Centrale Supélec Maths 2 TSI 2007

Partie I Décomposition d'un isomorphisme de E.

I-A) $A \in \mathcal{S}_n^+$. Etude de l'équation $(\mathcal{R})$: $M^2 = A$ dans $\mathcal{S}_n^+$.

I-A.1.a) Comme A est une matrice symétrique réelle, elle est diagonalisable dans une base orthonormale de vecteurs propres.

Donc, il existe une matrice orthogonale P et n réels $\lambda_1, ..., \lambda_n$ tels que: $\boxed{A = P.\text{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n).{}^tP}$.

On sait, de plus que $A \in \mathcal{S}_n^+$ ce qui signifie que $\boxed{\text{les } \lambda_i \text{ sont positifs}}$.

I-A.1.b) Si $B = P.\text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, ..., \sqrt{\lambda_n}).{}^tP$,

→ ${}^tB = {}^t({}^tP).{}^t[\text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, ..., \sqrt{\lambda_n})].{}^tP = P.\text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, ..., \sqrt{\lambda_n}).{}^tP = B$ donc $B \in \mathcal{S}_n$.

→ Les valeurs propres de B sont les réels positifs $\sqrt{\lambda_i}$ donc $B \in \mathcal{S}_n^+$.

→ $B^2 = P.\text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, ..., \sqrt{\lambda_n}).{}^tP.P.\text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, ..., \sqrt{\lambda_n}).P$

et, comme ${}^tP.P = I_n$, $B^2 = P.[\text{diag}(\sqrt{\lambda_1}, ..., \sqrt{\lambda_n})]^2.{}^tP = P.\text{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n).{}^tP = A$

Donc $\boxed{\text{B est bien une solution de } (\mathcal{R})}$.

I-A.2) $M \in \mathcal{S}_n^+$ et $M^2 = A$.

I-A.2.a) u est l'endomorphisme de E canoniquement associé à A.
Si v est l'endomorphisme de E canoniquement associé à M
alors $v \circ v$ est l'endomorphisme de E canoniquement associé à M^2.

La relation $M^2 = A$ se traduit par: $\boxed{v \circ v = u}$.

I-A.2.b) Soit x un vecteur propre de v associé à la valeur propre α, $x \neq 0_E$ et $v(x) = \alpha x$.
Par suite, $u(x) = v[v(x)] = v[\alpha x] = \alpha.v(x) = \alpha.(\alpha x) = \alpha^2 x$.

Donc $\boxed{\begin{array}{l}\text{si } x \text{ est un vecteur propre de } v \text{ associé à la valeur propre } \alpha \\ \text{alors } x \text{ est aussi un vecteur propre de } u \text{ associé à la valeur propre } \alpha^2\end{array}}$

I-A.2.c) $M \in \mathcal{S}_n^+$ donc il existe une matrice orthogonale P et des réels positifs $\mu_1, ..., \mu_n$ tels que: $M = P.\text{diag}(\mu_1, ..., \mu_n).{}^tP$. Par suite, $A = M^2 = P.\text{diag}(\mu_1^2, ..., \mu_n^2).{}^tP$.
Les valeurs propres de A donc de u sont les nombres $\mu_1^2, ..., \mu_n^2$.

On en déduit que si λ est une valeur propre de u alors une des valeurs propres μ de v vérifie $\boxed{\mu = \sqrt{\lambda}}$ ce qui définit μ de manière unique.

Si on note $C_1, ..., C_n$ les vecteurs-colonnes de P et $I = \{i \in [\![1, n]\!], \mu_i = \mu\}$
alors $\text{Vect}(\{C_i\}_{i \in I})$ est le sous espace propre de v associé à la valeur propre μ .
Mais, comme les nombres μ_i sont positifs, $I = \{i \in [\![1, n]\!], \mu_i^2 = \mu^2 = \lambda\}$
donc $\text{Vect}(\{C_i\}_{i \in I})$ est aussi le sous espace propre de u associé à la valeur propre λ .

Donc $\boxed{(C_1, ..., C_n) \text{ est une base de vecteurs propres aussi bien pour } u \text{ que pour } v}$
car les μ_i^2 sont les valeurs propres de u.

