(x_i, g(x_i))$; $i = 0, \ldots, k$.

On obtient donc $\dfrac{g(x_0) + g(x_1)}{2n} + \dfrac{g(x_1) + g(x_2)}{2n} + \cdots + \dfrac{g(x_{k-1}) + g(x_k)}{2n}$

Les termes internes figurent deux fois ce qui donne en regroupant :

$\displaystyle\int_0^{x_k} g(t)dt \approx \frac{g(x_0)}{2n} + \frac{g(x_1)}{n} + \cdots + \frac{g(x_{k-1})}{n} + \frac{g(x_k)}{2n}$.

Or $\dfrac{g(x_i)}{n} = \dfrac{e^{i/n}}{n+i}$ donc en multipliant la formule précédente par $x_k = \dfrac{k}{n}$ on obtient l'approximation :

$$f(x_k) \approx y_k = \frac{k}{n}\left(\frac{1}{2n} + \sum_{i=1}^{k-1} \frac{e^{i/n}}{n+i} + \frac{e^{k/n}}{2(n+k)}\right)$$

Remarque : pour $k = 1$ la somme $\sum$ est vide (un seul trapèze).

I.B.2) Pour $-n < k < 0$ on peut à nouveau écrire $f(x_x) = (-x_k)\displaystyle\int_{x_k}^{0} \frac{e^t}{1+t}dt$.

La méthode précédente conduit alors à

$$f(x_k) \approx y_k = -\frac{k}{n}\left(\frac{e^{k/n}}{2(n+k)} + \sum_{i=k+1}^{-1} \frac{e^{i/n}}{n+i} + \frac{1}{2n}\right)$$

Remarque : pour $k = -1$ la somme $\sum$ est vide (un seul trapèze).

I.B.3)

```
> app :=proc(n,m) local k,a,b,s,y,z ;
> Digits :=3 ; s :=0 ;a :=1/(2*n) ;y :=NULL ; # initilisations
> for k from 1 to m do
>              b :=exp(k/n)/(2*(n+k)) ; # a+b=aire du kème trapèze
>              s :=s+a+b ;              # s contient le cumul des aires
>              y :=y,evalf(k*s/n) ;     # y est la séquence  y1,...,yk
>              a :=b od ;               # mise à jour de a
> s :=0 ;a :=1/(2*n) ;z :=NULL ;
> for k from 1 to n-1 do
>                b :=exp(-k/n)/(2*(n-k)) ; s :=s+a+b ;
>                z :=evalf(k*s/n),z ;   # z est la séquence y(-k),...,y(-1)
>                a :=b od ;
> [z,0,y] end :                           # sortie des résultats [y(-n+1),...,ym]
```

I.B.4)

```
> y :=app(4,8) ;

y := [0.694, 0.268, 0.0637, 0, 0.0632, 0.259, 0.606, 1.13, 1.86, 2.87, 4.20,  5.95]
```

I.C.1) f admet un développement limité en 0 à tout ordre car de classe C^∞ sur $]-1,+\infty[$ (vu en I.A.2).

I.C.2) Il suffit de calculer le développement limité de g à l'ordre 3 en 0 :

$$\frac{e^t}{1+t} = (1+t+t^2/2+t^3/6)(1-t+t^2-t^3) + o(t^3) = 1 + t^2/2 - t^3/3 + o(t^3)$$

D'où $\displaystyle\int_0^x g(t)dt = x + x^3/6 - x^4/12 + o(x^4)$ et

$$f(x) = x^2 + \frac{1}{6}x^4 - \frac{1}{12}x^5 + o(x^5)$$

I.C.3) Plus généralement, $g(t) = (\sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!})(\sum_{k=0}^{n}(-1)^k t^k) + o(t^n) = \sum_{p=0}^{n} (\sum_{k=0}^{p} \frac{(-1)^{p-k}}{k!}) t^p + o(t^n)$

d'où l'on déduit $f(x) = \sum_{p=0}^{n} (\sum_{k=0}^{p} \frac{(-1)^{p-k}}{k!}) \frac{x^{p+2}}{p+1} + o(x^{n+2})$. Ainsi

$$\lambda_n = \frac{1}{n-1} \sum_{k=0}^{n-2} \frac{(-1)^{n-k}}{k!}, \quad n \geq 2$$

