MATHÉMATIQUES II

Définitions et notations

Dans tout le problème n désigne un entier naturel non nul et E l'espace vectoriel euclidien $\mathbb{R}^n$ rapporté à sa base canonique et muni du produit scalaire usuel. On utilisera l'isomorphisme, relativement à la base canonique, entre $\mathbb{R}^n$ et l'espace des matrices colonnes réelles d'ordre n ; ainsi à tout élément x de E on associera la matrice colonne notée X. On identifiera les matrices carrées d'ordre 1 et $\mathbb{R}$ et on pourra ainsi écrire le produit scalaire entre deux vecteurs de E sous la forme : $\langle x, y\rangle = {}^tXY$.

- On désigne par $\mathcal{O}_n$ l'ensemble des matrices orthogonales carrées d'ordre n et par I_n la matrice unité d'ordre n.
- On notera $\mathcal{S}_n$ l'espace vectoriel des matrices carrées réelles d'ordre n symétriques et $\mathcal{S}(E)$ l'espace des endomorphismes de E admettant dans la base canonique une matrice symétrique réelle. Ils seront dits symétriques. On notera $\mathcal{S}(E)^+$ (respectivement $\mathcal{S}(E)^{++}$) l'ensemble des endomorphismes dont les valeurs propres sont positives (respectivement strictement positives). $\mathcal{S}_n^+$ et $\mathcal{S}_n^{++}$ seront les espaces des matrices associées dans la base canonique.
- Pour tout n-uplet $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, on notera $\mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ la matrice diagonale dont les termes diagonaux sont, dans cet ordre, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.

Toutes les questions précédées de la mention « Application » peuvent être traitées en admettant éventuellement les résultats qui les précèdent.

Partie I - Décomposition d'un isomorphisme de E

I.A - Racine positive d'une matrice symétrique réelle positive

Dans cette section on se propose d'étudier l'existence et l'unicité de solutions dans $\mathcal{S}_n^+$ à l'équation matricielle $(\mathcal{R})$: $A = M^2$ où A désigne une matrice symétrique réelle positive fixée. On notera u l'unique endomorphisme de E de matrice A relativement à la base canonique.

Filière TSI

I.A.1)

a) Montrer l'existence d'une famille $(\lambda_i)_{1 \leq i \leq n}$ de réels positifs et d'une matrice P dans $\mathcal{O}_n$ tels que : $A = P\mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)^t P$.

b) On pose : $B = P\mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \ldots, \sqrt{\lambda_n})^t P$. Montrer que B est une solution de $(\mathcal{R})$.

I.A.2) On considère M une solution de $(\mathcal{R})$ et v l'unique endomorphisme de E de matrice M dans la base canonique.

a) Justifier la relation $u = v \circ v$.

b) Montrer que tout vecteur propre de v est un vecteur propre de u et préciser la relation entre les valeurs propres associées.

c) En déduire que, pour toute valeur propre λ de u, il existe un unique réel positif μ tel que l'espace propre de u associé à λ soit égal à celui de v associé à μ. Montrer aussi qu'il existe une base de E formée de vecteurs propres communs à u et v.

d) Déduire de ce qui précède que $(\mathcal{R})$ admet une solution unique qui sera appelée racine positive de A.

I.A.3) *Application :* on considère

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Montrer que c'est un élément de $\mathcal{S}_n^+$ et calculer sa racine positive.

I.B - Endomorphisme exponentiel d'un endomorphisme symétrique réel

Dans toute cette section, u est un endomorphisme symétrique, U est sa matrice dans la base canonique et $\mathcal{B} = \{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n\}$ désigne une base orthonormale de vecteurs propres pour u.