I-A.2.d) On diagonalise les matrices A et M dans la base commune de vecteurs propres et on obtient $A = P.\mathrm{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n).{}^tP$ et $M = P.\mathrm{diag}(\mu_1, ..., \mu_n).{}^tP$.

$M^2 = A \Leftrightarrow P.\mathrm{diag}(\mu_1^2, ..., \mu_n^2).{}^tP = P.\mathrm{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n).{}^tP \Leftrightarrow \mathrm{diag}(\mu_1^2, ..., \mu_n^2) = \mathrm{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ car les matrice P et ${}^tP$ sont inversibles.

Par suite, $M^2 = A \Leftrightarrow \forall i \in [\![1, n]\!],\ \mu_i = \sqrt{\lambda_i}$ ce qui définit M de manière unique.

$\boxed{\text{Si } A \in \mathcal{S}_n^+ \text{ alors l'équation } B^2 = A \text{ admet une racine unique dans } \mathcal{S}_n^+}$.

I-A.3) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ est une matrice symétrique et $P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda - 3)$.

Les valeurs propres de A sont les deux réels positifs 1 et 3 donc $\boxed{A \in \mathcal{S}_2^+}$.

→ $(x, y) \in E_1 \Leftrightarrow x = y$ donc $E_1 = \mathrm{Vect}((1, 1))$.
→ $(x, y) \in E_3 \Leftrightarrow x = -y$ donc $E_3 = \mathrm{Vect}((-1, 1))$.

La famille (e_1, e_2) avec $e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1)$ et $e_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 1)$ est une base orthonormale de vecteurs propres de A.

Par suite, $A = P.D.{}^tP$ avec $P = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

La racine positive de A est donc la matrice $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

ce qui donne $\boxed{\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+\sqrt{3} & 1-\sqrt{3} \\ 1-\sqrt{3} & 1+\sqrt{3} \end{pmatrix}}$.

I-B) Endomorphisme exponentiel d'un endomorphisme symétrique réel.
$u \in \mathcal{S}$ et U est sa matrice dans la base canonique.
$\mathcal{B} = (\varepsilon_1, ..., \varepsilon_n)$ est une base orthonormale de vecteurs propres pour u.

I-B.1.a) Comme $\mathcal{B}$ est une base de vecteurs propres de u, $\forall i \in [\![1, n]\!],\ \exists \lambda_i \in \mathbb{R},\ u(\varepsilon_i) = \lambda_i \varepsilon_i$.

La matrice de u dans la base $\mathcal{B}$ est donc $\boxed{D = \mathrm{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n)}$.

I-B.1.b) La matrice de passage P de la base canonique à la base $\mathcal{B}$ est une matrice orthogonale car c'est une matrice de passage entre deux bases orthonormales. On la note $P = (C_1, ..., C_n)$.

La matrice de $\exp(u)$ dans la base $\mathcal{B}$ est $\Delta = \mathrm{diag}(\exp(\lambda_1), ..., \exp(\lambda_n))$.
Dans la base canonique, la matrice de $\exp(u)$ est $P.\Delta.{}^tP$ et celle de u est $U = P.D.{}^tP$.

Soit λ une valeur propre de u, on note encore $I = \{i \in [\![1, n]\!],\ \lambda_i = \lambda\}$.
Le sous-espace propre de u associé à la valeur propre λ est $\mathrm{Vect}(\{C_i\}_{i\in I})$.

Le réel $\exp(\lambda)$ est une valeur propre de $\exp(u)$ et le sous-espace propre de $\exp(u)$ associé à cette valeur propre est $\mathrm{Vect}(\{C_i\}_{i\in J})$ avec $J = \{i \in [\![1, n]\!], \exp(\lambda_i) = \exp(\lambda)\}$.
La fonction exponentielle étant bijective, I = J.
Donc $\boxed{u \text{ et } \exp(u) \text{ ont les mêmes sous-espaces propres}}$.

${}^t(P.\Delta.{}^tP) = {}^t({}^tP).{}^t\Delta.{}^tP = P.\Delta.{}^tP$ donc $\exp(u)$ est un endomorphisme symétrique.
Par ailleurs, les valeurs propres de $\exp(u)$ sont les réels $\exp(\lambda_i)$ qui sont tous strictement positifs.
Par suite: $\boxed{\exp(u) \text{ est un endomorphisme symétrique strictement positif}}$.