I.C.4) Alors $n\lambda_{n+1} + (n-1)\lambda_n = \frac{1}{(n-1)!}$ pour $n \geq 2$; relation encore vraie pour $n = 1$ car $\lambda_2 = 1$. Ainsi

$$\lambda_{n+1} = \frac{1}{n!} - \frac{n-1}{n}\lambda_n, \quad n \geq 1.$$

I.C.5)

```
> dl :=proc(n)
> local s,l,u,k ;
> s :=0 ;l :=0 ;u :=x ;
> for k from 1 to n-1 do
>           u :=x*u ;              # u=x^(k+1)
>           l :=(1/k !)-(k-1)*l/k ; # l=lambda(k+1)
>           s :=s+l*u od ;
> s
> end :
> dl(6) ;
```

$>$ $$x^2 + \frac{1}{6}x^4 - \frac{1}{12}x^5 + \frac{3}{40}x^6$$

Partie II

II.A.1) ϕ est solution d'un problème de Cauchy en 0 pour une équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients continus sur $]-1, +\infty[$ et le coefficient devant y' ne s'annule pas.

Le théorème de Cauchy-Lipschitz s'applique donc et assure l'existence et l'unicité de ϕ.

II.A.2) On sait que la solution générale est $x \mapsto \alpha \exp(\int_0^x \frac{t}{t+1} dt)$ En écrivant $\frac{t}{t+1} = 1 - \frac{1}{t+1}$ on en déduit $\phi(x) = \alpha \exp(x - \ln(1+x)) = \alpha \frac{e^x}{1+x}$. $\phi(0) = 1$ donc $\alpha = 1$ d'où

$$\phi(x) = \frac{e^x}{x+1}.$$

II.B.1) On peut dériver terme à terme pour tout $x \in I$ et obtenir :

$$(1+x)\phi'(x) - x\phi(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{n+1} = a_1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \big((n+1)a_{n+1} + n a_n - a_{n-1}\big) x^n.$$

Cette somme est nulle sur I voisinage de 0 donc par unicité du développement en série entière il vient :

$$a_1 = 0 \quad \text{ et } (n+1)a_{n+1} + n a_n - a_{n-1} = 0 \quad \text{ pour tout } n \geq 1.$$

En outre $a_0 = \phi(0)$, valeur fixée par la condition initiale donc $a_0 = 1$.

II.B.2) a_0 et a_1 étant déterminés, la relation de récurrence définit la suite des autres termes de façon unique.

Montrons par récurrence que $|a_n| \leq 1$:

<u>initialisation :</u> vérifiée car $a_0 = 1$ et $a_1 = 0$.

<u>hérédité :</u> Soit $|a_{n-1}| \leq 1$ et $|a_n| \leq 1$.

Puisque $a_{n+1} = \dfrac{1}{n+1}(-n a_n + a_{n-1})$ on déduit $|a_{n+1}| \leq \dfrac{1}{n+1}(n|a_n| + |a_{n-1}|)$ donc $|a_{n+1}| \leq 1$

Ainsi le résultat par récurrence.

II.B.3) La suite $(a_n)_n$ étant bornée, la série $\sum a_n x^n$ converge pour $|x| < 1$.

Alors la somme S de cette série est, d'après ce qui précède, solution sur $I =]-1, 1[$ du même problème de Cauchy que ϕ. De l'unicité des solutions (II.A.1), on déduit $S(x) = \phi(x)$ pour tout $x \in I$

ϕ est donc développable en série entière au voisinage de 0

II.B.4) Du résultat précédent on déduit que $\lim\limits_{x \to -1^+} S(x) = \lim\limits_{x \to -1^+} \phi(x) = +\infty$ donc le rayon de convergence de $\sum a_n x^n$ est inférieur ou égal à 1.

