Centrale TSI 2008 - Mathématiques 1

Partie I - Système différentiel autonome

I.A.1.a)

$$\boxed{x' = \lambda x \Leftrightarrow \exists C \in \mathbb{R},\ \forall t \in \mathbb{R},\ x(t) = Ce^{\lambda t}}$$

I.A.1.b) Si, en outre, $x(t_0) = x_0$, l'on a $x_0 = Ce^{\lambda t_0}$, ce qui montre que

$$\boxed{\forall t \in \mathbb{R},\ x(t) = x_0 e^{\lambda(t-t_0)}}$$

I.A.2) L'équation différentielle est une équation linéaire du second ordre à coefficients constants d'équation caractéristique $r^2 - 2\alpha r + \alpha^2 + \beta^2 = 0 \Leftrightarrow r = \alpha \pm i\beta$.

Si $\beta \neq 0$, les solutions de l'équation sont de la forme :

$$\boxed{\begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ t \to e^{\alpha t}(\lambda\cos(\beta t) + \mu\sin(\beta t)) \end{array} \text{ où } \lambda,\ \mu \in \mathbb{R}}$$

Si $\beta = 0$, les solutions de l'équation sont de la forme :

$$\boxed{\begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ t \to e^{\alpha t}(\lambda t + \mu) \end{array} \text{ où } \lambda,\ \mu \in \mathbb{R}}$$

I.B.1) Les solutions constantes sont à dérivée nulle ce qui donne les deux applications :

$$\boxed{\begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ t \to 0 \end{array} \text{ et } \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ t \to 1 \end{array}}$$

I.B.2) $\displaystyle\int \frac{x'}{x(1-x)}dt = \int \left(\frac{x'}{x} + \frac{x'}{1-x}\right) dt \Rightarrow$

$$\boxed{\int \frac{x'}{x(1-x)}dt = \ln\left|\frac{x}{x-1}\right| + C \text{ où } C \in \mathbb{R}}$$

I.B.3)a) Cherchons les solutions de l'équation à valeur dans $I =]-\infty, 0[,\ ]0,1[$ ou $]1, +\infty[$. Alors :

$$\begin{aligned} x' = x(1-x) \quad &\Leftrightarrow \frac{x'}{x(1-x)} = 1 \\ &\Leftrightarrow \exists C \in \mathbb{R},\ \ln\left|\frac{x}{x-1}\right| = t + C \\ &\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}^*,\ \frac{x}{x-1} = \lambda e^t \\ &\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}^*,\ x(1-\lambda e^t) = -\lambda e^t \\ &\Leftrightarrow \exists C \in \mathbb{R}^*,\ x(Ce^{-t} + 1) = 1 \ \left(C = -\frac{1}{\lambda}\right). \text{ D'où :} \end{aligned}$$

$$\boxed{x \text{ est de la forme } t \to x(t) = \frac{1}{1 + Ce^{-t}} \text{ où } C \in \mathbb{R}^*}$$

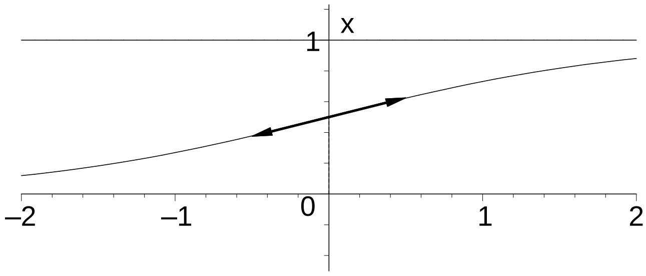
I.B.3)b) On a alors $x(0) = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow C = 1$. D'où :

$$\boxed{\text{La solution au problème de Cauchy } \left\{\begin{array}{l} x' = x(1-x) \\ x(0) = \dfrac{1}{2} \end{array}\right. \text{ est } x : \left\{\begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ t \to \dfrac{1}{1+e^{-t}} \end{array}\right.}$$

Cette fonction x est alors C^∞ sur $\mathbb{R}$.
$\forall t \in \mathbb{R},\ x'(t) = \dfrac{e^{-t}}{(1+e^{-t})^2}$. D'où le tableau de variations de x :

t	$-\infty$		0		$+\infty$
x'		$+$	$\frac{1}{4}$	$+$	
x	0	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$	$\nearrow$	1

et sa représentation graphique :



Partie II - Cas linéaire

II.A.1) $X' = AX \quad \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x' = \lambda_1 x \\ y' = \lambda_2 y \end{array} \right.$

$\Leftrightarrow \exists C_1,\ C_2 \in \mathbb{R},\ \forall t \in \mathbb{R},\ \left\{ \begin{array}{l} x = C_1 e^{\lambda_1 t} \\ y = C_2 e^{\lambda_2 t} \end{array} \right.$. D'où :

$$\boxed{\text{La solution générale de } (S_2) \text{ est } X : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \\ t \to \Phi_1(t)C \end{array} \quad \text{où } \Phi_1(t) = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_1 t} \end{pmatrix} \text{ et } C \in \mathbb{R}^2}$$

II.A.2)

✓ La trajectoire maximale passant par $(1,0)$ vérifie :
$\exists t_0 \in \mathbb{R},\ \left\{ \begin{array}{l} C_1 e^{\lambda_1 t_0} = 1 \\ C_2 e^{\lambda_2 t_0} = 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \exists t_0 \in \mathbb{R},\ \left\{ \begin{array}{l} C_1 = e^{-\lambda_1 t_0} \\ C_2 = 0 \end{array} \right\}$
Cela donne la paramétrisation de la trajectoire :
$\left\{ \begin{array}{l} x = e^{\lambda_1 (t-t_0)} \\ y = 0 \end{array} \right.$, $t \in \mathbb{R}$. On a obtenu la demi-droite $]Ox)$.