Les valeurs propres de $\exp(u)$ ainsi que ses sous-espaces propres ne dépendent pas du choix de $\mathcal{B}$, donc $\boxed{\text{la définition de } \exp(u) \text{ ne dépend pas du choix de } \mathcal{B}}$.

I-B.1.c) $\rightarrow$ Si $u = 0$ alors $D = O_n$ et $\Delta = I_n$. Par suite: $\boxed{\text{si } u = 0 \text{ alors } \exp(u) = id}$.

$\rightarrow$ Si $u = id$ alors $D = I_n$ et $\Delta = eI_n$. Par suite: $\boxed{\text{si } u = id \text{ alors } \exp(u) = e.id}$.

I-B.1.d) $\rightarrow$ $\det[\exp(u)] = \prod_{i=1}^{n} \exp(\lambda_i) \neq 0$ donc $\boxed{\exp(u) \in GL(E)}$.

$\rightarrow$ Dans la base $\mathcal{B}$, $\exp(u) \circ \exp(-u)$ a pour matrice
$\text{diag}(\exp(\lambda_1), ..., \exp(\lambda_n)) \times \text{diag}(\exp(-\lambda_1), ..., \exp(-\lambda_n)) = \text{diag}(1, ..., 1) = I_n$.
Par suite, $\exp(u) \circ \exp(-u) = id$ et $\boxed{[\exp(u)]^{-1} = \exp(-u)}$.

I-B.1.e) Dans la base $\mathcal{B}$,

- la matrice de $2u$ est $2.\text{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n) = \text{diag}(2\lambda_1, ..., 2\lambda_n)$
  donc la matrice de $\exp(2u)$ est $\text{diag}(\exp(2\lambda_1), ..., \exp(2\lambda_n))$.
- la matrice de $\exp(u) \circ \exp(u)$ est $[\text{diag}(\exp(\lambda_1), ..., \exp(\lambda_n))]^2$
  donc c'est $\text{diag}(\exp(2\lambda_1), ..., \exp(2\lambda_n))$.

Par suite, $\boxed{\exp(2u) = \exp(u) \circ \exp(u)}$.

I-B.2) $U = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ appartient à $\mathcal{S}_3$.

$P_U(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 0 & 1 \\ 0 & -\lambda & 0 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + \lambda = -\lambda(\lambda - 1)(\lambda + 1)$ d'où $sp(U) = \{ -1_{(1)}, 0_{(1)}, 1_{(1)} \}$.

$\rightarrow$ $(x, y, z) \in E_{-1} \Leftrightarrow \begin{cases} x + z = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ donc $E_{-1} = \text{Vect}((1, 0, -1))$.

$\rightarrow$ $(x, y, z) \in E_0 \Leftrightarrow \begin{cases} z = 0 \\ x = 0 \end{cases}$ donc $E_0 = \text{Vect}((0, 1, 0))$.

$\rightarrow$ $(x, y, z) \in E_1 \Leftrightarrow \begin{cases} x - z = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ donc $E_1 = \text{Vect}((1, 0, 1))$.

On utilise la base orthonormale de vecteurs propres (e_1, e_2, e_3)
avec $e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, -1)$, $e_2 = (0, 1, 0)$ et $e_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 1)$.

$U = P.D.{}^tP$ avec $P = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

La matrice de $\exp(u)$ dans la base canonique est $P.\Delta.{}^tP$ avec $\Delta = \begin{pmatrix} e^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix}$.

On obtient la matrice $\boxed{\begin{pmatrix} \text{ch}(1) & 0 & \text{sh}(1) \\ 0 & 1 & 0 \\ \text{sh}(1) & 0 & \text{ch}(1) \end{pmatrix}}$.

I-B.3) **$a \in O(E)$ et $a(\mathcal{B}) = \{a(\varepsilon_1), ..., a(\varepsilon_n)\}$.**

I-B.3.a) On note A la matrice de a dans la base canonique. Comme $a \in O(E)$, $A^{-1} = {}^tA$.
La matrice de w dans la base canonique est $W = A.U.A^{-1} = A.U.{}^tA$.
${}^tW = {}^t({}^tA).{}^tU.{}^tA = A.U.{}^tA = W$ (car ${}^tU = U$) donc $W \in \mathcal{S}_n$ et $\boxed{w \in \mathcal{S}(E)}$.