Etant au moins égal à 1 puisque la série converge sur I on conclut $R = 1$.

II.C.1) De $(n+1)a_{n+1} + n a_n - a_{n-1} = 0$ on déduit $(n+1)b_{n+1} - b_n = 0$ pour $n \geq 1$ soit $b_n = \dfrac{1}{n} b_{n-1}$ pour $n \geq 2$.

Donc $b_n = \dfrac{1}{n!} b_1$ et comme $b_1 = a_1 + a_0 = 1$ il vient

$$b_n = \frac{1}{n!},\ n \geq 1.$$

II.C.2) Ainsi $(a_n)_n$ vérifie $a_n = \dfrac{1}{n!} - a_{n-1}$ pour tout $n \geq 1$ donc $a_n = \dfrac{1}{n!} - \dfrac{1}{(n-1)!} + \cdots + \dfrac{(-1)^{n-1}}{1!} + (-1)^n a_0$.

$a_0 = 1$ permet d'écrire

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{n-k}}{k!}, \quad n \geq 0.$$

II.C.3) De l'expression de λ_n obtenue en I.C.3 on déduit immédiatement $\lambda_n = \dfrac{a_{n-2}}{n-1}, \quad n \geq 2$.

II.D.1)

```
> un :=proc(n) local a,b,u,k ;
> a :=u0 ; b :=u1 ;
> for k from 2 to n do
>       u :=(-(k-1)*b+a)/k ;
>       a :=b ;b :=u od ;
> u end ;
```

II.D.2) E contient la suite nulle, c'est donc une partie non vide de l'ensemble U des suites réelles. Clairement stable par combinaison linéaire, c'est un sous espace vectoriel de U donc E est un $\mathbf{R}$-espace vectoriel.

II.D.3) $(u_n)_n \mapsto (u_0, u_1)$ est manifestement linéaire et bijective de E sur $\mathbf{R}^2$ car les éléments de E sont définis de manière unique par la donnée arbitraire de leur deux premiers termes.

Ainsi E et $\mathbf{R}^2$ sont isomorphes ; ils ont donc même dimension soit 2.

II.D.4) $(r^n)_n \in E$ si et seulement si $(n+1)r^n + nr^n - r^{n-1} = 0$ pour tout $n \in \mathbf{N}$.

Ainsi $r^{n-1}(r+1)(nr + r - 1) = 0$ pour tout $n \in \mathbf{N}$ soit $r = -1$.

Les suites géométriques éléments de E sont les suites de raison -1.

II.D.5) $a_0 = 1$ et $a_1 = 0$ donc la suite $(a_n)_n$ n'est pas colinéaire à $((-1)^n)_n$. Ainsi $((a_n)_n, ((-1)^n)_n)$ est une partie libre de deux éléments du plan vectoriel E.

Donc $((a_n)_n, ((-1)^n)_n)$ est une base de E.

Alors pour $(u_n)_n \in E$ il existe deux réels α et β tels que $u_n = \alpha a_n + \beta(-1)^n$ pour tout $n \in \mathbf{N}$.

En prenant $n = 0$ et $n = 1$ il vient $u_0 = \alpha + \beta$ et $u_1 = -\beta$.

En reprenant l'expression de a_n déterminée en II.C.2 on obtient

$$u_n = (u_0 + u_1) \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{n-k}}{k!} - u_1(-1)^n, \quad n \geq 0.$$

Partie III

Notons que $(\mathcal{E})$ est une équation différentielle linéaire homogène d'ordre deux à coefficients continus. Comme le coefficient devant y" s'annule en $x = -1$ et $x = 0$, l'ensemble des solutions sur chaque intervalle $]-\infty, -1[,]-1, 0[,]0, +\infty[$ est un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension deux.