✓ La trajectoire maximale passant par $(-1,0)$ vérifie :
$\exists t_0 \in \mathbb{R},\ \left\{ \begin{array}{l} C_1 e^{\lambda_1 t_0} = -1 \\ C_2 e^{\lambda_2 t_0} = 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \exists t_0 \in \mathbb{R},\ \left\{ \begin{array}{l} C_1 = -e^{-\lambda_1 t_0} \\ C_2 = 0 \end{array} \right\}$
Cela donne la paramétrisation de la trajectoire :
$\left\{ \begin{array}{l} x = -e^{\lambda_1 (t-t_0)} \\ y = 0 \end{array} \right.$, $t \in \mathbb{R}$. On a obtenu la demi-droite $]Ox')$.

✓ La trajectoire maximale passant par $(0,1)$ vérifie :
$\exists t_0 \in \mathbb{R},\ \left\{ \begin{array}{l} C_1 e^{\lambda_1 t_0} = 0 \\ C_2 e^{\lambda_2 t_0} = 1 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \exists t_0 \in \mathbb{R},\ \left\{ \begin{array}{l} C_1 = 0 \\ C_2 = e^{-\lambda_2 t_0} \end{array} \right\}$
Cela donne la paramétrisation de la trajectoire :
$\left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ y = e^{\lambda_2 (t-t_0)} \end{array} \right.$, $t \in \mathbb{R}$. On a obtenu la demi-droite $]Oy)$.

✓ On obtient de même pour la trajectoire passant par $(0,-1)$ la demi-droite $]O,y')$.

II.A.3) La solution au problème de Cauchy relative à $\left\{\begin{array}{l} X' = AX \\ (x_0, y_0, 0) \end{array}\right.$ vérifie $\left\{\begin{array}{l} C_1 = x_0 \\ C_2 = y_0 \end{array}\right.$

D'où un point $M(x, y)$ appartient à la trajectoire si et seulement si :

$$\exists t \in \mathbb{R},\ \left\{\begin{array}{l} x = x_0 e^{\lambda_1 t} \\ y = y_0 e^{\lambda_2 t} \end{array}\right. \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R},\ \left\{\begin{array}{l} t = \dfrac{\ln \dfrac{x}{x_0}}{\lambda_1}\ (x_0,\ \lambda_1 \neq 0) \\ y = y_0 e^{\lambda_2 t} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow y = y_0 \left(\frac{x}{x_0}\right)^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}$$

L'équation cartésienne de la trajectoire est donc :

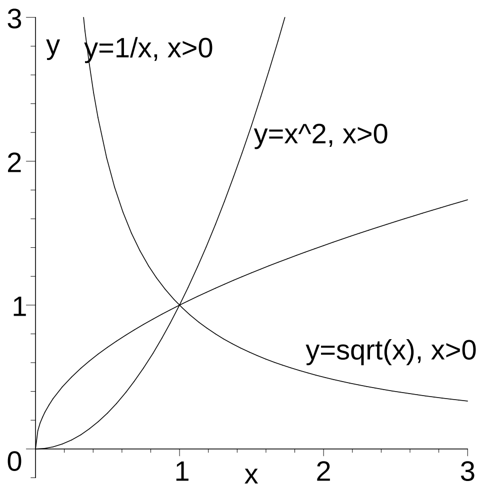
$$\boxed{y = C|x|^\alpha \text{ avec } x \text{ du signe de } x_0,\ C = y_0|x_0|^{-\frac{\lambda_2}{\lambda_1}} \text{ et } \alpha = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}}$$

II.A.4) Les trajectoires maximales passant par le point (x_0, y_0) sont les représentations de solutions correspondant à une condition initiale (x_0, y_0, t_0). Le système étant autonome, ces solutions se déduisent de celle satisfaisant la condition initiale $(x_0, y_0, 0)$ par translation de la variable t, les trajectoires correspondantes sont donc identiques et ont même équation cartésienne. On en déduit que la trajectoire passant par $(1, 1)$ pour $(\lambda_1, \lambda_2) =$:

✓ $(-1, -2)$ a pour équation cartésienne : $y = C|x|^\alpha$ avec $\alpha = 2,\ C = 1$ et $x > 0$, ce qui donne $\underline{y = x^2 \text{ et } x > 0}$.

✓ $(-2, -1)$ a pour équation cartésienne : $y = C|x|^\alpha$ avec $\alpha = \dfrac{1}{2},\ C = 1$ et $x > 0$, ce qui donne $\underline{y = \sqrt{x} \text{ et } x > 0}$.

✓ $(-1, 1)$ a pour équation cartésienne : $y = C|x|^\alpha$ avec $\alpha = -1,\ C = 1$ et $x > 0$, ce qui donne $\underline{y = \dfrac{1}{x} \text{ et } x > 0}$.