I-B.3.b) L'image d'une base orthonormale de E par un automorphisme orthogonal de E est encore une base orthonormale de E.
Par suite: $\boxed{a(\mathcal{B}) \text{ est une base orthonormale de E}}$.

$\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\exists \lambda_i \in \mathbb{R}$, $u(\varepsilon_i) = \lambda_i.\varepsilon_i$.
Donc $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $w[a(\varepsilon_i)] = a \circ u \circ a^{-1} \circ a(\varepsilon_i) = a \circ u(\varepsilon_i) = a(\lambda_i \varepsilon_i) = \lambda_i.a(\varepsilon_i)$.
Par ailleurs, $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $a(\varepsilon_i) \neq 0_E$ car ce sont des vecteurs d'une base de E.
Donc $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $a(\varepsilon_i)$ est un vecteur propre de w associé à la valeur propre λ_i.
Par suite: $\boxed{a(\mathcal{B}) \text{ est une base orthonormale de E formée de vecteurs propres pour } w}$.

$\boxed{\text{La matrice de } w \text{ dans la base } a(\mathcal{B}) \text{ est } D = \text{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n)}$

et $\boxed{\text{celle de } \exp(w) \text{ est } \Delta = \text{diag}(\exp(\lambda_1), ..., \exp(\lambda_n))}$.

I-B.3.c) $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\exp(u)(\varepsilon_i) = \exp(\lambda_i).\varepsilon_i$.
Donc $a \circ \exp(u) \circ a^{-1} \circ a(\varepsilon_i) = a \circ \exp(u)(\varepsilon_i) = a[\exp(\lambda_i).\varepsilon_i] = \exp(\lambda_i).[a(\varepsilon_i)]$.
On en déduit que $a(\mathcal{B})$ est une base orthonormale de vecteurs propres de $a \circ \exp(u) \circ a^{-1}$
et que la matrice de cet endomorphisme dans cette base est $\Delta = \text{diag}(\exp(\lambda_1), ..., \exp(\lambda_n))$.
Par suite, $\boxed{\text{si } a \in O(E) \text{ et } u \in \mathcal{S}(E) \text{ alors } \exp[a \circ u \circ a^{-1}] = a \circ \exp(u) \circ a^{-1}}$.

I-B.3.d) Soit u un élément quelconque de $\mathcal{S}(E)^{++}$ alors sa matrice U peut s'écrire sous la forme
$U = P.\text{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n).{}^tP$. avec tous les $\lambda_i > 0$ et $P \in O_n$.
Soit V la matrice $P.\text{diag}(\ln(\lambda_1), ..., \ln(\lambda_n)).{}^tP$.
On note $\begin{cases} p \text{ l'endomorphisme canoniquement associé à P} \\ p \text{ l'endomorphisme canoniquement associé à diag}(\ln(\lambda_1), ..., \ln(\lambda_n)) \end{cases}$
Dans la base canonique, V est la matrice de $v = p \circ s \circ p^{-1}$ avec $p \in O(E)$ et $s \in \mathcal{S}(E)$.
$v \in \mathcal{S}(E)$ et $\Phi(v) = \exp(v) = \exp(p \circ v \circ p^{-1}) = p \circ \exp(v) \circ p^{-1} = u$.
Donc $\boxed{\Phi \text{ est surjectif}}$.

I-B.3.e) Si u et v deux endomorphismes symétriques tels que $\Phi(u) = \Phi(v)$ donc tels que $\exp(u) = \exp(v)$.

→ Les valeurs propres de u sont les logarithmes népériens des valeurs propres de $\exp(u)$ et celles de v sont les logarithmes népériens des valeurs propres de $\exp(v)$.
Comme $\exp(u) = \exp(v)$, u et v ont les mêmes valeurs propres.

→ u et $\exp(u)$ ont mêmes sous-espaces propres.
De même, v et $\exp(v)$ ont mêmes sous-espaces propres.
Comme $\exp(u) = \exp(v)$, u et v ont les mêmes sous-espaces propres.

Par suite: $u = v$ et $\boxed{\Phi \text{ est injective}}$.

I-C) $\boxed{\textbf{Décomposition d'un isomorphisme réel}}$.

$f \in$ GL(E) et M est sa matrice dans la base canonique.