I.B.1)

a) Montrer qu'il existe une famille $(\lambda_i)_{1 \leq i \leq n}$ de réels tels que la matrice de u dans $\mathcal{B}$ soit $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$.

b) On note alors $\exp(u)$ l'unique endomorphisme de E dont la matrice dans $\mathcal{B}$ est $\mathrm{diag}(\exp(\lambda_1), \ldots, \exp(\lambda_n))$. Montrer que u et $\exp(u)$ ont les mêmes espaces propres et qu'on définit bien ainsi un unique endomorphisme symétrique strictement positif, indépendamment du choix de $\mathcal{B}$.

c) Déterminer $\exp(u)$ lorsque u est l'endomorphisme nul et lorsque u est l'identité sur E.

d) Montrer que $\exp(u)$ est inversible d'inverse $\exp(-u)$.

e) Vérifier la relation $\exp(2u) = \exp(u) \circ \exp(u)$.

On notera désormais Φ l'application de $\mathcal{S}(E)$ dans $\mathcal{S}(E)^{++}$ qui, à un endomorphisme symétrique, associe son endomorphisme exponentiel.

I.B.2) *Application*. Dans cette unique question on pose

$$U = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Déterminer la matrice de $\exp(u)$ dans la base canonique en fonction de $\mathrm{ch}(1)$ et $\mathrm{sh}(1)$.

I.B.3) Dans cette question a est un endomorphisme orthogonal de E et on note $a(\mathcal{B}) = \{a(\varepsilon_1), \ldots, a(\varepsilon_n)\}$.

a) Vérifier que $w = a \circ u \circ a^{-1}$ est un endomorphisme symétrique.

b) Montrer que $a(\mathcal{B})$ est une base orthonormale de vecteurs propres pour w et exprimer la matrice de w dans cette base. En déduire la matrice de $\exp(w)$ dans $a(\mathcal{B})$.

c) Exprimer la matrice de $a \circ \exp(u) \circ a^{-1}$ dans $a(\mathcal{B})$. Conclure.

d) Montrer que Φ est surjective.

e) En considérant les espaces propres respectifs de u et de $\exp(u)$, montrer que Φ est injective.

I.C - Décomposition d'un isomorphisme réel

Dans cette section f est un isomorphisme de E et M désigne sa matrice dans la base canonique.

I.C.1)

a) Montrer que ${}^tMM$ est un élément de $\mathcal{S}_n^{++}$.

b) Montrer qu'il existe un unique élément B de $\mathcal{S}_n^{++}$ tel que ${}^tMM = B^2$.

c) On pose $V = MB^{-1}$. Montrer que V ainsi définie est élément de $\mathcal{O}_n$.

d) Déduire de ce qui précède l'existence et l'unicité d'un couple (V, B) de matrices (B élément de $\mathcal{S}_n^{++}$ et V élément de $\mathcal{O}_n$) tel que $M = VB$.

I.C.2) *Application*. Déterminer les matrices V et B, puis identifier géométriquement l'endomorphisme associé à V dans la base canonique, dans les deux cas suivants :

a) $M = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -3 & 8 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$ b) $M = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

I.C.3) Montrer qu'il existe un unique couple (v, u), avec v endomorphisme orthogonal de E et u élément de $\mathcal{S}(E)$ tel que $f = v \circ \exp(u)$.

Vérifier de plus que ${}^tMM$ est la matrice, dans la base canonique, de $\exp(2u)$.

Partie II - Endomorphismes invariants d'une forme quadratique

II.A - Forme quadratique associée à une matrice symétrique

II.A.1)

a) Montrer que, pour toute matrice symétrique réelle A, on définit une forme bilinéaire symétrique en posant $\forall (x, y) \in E,\ \varphi(x, y) = {}^tXAY$. On notera Q la forme quadratique associée.

b) Montrer qu'on définit ainsi une application injective de $\mathcal{S}_n$ dans l'ensemble des formes quadratiques sur E. On admettra que cette application est aussi surjective.

II.A.2) Dans toute la suite de cette partie, A est un élément de $\mathcal{S}_n$ fixé, a est l'endomorphisme associé dans la base canonique et Q désigne la forme quadratique associée. De plus f désigne un endomorphisme de E de matrice M relativement à la base canonique. On dira que Q est invariant par f si $\forall x \in E, Q(f(x)) = Q(x)$.