II.B.1) et 2) La matrice A possède deux valeurs propres réelles distinctes ; elle est donc diagonalisable et il existe une matrice inversible $P \in GL_2(\mathbb{C})$ telle que $D = P^{-1}AP$.

On a alors :

$$\begin{aligned}
X' = AX \quad & \Leftrightarrow P^{-1}X' = P^{-1}APP^{-1}X \\
& \Leftrightarrow \boxed{Y' = DY \text{ en posant } Y = P^{-1}X} \\
& \Leftrightarrow \exists C_1, C_2 \in \mathbb{R},\ \forall t \in \mathbb{R},\ Y(t) = \Phi_1(t) \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} \\
& \Leftrightarrow \exists C_1, C_2 \in \mathbb{R},\ \forall t \in \mathbb{R},\ X(t) = P\Phi_1(t) \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} \\
& \Leftrightarrow \exists C_1, C_2 \in \mathbb{R},\ \forall t \in \mathbb{R},\ X(t) = \Phi_2(t) \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

où $\Phi_2(t) = P\Phi_1(t) \in M_2(\mathbb{R})$.

Comme $P \in GL_2(\mathbb{R}),\ \Phi_1(t) = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{R}),\ \Phi_2(t) \in GL_2(\mathbb{R})$. Donc :

$$\boxed{\text{La solution générale de } (S_2) \text{ est } X : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \\ t \to \Phi_2(t)C \end{array} \quad \text{où } \Phi_2(t) \in GL_2(\mathbb{R}) \text{ et } C \in \mathbb{R}^2}$$

II.B.3) Une condition nécessaire et suffisante pour que toutes les solutions de (S_2) tendent vers 0 est que :

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to+\infty} \Phi_2(t) = 0 \quad & \Leftrightarrow \lim_{t\to+\infty} P\Phi_1(t) = 0 \\
& \Leftrightarrow \lim_{t\to+\infty} \Phi_1(t) = 0 \text{ car } X \to PX \text{ et } X \to P^{-1}X \text{ sont continues sur} M_2(K) \\
& \Leftrightarrow \lim_{t\to+\infty} e^{\lambda_1 t} = 0 \text{ et } \lim_{t\to+\infty} e^{\lambda_2 t} = 0 \\
& \Leftrightarrow \lambda_1 < 0 \text{ et } \lambda_2 < 0. \text{ Donc :}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Toutes les solutions de } (S_2) \text{ tendent vers } 0 \Leftrightarrow \lambda_1 < 0 \text{ et } \lambda_2 < 0}$$

II.B.4)a) L'on a $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Son polynôme caractéristique χ_A vaut $X^2 - 1$ et les valeurs propres sont 1 et -1, distinctes.

Les sous-espaces propres associés sont :

$E_1 : x = y$ engendré par $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$ et $E_{-1} = Vect\left\{\begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}\right\}$ orthogonal à E_1 pour le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^2$.

L'on a donc :

$$\boxed{D = P^{-1}AP \text{ avec } D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } P = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}}$$

L'on a alors :

$$\boxed{P = R_{\pi/4} \text{ et } R_{\pi/4}^{-1} = R_{-\pi/4} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}}$$

II.B.4)b) D'après la question II.B.2), la solution générale est :

$$\boxed{\begin{array}{l} X:\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \\ \quad t \to \begin{pmatrix} \dfrac{\sqrt{2}}{2} & -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \dfrac{\sqrt{2}}{2} & \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = C_1 e^t \dfrac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{-t} \dfrac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{array}}$$

II.B.4)c) La solution au problème de Cauchy relatif à (S_2) et $(1,0,0)$ est définie par :

$$\begin{cases} \dfrac{\sqrt{2}}{2}(C_1 - C_2) = 1 \\ \dfrac{\sqrt{2}}{2}(C_1 + C_2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ C_2 = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}.$$

D'où la solution :

$$\boxed{\begin{array}{l} X:\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \\ \quad t \to \dfrac{1}{2}e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \dfrac{1}{2}e^{-t} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{ch}t \\ \mathrm{sh}t \end{pmatrix} \end{array}}$$

L'on $Y = P^{-1}X$. D'où :

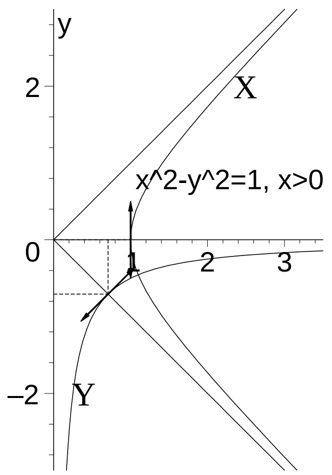
$$\boxed{\begin{array}{l} Y:\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \\ \quad t \to \begin{pmatrix} \dfrac{\sqrt{2}}{2} & \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ -\dfrac{\sqrt{2}}{2} & \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{ch}t \\ \mathrm{sh}t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\sqrt{2}}{2}e^t \\ -\dfrac{\sqrt{2}}{2}e^{-t} \end{pmatrix} \end{array}}$$

II.B.4)d) Le système étant autonome , la trajectoire maximale correspondant à une condition initiale $(1,0,t_0)$ est la même que celle qui correspond à la condition $(1,0,0)$.