I-C.1.a) $\rightarrow$ ${}^t({}^tM.M) = {}^tM.{}^t({}^tM) = {}^tM.M$ donc ${}^tM.M \in \mathcal{S}_n$.

$\rightarrow$ Soit X un vecteur propre de ${}^tM.M$ associé à la valeur propre λ,
On a ${}^tM.M.X = \lambda.X$ donc ${}^tX.{}^tM.M.X = {}^tX.\lambda.X$ soit ${}^t(MX).(MX) = \lambda.{}^tX.X$
ce qui s'écrit: $\|MX\|^2 = \lambda\|X\|^2$ et, comme $X \neq 0$, $\lambda \geq 0$ donc ${}^tM.M \in \mathcal{S}_n^{+}$.

$\rightarrow$ Si on avait $\lambda = 0$, ceci entrainerait $MX = 0$ avec $X \neq 0$.
Or ceci est incompatible avec $f \in$ GL(E). Par suite: ${}^tM.M \in \mathcal{S}_n^{++}$.

$\boxed{\text{Si } M \in GL(n) \text{ alors } {}^tM.M \in \mathcal{S}_n^{++}}$.

I-C.1.b) On sait que si $A \in \mathcal{S}_n^{+}$ alors l'équation $B^2 = A$ admet une solution unique dans $\mathcal{S}_n^{+}$.
Comme ${}^tM.M \in \mathcal{S}_n^{++} \subset \mathcal{S}_n^{+}$, l'équation $B^2 = {}^tM.M$ admet une solution unique dans $\mathcal{S}_n^{+}$.
Il reste à montrer que cette solution est dans $\mathcal{S}_n^{++}$.
Soit X un vecteur propre de B associé à la valeur propre λ,
$B^2X = B(\lambda X) = \lambda.BX = \lambda^2.X$ donc ${}^tM.M.X = \lambda^2.X$ d'où ${}^tX.{}^tM.M.X = {}^tX.\lambda^2.X$
ce qui s'écrit ${}^t(MX).(MX) = \lambda^2.{}^tX.X$ soit $\|MX\|^2 = \lambda^2.\|X\|^2$.
Comme précédemment, $\lambda = 0$ entrainerait $MX = 0$ avec $X \neq 0$ ce qui est impossible.

$\boxed{\text{Si } M \in GL(n) \text{ alors l'équation } B^2 = {}^tM.M \text{ admet une solution unique dans } \mathcal{S}_n^{++}}$.

I-C.1.c) Si $V = M.B^{-1}$ alors ${}^tV.V = {}^t(B^{-1}).{}^tM.M.B^{-1} = {}^t(B^{-1}).{}^tB^2.B^{-1} = ({}^tB)^{-1}.B$ car ${}^t(B^{-1}) = ({}^tB)^{-1}$.
Comme B est une matrice symétrique, ${}^tV.V = ({}^tB)^{-1}.{}^tB = I_n$ donc $\boxed{V \in \mathcal{O}_n}$.

I-C.1.d) Si $B \in \mathcal{S}_n^{++}$ et $V \in \mathcal{O}_n$ vérifient $M = V.B$ alors ${}^tM = {}^tB.{}^tV$
donc ${}^tM.M = {}^tB.{}^tV.V.B = B.I_n.B = B^2$ car ${}^tV.V = I_n$ et ${}^tB = B$.
Ceci détermine B de manière unique dans $\mathcal{S}_n^{++}$ d'après le b-).
Ensuite, $M = V.B$ donne $V = M.B^{-1}$ avec $V \in \mathcal{O}_n$ d'après le c-).

$\boxed{\text{Si } M \in GL(n) \text{ alors } \exists!(V, B) \in \mathcal{O}_n \times \mathcal{S}_n^{++}, \quad M = V.B}$.

I-C.2.a) $\rightarrow$ Si $M = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -3 & 8 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$ alors $\det(M) = -2 \neq 0$ donc $M \in GL(n)$.

$\rightarrow$ ${}^tM.M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ donc $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $B \in \mathcal{S}_n^{++}$.

$\rightarrow$ $V = M.B^{-1} = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} -3 & 8 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ et $V \in \mathcal{O}(2)$.

Donc $\boxed{M = V.B \text{ avec } V = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{O}(2) \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{S}_n^{++}}$.