On note $\mathcal{H}(E)$ l'ensemble des endomorphismes laissant Q invariant et $\mathcal{H}_n$ l'ensemble de leurs matrices dans la base canonique.

a) Montrer que $x \to Q(f(x))$ définit une forme quadratique sur E.

b) En utilisant ce qui précède, en déduire la caractérisation

$$(M \in \mathcal{H}_n) \Leftrightarrow ({}^tMAM = A).$$

II.B - Structure des invariants des formes quadratiques associées à des matrices involutives

Dans toute la fin du problème, A est une matrice symétrique réelle qui vérifie $A^2 = I$.

II.B.1) Montrer que tout élément de $\mathscr{H}(E)$ est inversible et que son inverse appartient à $\mathscr{H}(E)$.

II.B.2) Montrer que, si M est élément de $\mathscr{H}_n$, il en est de même pour sa transposée.

II.B.3) Montrer que $\mathscr{H}_n$ est un sous-groupe du groupe linéaire d'ordre n et donc que $\mathscr{H}(E)$ est un sous-groupe du groupe linéaire de E.

II.C - Caractérisation des endomorphismes orthogonaux dans $\mathscr{H}_n$

II.C.1) Soit M un élément de $\mathscr{O}_n$, f l'endomorphisme associé dans la base canonique. Montrer que M est un élément de $\mathscr{H}_n$ si et seulement si M commute avec A.

II.C.2) *Application*. Déterminer les conditions nécessaires et suffisantes sur (a, b, c, d) pour que A et M commutent, avec

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ et } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

En déduire, lorsque A est ainsi fixée, les matrices orthogonales dans $\mathscr{H}_2$.

II.C.3) On note $F = \ker(A - I)$ et $G = \ker(A + I)$.

a) Rappeler pourquoi F et G sont des sous-espaces vectoriels de E (éventuellement réduits à $\{0\}$), orthogonaux et supplémentaires.

b) Montrer que f, endomorphisme orthogonal, est élément de $\mathscr{H}(E)$ si et seulement si $f(F) = F$ et $f(G) = G$.

II.C.4) *Application*. Déterminer les matrices orthogonales de $\mathscr{H}_n$ lorsque

$$n = 2 \text{ et } A = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}.$$

On pourra commencer par déterminer F, G ainsi qu'une base de chaque sous-espace, puis la forme de la matrice associée à f dans une base adaptée à la décomposition $E = F \oplus G$.

II.D - Caractérisation des endomorphismes symétriques strictement positifs dans $\mathscr{H}(E)$

II.D.1) Montrer que f, élément de $\mathscr{S}(E)^{++}$, est dans $\mathscr{H}(E)$ si et seulement si $f \circ a \circ f = a$.

II.D.2) *Application*. Dans cette question, a est l'endomorphisme associé à

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Déterminer toutes les matrices M symétriques réelles d'ordre 2 telles que $MAM = A$. En déduire dans ce cas tous les endomorphismes de $\mathcal{S}(E)^{++}$ qui sont dans $\mathcal{H}(E)$.

II.D.3) Soit $f \in \mathcal{S}(E)^{++}$. On note u l'unique élément de $\mathcal{S}(E)$ tel que $f = \exp(u)$. Montrer que f est élément de $\mathcal{H}(E)$ si et seulement si $a \circ u \circ a = -u$.

II.D.4) *Application*. Dans cette question a est l'endomorphisme associé à

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Déterminer toutes les matrices U symétriques réelles d'ordre 2 qui vérifient $UA = -AU$. Retrouver alors les résultats de II.D.2.

II.D.5) Soit $f \in \mathcal{S}(E)^{++}$. Montrer que f est dans $\mathcal{H}(E)$ si et seulement si $u(F) \subset G$ et $u(G) \subset F$.

II.D.6) *Application*. Déterminer les endomorphismes symétriques strictement positifs de $\mathcal{H}(E)$ dans le cas où a est l'endomorphisme associé dans la base canonique à

$$A = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}.$$

II.E - Caractérisation de $\mathcal{H}(E)$

II.E.1) Soit v un endomorphisme orthogonal et u un endomorphisme symétrique tels que $v(F) = F$, $v(G) = G$ et $u(F) \subset G, v(G) \subset F$. Montrer que $f = v \circ \exp(u)$ est dans $\mathcal{H}(E)$.