La trajectoire maximale passant par $(1,0)$ admet donc pour paramétrisation $\begin{cases} x = \mathrm{ch}t \\ y = \mathrm{sh}t \end{cases}$.

On reconnaît la branche d'hyperbole d'équation cartésienne $x^2 - y^2 = 1,\ x > 0$.

D'où sa représentation graphique :



II.B.5)a) L'on a $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$. Son polynôme caractéristique χ_A vaut $(X+1)(X+3)$ et les valeurs propres sont -1 et -3, distinctes.

Les sous-espaces propres associés sont les mêmes que ceux de la matrice de la question précédente.

$E_{-1} = Vect\left\{\begin{pmatrix} \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}\right\}$ et $E_{-3} = Vect\left\{\begin{pmatrix} -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}\right\}$

L'on a donc :

$$\boxed{D = P^{-1}AP \text{ avec } D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \text{ et } P = \begin{pmatrix} \dfrac{\sqrt{2}}{2} & -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \dfrac{\sqrt{2}}{2} & \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}}$$

L'on a alors :

$$\boxed{P = R_{\pi/4} \text{ et } R_{\pi/4}^{-1} = R_{-\pi/4} = \begin{pmatrix} \dfrac{\sqrt{2}}{2} & \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ -\dfrac{\sqrt{2}}{2} & \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}}$$

II.B.5)b) D'après la question II.B.2), la solution générale est :

$$\boxed{\begin{array}{ll} X: & \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \\ & t \to \begin{pmatrix} \dfrac{\sqrt{2}}{2} & -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \dfrac{\sqrt{2}}{2} & \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-3t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = C_1 e^{-t}\dfrac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{-3t}\dfrac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{array}}$$

II.B.5)c) La solution au problème de Cauchy relatif à (S_2) et $(1,0,0)$ est définie par :

$$\begin{cases} \dfrac{\sqrt{2}}{2}(C_1 - C_2) = 1 \\ \dfrac{\sqrt{2}}{2}(C_1 + C_2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ C_2 = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}.$$

D'où la solution :

$$\boxed{\begin{array}{ll} X: & \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \\ & t \to \dfrac{1}{2}e^{-t}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \dfrac{1}{2}e^{-3t}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{e^{-t} + e^{-3t}}{2} \\ \dfrac{e^{-t} - e^{-3t}}{2} \end{pmatrix} \end{array}}$$

L'on $Y = P^{-1}X$. D'où :

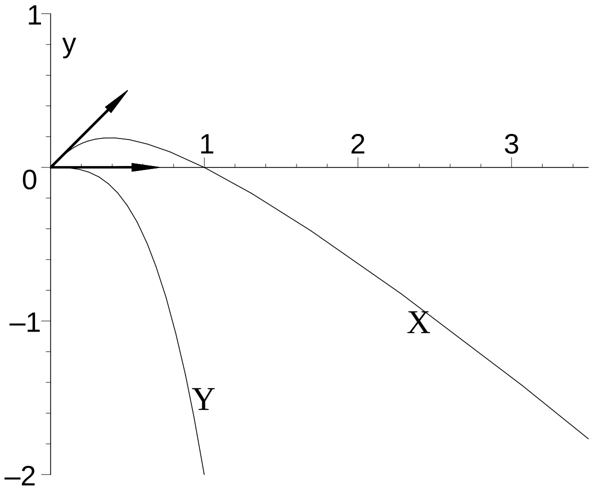
$$\boxed{\begin{array}{ll} Y: & \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \\ & t \to \begin{pmatrix} \dfrac{\sqrt{2}}{2} & \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ -\dfrac{\sqrt{2}}{2} & \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{e^{-t} + e^{-3t}}{2} \\ \dfrac{e^{-t} - e^{-3t}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\sqrt{2}}{2}e^{-t} \\ -\dfrac{\sqrt{2}}{2}e^{-3t} \end{pmatrix} \end{array}}$$

II.B.5)d) La trajectoire maximale passant par $(1,0)$ admet donc pour paramétrisation :

$$\begin{cases} x = \dfrac{e^{-t} + e^{-3t}}{2} \\ y = \dfrac{e^{-t} - e^{-3t}}{2} \end{cases}.$$

Elle est l'image par la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{4}$ du support de Y : $\begin{cases} x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}e^{-t} \\ y = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}e^{-3t} \end{cases}$
ce qui donne l'équation cartésienne : $y = -2x^3,\ x > 0$.

D'où les trajectoires maximales correspondant à Y et X :



II.C.1) Le polynôme caractéristique de A est $\chi_A = (X-\alpha)^2 + \beta^2$.
Les valeurs propres de A sont donc : $\alpha + i\beta$ et $\alpha - i\beta$.