$\rightarrow$ $\det(V) = -1$ donc V est la matrice d'une réflexion plane.

$\rightarrow$ Pour V, $(x, y) \in E_1 \Leftrightarrow y = 2x$ d'où $E_1 = \text{Vect}((1, 2))$.

$\boxed{\text{L'endomorphisme associé à V est la réflexion d'axe Vect((1, 2))}}$.

I-C.2.b) $\rightarrow$ Si $M = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ alors $\det(M) = 27 \neq 0$ donc $M \in GL(E)$.

$\rightarrow$ ${}^tM.M = 9I_3$ d'où $B = 3I_3$ et $B \in \mathcal{S}_n^{++}$.

$\rightarrow$ $V = \frac{1}{3}M$ et $V \in O_3$.

Donc $\boxed{M = V.B \text{ avec } V = \frac{1}{3}M \in O_3 \text{ et } B = 3I_3 \in \mathcal{S}_n^{++}}$.

$\rightarrow$ $\det(V) = 1$ donc V est la matrice d'une rotation r.

$\rightarrow$ Pour V, $(x, y, z) \in E_1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ z = 3y \end{cases}$ donc r est une rotation d'axe $\overrightarrow{\Delta} = \mathrm{Vect}((1, 1, 3))$.

$\rightarrow$ Si θ est l'angle de cette rotation, $1 + 2\cos\theta = \mathrm{tr}(V) = -\frac{2}{3}$ donc $\theta = \pm \mathrm{Arccos}\left(-\frac{5}{6}\right)$.

$\rightarrow$ $(1, 0, 0) \notin E_1$, $V\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\frac{1}{3}\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \frac{5}{3} > 0$.

$\boxed{\text{V est la matrice de la rotation d'axe Vect}((1, 1, 3)) \text{ et d'angle } \theta = \mathrm{Arccos}\left(-\frac{5}{6}\right)}$.

I-C.3) Si $M \in GL(n)$ alors M s'écrit de manière unique $M = V.B$ avec $V \in O_n$ et $B \in \mathcal{S}_n^{++}$.
Autrement dit, si $f \in GL(E)$ alors f s'écrit de manière unique $f = v \circ b$ avec $v \in O(E)$ et $b \in \mathcal{S}(E)^{++}$.
On sait que l'équation (d'inconnue u) $\exp(u) = b$ admet une solution unique dans $\mathcal{S}(E)$ car on a vu que Φ était une bijection de $\mathcal{S}(E)$ dans $\mathcal{S}(E)^{++}$.

Par suite: $\boxed{\text{si } f \in GL(E) \text{ alors } f \text{ s'écrit de manière unique } f = v \circ \exp(u) \text{ avec } v \in O(E) \text{ et } u \in \mathcal{S}(E)}$.

${}^tM.M = B^2$ est la matrice $\exp(u) \circ \exp(u)$ donc $\boxed{{}^tM.M \text{ est la matrice } \exp(2u)}$.

Partie II Endomorphismes invariants d'une forme quadratique.

II-A) Forme quadratique associée à une matrice symétrique.

II-A.1.a) **$A\in\mathcal{S}_n$ et $\forall(x, y)\in E^2$, $\varphi(x, y) = {}^tX.A.Y$.**

$\rightarrow$ $\forall(x, y)\in E^2$, $\varphi(x, y) = {}^tX.(A.Y)\in\mathbb{R}$ car c'est le produit scalaire euclidien de x par $A(y)$.

$\rightarrow$ $\forall(x, y)\in E^2$, $\varphi(y, x) = {}^tY.A.X = {}^t({}^tX.{}^tA.Y) = {}^t({}^tX.A.Y)$ car A est symétrique.

donc $\forall(x, y)\in E^2$, $\varphi(y, x) = {}^t\varphi(x, y)= \varphi(x, y)$ car $\varphi(x, y)$ est un réel.

Par suite, φ est bien une *forme symétrique*.

$\rightarrow$ $\forall\lambda\in\mathbb{R}$, $\forall(x, x', y)\in E^3$,

$\varphi(\lambda x + x', y) = {}^t(\lambda X + X').A.Y = (\lambda{}^tX + {}^tX').A.Y = \lambda{}^tX.A.Y + {}^tX'.A.Y = \lambda\varphi(x, y) + \varphi(x', y)$.

donc φ est *linéaire à gauche* et, avec la symétrie, φ est *bilinéaire*.