II.E.2) Réciproquement, on considère f un élément de $\mathcal{H}(E)$.

a) Justifier rapidement l'existence d'un endomorphisme v orthogonal et d'un endomorphisme u symétrique tels que $f = v \circ \exp(u)$.

b) En utilisant les différents résultats trouvés et en particulier la question I.C.3, montrer que nécessairement $\exp(2u)$ est dans $\mathcal{H}(E)$. En déduire que $\exp(u)$ puis v sont dans $\mathcal{H}(E)$.

II.E.3) Déduire de ce qui précède une caractérisation de $\mathcal{H}(E)$.

Partie III - Applications géométriques

III.A - Transformations affines laissant invariante une conique

Le plan affine est rapporté à une origine O et à une base orthonormale $\{i, j\}$. On pourra utiliser l'isomorphisme entre l'espace euclidien de dimension 2 sous-jacent et $\mathbb{R}^2$ muni du produit scalaire usuel et rapporté à sa base canonique. On considère la conique $\mathscr{C}$ définie par l'équation $xy + 3x + 5y - 4 = 0$.

III.A.1)

a) À l'aide d'un changement d'origine, montrer que cette conique admet un centre de symétrie Ω que l'on déterminera.

b) Écrire une équation de $\mathscr{C}$ dans le repère $(\Omega, \{i, j\})$.

c) Quelle est la nature de la conique ? En donner une représentation graphique.

III.A.2) On se propose de déterminer toutes les transformations affines qui fixent Ω et laissent globalement invariante la conique $\mathscr{C}$.

a) Montrer que le problème équivaut à déterminer $\mathscr{H}_2$ lorsque

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

b) En utilisant ce qui a été fait précédemment achever la détermination des transformations affines laissant globalement invariante $\mathscr{C}$.

III.B - Transformations affines laissant invariante une quadrique

L'espace affine est rapporté à une origine O et à une base orthonormale $\mathscr{B}$. On pourra utiliser l'isomorphisme entre l'espace euclidien de dimension 3 sous-jacent et $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire usuel et rapporté à sa base canonique.

On se propose d'étudier les transformations affines qui fixent O et laissent globalement invariante l'une des deux quadriques $\mathscr{S}_1$ ou $\mathscr{S}_2$ définies par les équations :

$$(\mathscr{S}_1) \quad x^2 + y^2 + z^2 = 1 \text{ et } (\mathscr{S}_2) \quad x^2 + y^2 - z^2 = 1.$$

III.B.1)

a) Préciser la nature de $\mathscr{S}_1$.

b) Déterminer dans les deux cas la matrice de symétrie A associée à la forme quadratique, ainsi que les sous-espaces vectoriels F et G. Montrer que les transformations affines cherchées sont entièrement déterminées par $\mathscr{H}(E)$.

III.B.2) Déterminer entièrement ces transformations dans le cas de $\mathscr{S}_1$.

III.B.3) **Cas de $\mathscr{S}_2$.**

a) Montrer que les matrices orthogonales de $\mathscr{H}_3$ sont les matrices de la forme

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\alpha\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \alpha\cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}$$

où θ est élément de $[0,2\pi[$ et (α, β) un couple d'éléments de $\{-1, 1\}$.

b) Étudier pour θ fixé les quatre transformations associées lorsque α et β prennent les valeurs 1 et -1. On étudiera précisément le cas particulier $\theta = 0$.

III.B.4) Recherche des endomorphismes symétriques de la forme $\exp(u)$.

a) Montrer que l'ensemble des endomorphismes u tels que $\exp(u)$ soit dans $\mathscr{H}(E)$ est un espace vectoriel de dimension 2 et donner la forme générale de U, matrice de u dans la base canonique.

b) Déterminer une base de vecteurs propres commune à u et $\exp(u)$ ainsi que la matrice de $\exp(u)$ dans une telle base.

••• FIN •••