II.C.2) $X' = AX \Leftrightarrow \begin{cases} x' = \alpha x - \beta y \\ y' = \beta x + \alpha y \end{cases}$

Comme x et y sont dérivables, x' et y' le sont aussi et le système est équivalent à :

$$\left\{\begin{array}{l} y = \dfrac{1}{\beta}(\alpha x - x') \\ y' = \beta x + \alpha y \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y = \dfrac{1}{\beta}(\alpha x - x') \\ \dfrac{1}{\beta}(\alpha x' - x'') = \beta x + \dfrac{\alpha}{\beta}(\alpha x - x') \end{array}\right\}.$$
$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y = \dfrac{1}{\beta}(\alpha x - x') \\ x'' - 2\alpha x' + (\alpha^2+\beta^2)x = 0 \end{array}\right\}$$

On montre de même que y est solution de $x'' - 2\alpha x' + (\alpha^2+\beta^2)x = 0$. Donc :

$$\boxed{x \text{ et } y \text{ sont solutions de l'équation différentielle } x'' - 2\alpha x' + (\alpha^2+\beta^2)x = 0}$$

D'après la question I.A.2), on alors : $x = e^{\alpha t}(\lambda\cos(\beta t) + \mu\sin(\beta t))$ où $\lambda,\ \mu \in \mathbb{R}$ puisque $\beta \neq 0$.
Donc :

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{\beta}(\alpha x - x') \\ &= \frac{\alpha}{\beta}e^{\alpha t}(\lambda\cos(\beta t) + \mu\sin(\beta t)) - \frac{1}{\beta}\left(\alpha e^{\alpha t}(\lambda\cos(\beta t) + \mu\sin(\beta t)) + e^{\alpha t}(-\beta\lambda\sin(\beta t) + \beta\mu\cos(\beta t))\right) \\ &= e^{\alpha t}(-\lambda\sin(\beta t) + \mu\cos(\beta t)) \end{aligned}$$

D'où la solution générale du système :

$$\boxed{\begin{array}{l} X:\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \\ \qquad t \to \begin{pmatrix} e^{\alpha t}(\lambda\cos(\beta t) + \mu\sin(\beta t)) \\ e^{\alpha t}(-\lambda\sin(\beta t) + \mu\cos(\beta t)) \end{pmatrix} = e^{\alpha t}\begin{pmatrix} \cos(\beta t) & -\sin(\beta t) \\ \sin(\beta t) & \cos(\beta t) \end{pmatrix} C \end{array}}$$

où $C = \begin{pmatrix} \lambda \\ -\mu \end{pmatrix}$, $\lambda,\ \mu \in \mathbb{R}$.

II.C.3) $R_{\beta t}$ étant une matrice d'isométrie vectorielle, une condition nécessaire et suffisante pour que toutes les solutions tendent vers 0 est que :
$\lim_{t\to+\infty} e^{\alpha t} = 0 \Leftrightarrow \alpha < 0$. Donc :

$$\boxed{\text{Toutes les solutions tendent vers } 0 \Leftrightarrow \alpha < 0}$$

II.C.4)a) D'après la question II.C.2), la solution générale de $X' = AX$ est :
$\begin{array}{rl} X: & \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \\ & t \to e^{-t/2} R_t C \end{array}$ où $C = \begin{pmatrix} \lambda \\ -\mu \end{pmatrix}$, $\lambda,\ \mu \in \mathbb{R}$.

Celle qui vérifie la condition initiale $(1, 0, 0)$ est définie par $C = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

D'où la solution cherchée :

$$\boxed{\begin{array}{rl} X: & \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \\ & t \to e^{-t/2} \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} \end{array}}$$

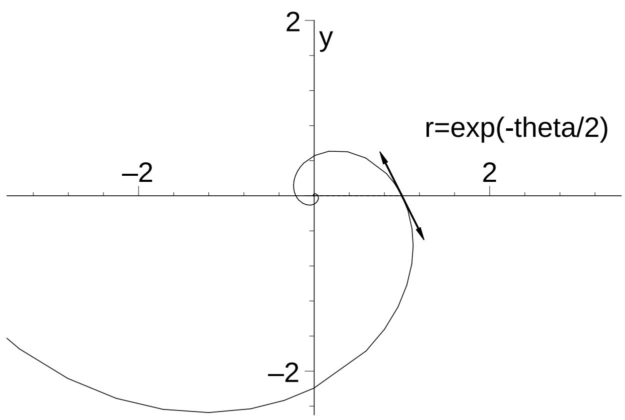
II.C.4)b) L'équation paramétrique de la trajectoire est donc : $\left\{ \begin{array}{l} x = e^{-t/2} \cos t \\ y = e^{-t/2} \sin t \end{array} \right.$ et un point $M(x, y) \in \Gamma \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R},\ \overrightarrow{OM} = e^{-t/2} \cos t\, \overrightarrow{i} + e^{-t/2} \sin t\, \overrightarrow{j} = e^{-t/2} \overrightarrow{u}(t)$ avec $\overrightarrow{u}(t) = \cos t\, \overrightarrow{i} + \sin t\, \overrightarrow{j}$.

M admet donc un couple de coordonnées polaires (r, θ) avec $r = e^{-t/2}$ et $\theta = t$. D'où l'équation polaire de Γ est :

$$\boxed{r = \exp\left(-\frac{\theta}{2}\right)}$$

II.C.4)c) La courbe admet O comme point asymptote lorsque θ tend vers $+\infty$ et une spirale comme branche infinie lorsque θ tend vers $-\infty$.