$\boxed{\text{Si } A\in\mathcal{S}_n \text{ alors } \varphi(x, y) = {}^tX.A.Y \text{ définit une forme bilinéaire symétrique sur E}}$.

La forme quadratique associée à φ est définie par: $\boxed{x\in E \longmapsto Q(x) = {}^tX.A.X}$.

II-A.1.b) Note: Si $A = (a_{i,j})\in M_n(R)$ et si $B = (e_1, ..., e_n)$ est la base canonique de E

alors $\forall(i, j)\in[\![1, n]\!]^2$, ${}^tE_i.A.E_j = a_{i,j}$

car $\left\{\begin{array}{l} A.E_j \text{ donne le } j\text{-ème vecteur colonne de A} \\ {}^tE_i.(A.E_j) \text{ donne le } i\text{-ème élément de ce vecteur colonne}\end{array}\right.$

Si Ψ est l'application de $\mathcal{S}_n$ dans l'ensemble des formes bilinéaires symétriques de E

définie par Ψ : $A\in\mathcal{S}_n \longmapsto \varphi$ telle que $\forall(x, y)\in E^2$, $\varphi(x, y) = {}^tX.A.Y$,

$\Psi(A) = \Psi(B) \Leftrightarrow \forall(x, y)\in E^2$, ${}^tX.A.Y = {}^tX.B.Y$

donc $\Psi(A) = \Psi(B) \Rightarrow \forall(i, j)\in[\![1, n]\!]^2$, ${}^tE_i.A.E_j = {}^tE_i.B.E_j$

soit $\Psi(A) = \Psi(B) \Rightarrow \forall(i, j)\in[\![1, n]\!]^2$, $a_{i,j} = b_{i,j}$ ce qui signifie que A = B.

Par suite: Ψ est injective.

Comme il y a bijection entre les formes quadratiques et les formes bilinéaires symétriques,

$\boxed{\text{l'application } A\in\mathcal{S}_n \longmapsto Q \text{ telle que } \forall x\in E,\ Q(x) = {}^tX.A.X \text{ est injective}}$.

II-A.2) **$A\in\mathcal{S}_n$ et a est l'endomorphisme canoniquement associé à A et $Q(x) = {}^tX.A.X$**
$M\in M_n(\mathbb{R})$ et f est l'endomorphisme canoniquement associé à M.
Q est invariant par f $\Leftrightarrow$ $\forall x\in E$, $Q[f(x)] = Q(x)$.
$\mathcal{H}(E) = \{ f\in\mathcal{L}(E),$ Q est invariant par $f \} = \{f\in\mathcal{L}(E), \forall x\in E, Q[f(x)] = Q(x)\}$.

II-A.2.a) $\forall x\in E$, $Q[f(x)] = {}^t(MX).A.(MX) = {}^tX.({}^tM.A.M).X$ et ${}^t({}^tM.A.M) = {}^tM.{}^tA.M = {}^tM.A.M$

Par suite ${}^tM.A.M$ est une matrice symétrique

donc $\boxed{x \longmapsto Q[f(x)] \text{ définit une forme quadratique sur E}}$.

II-A.2.b) $M\in\mathcal{H}_n \Leftrightarrow \forall x\in E$, ${}^tX.({}^tM.A.M).X = {}^tX.A.X \Leftrightarrow \psi({}^tM.A.M) = \psi(A) \Leftrightarrow {}^tM.A.M = A$

car l'application ψ est injective.

Donc $\boxed{M\in\mathcal{H}_n \Leftrightarrow {}^tM.A.M = A}$.

II-B) Structure des invariants des formes quadratiques assiciées à des matrices involutives.
$A\in \mathcal{S}_n$ telle que $A^2 = I_n$. Par suite, $A\in GL(n)$ et $A^{-1} = A$.

II-B.1) Soit $f\in \mathcal{H}(E)$ et M sa matrice dans la base canonique de E,

$\rightarrow$ $M\in \mathcal{H}_n \Leftrightarrow {}^tM.A.M = A \Leftrightarrow A.{}^tM.A.M = I_n$ car $A\in GL(E)$.