III.A.1) Soit y une solution polynômiale de degré n. L'èquation $(\mathcal{E})$ étant linéaire homogène, on peut supposer en outre y unitaire.

$P = x^2(x+1)y" - x(x^2+2x+2)y' + (x^2+2x+2)y$ est un polynôme dont le terme de degré $n+2$ est $(-n+1)x^{n+2}$.

y est solution de $(\mathcal{E})$ donc P est le polynôme nul. Ses coefficients sont nuls, en particulier $-n+1=0$ donc $n = 1$.

III.A.2) Pour les solutions polynomiales de degré 1, $(\mathcal{E})$ équivaut à $-xy' + y = 0$ car $y" = 0$ d'où $y : x \mapsto \lambda x$.

III.B.1) La méthode de variation de la constante λ conduit à l'équation $(x+1)\lambda" - x\lambda' = 0$ soit l'équation $(x+1)z' - xz = 0$ en posant $\lambda' = z$.

III.B.2) D'après la partie II, $z = \phi$ est une solution sur $]-1, +\infty[$ de cette équation.

On en déduit que $f : x \mapsto x \displaystyle\int_0^x \phi(t)dt$ est solution sur $]-1, +\infty[$ de $(\mathcal{E})$.

Comme id et f sont deux solutions indépendantes de $(\mathcal{E})$, en vertu de la remarque préliminaire on peut en déduire l'expression générale des solutions sur chacun des intervalles $I_1 =]-1, 0[$ et $I_2 =]0, +\infty[$ soit :

$$y : x \mapsto \mu_i x + \nu_i f(x), \quad i = 1, 2, \quad x \in I_i, \quad (\mu_i, \nu_i) \in \mathbf{R}^2.$$

III.B.3) Il s'agit d'étudier un raccord éventuel au second ordre en l'origine des solutions précédentes.

Par développement limité on obtient : $\mu_1 x + \nu_1 x^2 + o(x^2) = \mu_2 x + \nu_2 x^2 + o(x^2)$ donc $\mu_1 = \mu_2$ et $\nu_1 = \nu_2$.

Les solutions sur $]-1, +\infty[$ sont donc de la forme :

$$y : x \mapsto \mu x + \nu f(x), \quad x \in]-1, +\infty[, \quad (\mu, \nu) \in \mathbf{R}^2.$$

Pour étudier les solutions sur $\mathbf{R}$ il faut résoudre $(\mathcal{E})$ sur l'intervalle $]-\infty, -1[$. Pour cela on peut reprendre les calculs faits en III.B.2 et obtenir, en posant $h(x) = x \displaystyle\int_{-2}^x \phi(t)dt$, la solution générale

$$y : x \mapsto \mu_0 x + \nu_0 h(x), \quad x \in]-\infty, -1[, \quad (\mu_0, \nu_0) \in \mathbf{R}^2.$$

Le raccord en $x = -1$ impose $\nu = \nu_0 = 0$ car f et h tendent vers l'infini en ce point puis $\mu = \mu_0$.

En conclusion, les solutions sur $\mathbf{R}$ sont $y : x \mapsto \mu x, \quad \mu \in \mathbf{R}$.

III.C.1) D'après l'équation $(\mathcal{E})$, toutes les solutions y sur l'intervalle $]-1, +\infty[$ vérifient $y(0) = 0$ donc :

si $\alpha \neq 0$ il n'y a aucune solution

si $\alpha = 0$ il y en a une infinité, celles trouvées en III.B.3.

III.C.2) Du développement limité utilisé en III.B.3 on déduit $\mu = y'(0)$ et $2\nu = y"(0)$.

L'unique solution telle que $y'(0) = \beta$ et $y"(0) = \gamma$ est $y : x \mapsto \dfrac{\gamma}{2} f(x) + \beta x$