Sa représentation est :



Partie III - Cas non linéaire

III.A.1) F est évidemment C^∞ sur $\mathbb{R}^2$ car ses fonctions coordonnées le sont. L'on a :

$$\boxed{\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ J_F(x, y) = \begin{pmatrix} -2x & 1 \\ 1 & -2y \end{pmatrix}}$$

Au voisinage de (x_0, y_0) quelconque de $\mathbb{R}^2$,
$\exists \varepsilon : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ telle que :

$$\boxed{\begin{array}{l} \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \begin{pmatrix} y - x^2 \\ x - y^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 - x_0^2 \\ x_0 - y_0^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2x_0(x-x_0) + (y-y_0) \\ (x-x_0) - 2y_0(y-y_0) \end{pmatrix} \\ +\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2}\varepsilon_(x,y) \\ \text{et} \lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \varepsilon(x,y) = 0 \end{array}}$$

III.A.2) Les points critiques de (S_3) sont solutions de :
$\left\{\begin{array}{l} y - x^2 = 0 \\ x - y^2 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y = x^2 \\ x - x^4 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow x = y = 0 \text{ ou } x = y = 1$
Les points critiques de (S_3) sont donc $(0,0)$ et $(1,1)$.

III.A.2) Chaque point critique fournit une solution maximale : $\begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \\ t \to \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{array}$ et $\begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \\ t \to \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{array}$,
c'est-à-dire une solution n'admettant aucun prolongement strict.
Les représentations de ces solutions, réduites aux points $(0,0)$ et $(1,1)$, sont donc des trajectoires maximales.

III.A.3) Cherchons une solution de (S_3) vérifiant en outre $x = y,\ x(t_0) = 0.5,\ y(t_0) = 0.5$. On obtient les deux équations :
$\left\{\begin{array}{l} x' = x(1-x) \\ y = x \end{array}\right. \Leftrightarrow \exists C \in \mathbb{R}^*, x = y = \dfrac{1}{1 + Ce^{-t}}.$

✓ La condition initiale $(0.5, 0.5, t_0)$ définit la solution par :
$\dfrac{1}{1 + Ce^{-t_0}} = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow C = e^{t_0}.$
D'où la paramétrisation de la trajectoire $x = y = \dfrac{1}{1 + e^{t_0 - t}}$. Une étude rapide montre que lorsque t décrit $\mathbb{R}$, $x = y$ décrit $]0, 1[$.
Le segment $](0,0), (1,1)[$ est donc la trajectoire maximale passant par $(0.5, 0.5)$.

✓ La condition initiale $(2, 2, t_0)$ définit la solution par :
$\dfrac{1}{1 + Ce^{-t_0}} = 2 \Leftrightarrow 1 + Ce^{-t_0} = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow C = -\dfrac{e^{t_0}}{2}.$
D'où la paramétrisation de la trajectoire $x = y = \dfrac{1}{1 - \dfrac{e^{t_0 - t}}{2}}$. Une étude rapide montre que lorsque t décrit $]t_0 - \ln 2, +\infty[$, $x = y$ décrit $]1, +\infty[$.
La demi droite d'équation cartésienne $y = x,\ x > 1$ est donc la trajectoire maximale passant par $(2,2)$.

III.A.4)a) L'ensemble des points des trajectoires maximales où la tangente à la trajectoire passant par le point est horizontale vérifie :
$y' = 0 \Leftrightarrow x = y^2$ et comme ces points ne sont pas critiques, $y \neq x^2 \Leftrightarrow x' \neq 0$.
L'ensemble des points cherchés a donc pour équation cartésienne $x = y^2,\ (x,y) \neq (0,0)$ et $(x,y) \neq (1,1)$.

III.A.4)b) L'ensemble des points des trajectoires maximales où la tangente à la trajectoire passant par le point est verticale vérifie :
$x' = 0 \Leftrightarrow x = y^2$ et comme ces points ne sont pas critiques, $x \neq y^2 \Leftrightarrow y' \neq 0$.
L'ensemble des points cherchés a donc pour équation cartésienne $y = x^2,\ (x,y) \neq (0,0)$ et $(x,y) \neq (1,1)$.

III.A.4)c) L'ensemble des points des trajectoires maximales où la tangente à la trajectoire passant par le point a pour pente 1 vérifie :

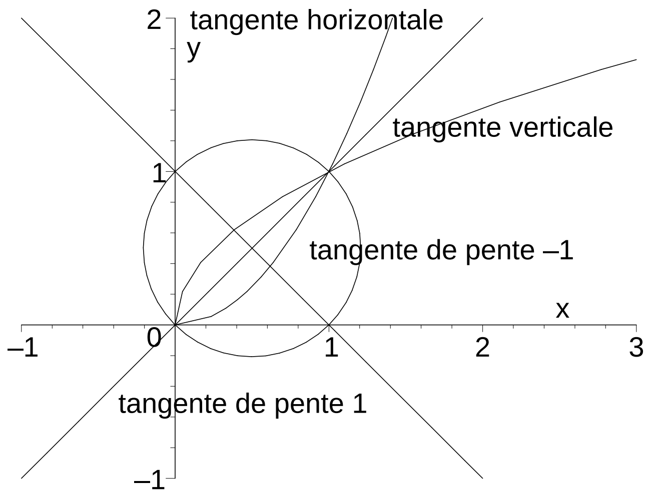
$x' = y' \Leftrightarrow x - y^2 = y - x^2$ et comme ces points ne sont pas critiques, $y \neq x^2$ ou $x \neq y^2$, ce qui montre $x' = y' \neq 0$.

L'ensemble des points cherchés a donc pour équation cartésienne $x^2 - y^2 + x - y = 0,\ (x, y) \neq (0, 0)$ et $(x, y) \neq (1, 1)$. On obtient les deux droites d'équation $x = y$ ou $x + y + 1 = 0$ privées des deux points critiques.

III.A.4)d) L'ensemble des points des trajectoires maximales où la tangente à la trajectoire passant par le point a pour pente -1 vérifie :

$x' = -y' \Leftrightarrow x - y^2 = -y + x^2$ et comme ces points ne sont pas critiques, $y \neq x^2$ ou $x \neq y^2$, ce qui montre $x' = -y' \neq 0$.

L'ensemble des points cherchés a donc pour équation cartésienne $x^2 + y^2 - x - y = 0,\ (x, y) \neq (0, 0)$ et $(x, y) \neq (1, 1)$. On obtient le cercle d'équation $\left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2 + \left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2 = \dfrac{1}{2}$ privé des deux points critiques.



Les points critiques sont exclus.

III.B)

✓ Au voisinage de $(0, 0)$, le système devient donc $X' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} X$.

L'on a vu, dans la question II.B.1) que les trajectoires de ce système admettent la paramétrisation dans $\mathcal{R}_{\pi/4}$:

$\begin{cases} x_1 = C_1 e^t \\ y_1 = C_2 e^{-t} \end{cases}$ avec $C_1,\ C_2 \in \mathbb{R}$.

Pour $C_1,\ C_2 \neq 0$, les trajectoires sont des branches d'hyperboles d'équation cartésienne $y_1 = \dfrac{k}{x_1}$ où x_1 est de signe constant. On retrouve bien des branches d'hyperbole.

Pour $C_2 = 0$, on retrouve bien des sous-ensembles de la première bissectrice.

✓ Au voisinage de $(1, 1)$, le système devient donc $X' = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} X$.

L'on a vu, dans la question II.B.1) que les trajectoires de ce système admettent la paramétrisation dans $\mathcal{R}_{\pi/4}$:

$\begin{cases} x_1 = C_1 e^{-t} \\ y_1 = C_2 e^{-3t} \end{cases}$ avec $C_1,\ C_2 \in \mathbb{R}$.

Pour $C_1,\ C_2 \neq 0$, les trajectoires sont des courbes d'équation cartésienne $y_1 = k x_1^3$ où x_1 est de signe constant. On retrouve bien dans le repère $((1, 1), \overrightarrow{u(\pi/4)}, \overrightarrow{v(\pi/4)})$ ce type de courbe avec pour $C_2 = 0$ des sous ensembles de la première bissectrice.

III.C.1) Supposons X_n calculé. On obtient X_{n+1} en résolvant l'équation d'inconnue X : $X'(t_n) = \dfrac{1}{\varepsilon}(X - X_n) \Leftrightarrow x = X_n + \varepsilon X'(t_n)$, ce qui donne :

$X_{n+1} = X_n + \varepsilon F(X(t_n)) = X_n + \varepsilon F(X_n) = H(X_n)$

La méthode d'Euler consiste donc à construire la suite (X_n) définie par $X_{n+1} = H(X_n)$.

III.C.2) Les points fixes de H vérifient :

$$\begin{aligned} H(X) = X \quad &\Leftrightarrow \begin{cases} x = x + \varepsilon(y - x^2) \\ y = y + \varepsilon(x - y^2) \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} y - x^2 = 0 \\ x - y^2 = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow (x,y) = (0,0) \text{ ou } (x,y) = (1,1) \end{aligned}$$

Les points fixes de H sont les points critiques de (S_3).

III.D.1)a) Soit $t \in]-0.5, 0.5[$.

$$\begin{aligned} \rho^2 t^2 - g(t)^2 \; &= \left(1 - \varepsilon + \frac{\varepsilon^2}{4}\right) t^2 - t^2\left(1 - 2\varepsilon + \varepsilon^2 - 2\varepsilon(1-\varepsilon)t + \varepsilon^2 t^2\right) \\ &= t^2\left(\varepsilon - \frac{3\varepsilon^2}{4} + 2\varepsilon(1-\varepsilon)t - \varepsilon^2 t^2\right) \end{aligned}$$

Étudions le signe de $h(t) = \varepsilon - \dfrac{3\varepsilon^2}{4} + 2\varepsilon(1-\varepsilon)t - \varepsilon^2 t^2$ sur $I =]-0.5, 0.5[$.

$\forall t \in I,\ h''(t) = -2\varepsilon^2 < 0$. h est donc concave et la courbe représentative de h est donc située au-dessus de la corde joignant les points d'abscisses -0.5 et 0.5.

Or $h(-0.5) = \varepsilon - \dfrac{3\varepsilon^2}{4} - \varepsilon(1-\varepsilon)t - \dfrac{\varepsilon^2}{4} = 0$ et

$h(0.5) = \varepsilon - \dfrac{3\varepsilon^2}{4} + \varepsilon(1-\varepsilon)t - \dfrac{\varepsilon^2}{4} = 2\varepsilon(1-\varepsilon) > 0$

On en déduit : $\forall t \in I,\ h(t) > 0$ et $\rho^2 t^2 - g(t)^2 \geq 0 \Leftrightarrow$

$$\boxed{\forall t \in I,\ |g(t)| \leq \rho |t|}$$

III.D.1)b) Par une récurrence simple, on a $\forall n \in \mathbb{N},\quad |t_{n+1}| \leq 0.5$, ce qui prouve $|t_{n+1}| \leq \rho |t_n|$.

D'où : $\forall n \in \mathbb{N},\quad |t_n| \leq \rho^n |t_0|$. Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} \rho^n = 0$,

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} t_n = 0}$$

III.D.1)c) On a $x_0 = y_0$. Supposons au rang n fixé, $x_n = y_n$ (hypothèse de récurrence). On a alors $x_{n+1} = x_n + \varepsilon(y_n - x_n^2) = y_n + \varepsilon(x_n - y_n^2) = y_{n+1}$.

Donc $\forall n \in \mathbb{N},\ x_n = y_n$ et $x_{n+1} = x_n + \varepsilon x_n(1 - x_n)$

Posons $u_n = x_n - 1$, on a alors :

$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} + 1 = u_n + 1 + \varepsilon(u_n + 1)(-u_n) \Leftrightarrow u_{n+1} = u_n(1 - \varepsilon) - u_n^2 = g(u_n)$.

Comme $|u_0| < 0.5$, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$ (d'après la question précédente. Donc :

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} x_n = \lim_{n \to +\infty} y_n = 1}$$

III.D.2)a) L'on a $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \sqrt{x^2 + y^2} \leq \|(x,y)\| \leq \sqrt{2}\sqrt{x^2 + y^2}$. D'où, en posant, $\sqrt{x^2 + y^2} = \left\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\|_2$,

$\forall n \in \mathbb{N},\ \|X_n - X^*\|_2 \leq \|X_n - X^*\| \leq \sqrt{2}\|X_n - X^*\|_2$ et

$\lim\limits_{n \to +\infty} \|X_n - X^*\| = 0 \Leftrightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} \|X_n - X^*\|_2 = 0$.

Ce qui montre :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} X_n = X^* \Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty} \|X_n - X^*\| = 0}$$

(J'ai montré que la convergence au sens du programme TSI (norme euclidienne) est équivalente à la convergence au sens de l'énoncé (norme infini)).

III.D.2)b) <u>L'énoncé ici est faux</u>, comme on peut le vérifier avec $u = -0.5,\ v = 0.5,\ \varepsilon = 1$.
On a alors : $G(T) = \begin{pmatrix} 0.75 \\ -1.25 \end{pmatrix}$ et $\|G(T)\| = 1.25 > \|T\| = 0.5$.
On peut l'aménager, comme me l'a proposé Alain Juhel (MP, Lille).
Si l'on prend $\varepsilon = 0.5$, et si l'on note $G = (G_1, G_2)$.
Si $\|T\| \leq 0.5$,

$$\begin{aligned}
|G_1(u,v)| &= |u(1-2\varepsilon) + \varepsilon v - \varepsilon v^2| \\
&\leq |u|(1-2\varepsilon) + \varepsilon|v| + \varepsilon v^2 \ (\text{ car } 1 - 2\varepsilon > 0) \\
&\leq (1-2\varepsilon)\|T\| + \varepsilon\|T\| + \varepsilon v^2 \\
&\leq (1-\varepsilon)\|T\| + \frac{\varepsilon}{2}|v| \ (\text{ car } \|T\| < \varepsilon = 0.5) \\
&\leq (1-\varepsilon)\|T\| + \frac{\varepsilon}{2}\|T\| \\
&\leq \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right)\|T\| = \rho\|T\|
\end{aligned}$$

De même : $|G_2(u,v)| \leq \rho\|T\|$. D'où :

$$\boxed{\|T\| \leq 0.5 \Rightarrow \|G(T)\| \leq \rho\|T\|}$$

III.D.2)c) Par une récurrence simple, on a $\forall n \in \mathbb{N},\ \ \|T_{n+1}\| \leq 0.5$, ce qui prouve $\|T_{n+1}\| \leq \rho\|T_n\|$.
D'où : $\forall n \in \mathbb{N},\ \ \|T_n\| \leq \rho^n \|T_0\|$. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \rho^n = 0$,

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} T_n = 0}$$

III.D.2)d) En posant $u_n = x_n - 1$ et $v_n = y_n - 1$, on a :

$$\begin{aligned}
X_{n+1} = H(X_n) \quad &\Leftrightarrow \begin{cases} x_{n+1} = x_n + \varepsilon(y_n - x_n^2) \\ y_{n+1} = y_n + \varepsilon(x_n - y_n^2) \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} u_{n+1} + 1 = u_n + 1 + \varepsilon(v_n + 1 - (u_n+1)^2) \\ v_{n+1} + 1 = v_n + 1 + \varepsilon(u_n + 1 - (v_n+1)^2) \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} u_{n+1} = u_n + \varepsilon(v_n - 2u_n - u_n^2 \\ v_{n+1} = v_n + \varepsilon(u_n - -2v_n - v_n^2 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow T_{n+1} = G(T_n) \text{ (en posant } T_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix})
\end{aligned}$$

Il est clair alors que si $\|T_n\|$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$, alors :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} X_n = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

$\Delta\Delta\Delta$

Rédigé par
Pierre Bron, professeur de Spéciales TSI
Lycée Chaptal, 6 allée Chaptal 22000 St Brieuc
Tel. 0296639414
Adresse électronique : BRON.Pierre@wanadoo.fr