Par suite: si $M\in \mathcal{H}_n$ alors M est inversible et $M^{-1} = A.{}^tM.A$

$\rightarrow$ ${}^t(M^{-1}).A.M^{-1} = (A.M.A).A.M^{-1} = A.M.M^{-1} = A$ donc si $M\in \mathcal{H}_n$ alors $M^{-1}\in \mathcal{H}_n$.

Par suite: $\boxed{\text{si } f\in \mathcal{H}(E) \text{ alors } f \text{ est inversible et } f^{-1}\in \mathcal{H}(E)}$.

II-B.2) Si $M\in \mathcal{H}_n$ alors ${}^tM.A.M = A$ donc ${}^tM = A.M^{-1}.A$

Par suite ${}^t({}^tM).A.{}^tM = M.A.(A.M^{-1}.A) = M.M^{-1}.A = A$ donc ${}^tM\in \mathcal{H}_n$.

Donc $\boxed{\text{si } M\in \mathcal{H}_n \text{ alors } {}^tM\in \mathcal{H}_n}$.

II-B.3) $\rightarrow$ $\mathcal{H}_n \subset GL(n)$.

$\rightarrow$ ${}^tI_n.A.I_n = A$ donc $I_n\in \mathcal{H}_n$ et, par suite, $\mathcal{H}_n \neq \varnothing$.

$\rightarrow$ On a montré que tout élément de $\mathcal{H}_n$ possède un inverse dans $\mathcal{H}_n$.

$\rightarrow$ $\forall(M_1, M_2)\in \mathcal{H}_n^2$, ${}^tM_1.A.M_1 = A$ et ${}^tM_2.A.M_2 = A$

donc ${}^t(M_1.M_2).A.(M_1.M_2) = {}^tM_2.({}^tM_1.A.M_1).M_2 = {}^tM_2.A.M_2 = A$

d'où $M_1.M_2\in \mathcal{H}_n$.

Par suite: $\boxed{\mathcal{H}_n \text{ est un sous-groupe de } GL(n) \text{ et } \mathcal{H}(E) \text{ est un sous-groupe de } GL(E)}$.

II-C) Caractérisation des endomorphisme orthogonaux dans $\mathcal{H}_n$.

II-C.1) $f\in O(E) \Leftrightarrow M\in O_n \Leftrightarrow {}^tM = M^{-1}$.

Par suite, $\boxed{M\in O_n \cap \mathcal{H}_n \Leftrightarrow M^{-1}.A.M = A \Leftrightarrow A.M = M.A}$.

II-C.2) Si $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ alors $A.M = \begin{pmatrix} c & d \\ a & b \end{pmatrix}$ et $M.A = \begin{pmatrix} b & a \\ d & c \end{pmatrix}$

donc $\boxed{A.M = M.A \Leftrightarrow \begin{cases} a = d \\ b = c \end{cases}}$.

Pour que $M = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$ soit une matrice orthogonale, il faut et il suffit que $\begin{cases} a^2 + b^2 = 1 \\ 2ab = 0 \end{cases}$

ce qui donne ($a = 0$ et $b = \pm 1$) ou ($a = \pm 1$ et $b = 0$).

$\boxed{O_2 \cap \mathcal{H}_2 = \{ A, -A, I_2, -I_2 \}}$.

II-C.3.a) $F = Ker(A - I_n)$ est le sous-espace propre de A associé à la valeur propre 1.

$G = Ker(A + I_n)$ est le sous-espace propre de A associé à la valeur propre -1.

A est une matrice symétrique et orthogonale donc c'est la matrice d'une symétrie orthogonale.

Par suite, $sp(A) \subset \{ -1, 1 \}$.

On en déduit que $E = F \oplus G$ si aucun de ces deux sous-espaces n'est pas réduit à $\{0\}$

donc si $sp(A) = \{ -1, 1\}$ c'est à dire si $A\notin \{ -I_2, I_2 \}$.

De plus $\forall(x, y)\in F\times G$, $\langle x , y \rangle = \langle a(x) , a(y) \rangle$ car a est un endomorphisme orthogonal.

Or $\forall(x, y)\in F\times G$, $a(x) = x$ et $a(y) = -y$. Donc $\langle x , y \rangle = -\langle x , y \rangle$ et $\langle x , y \rangle = 0$.

$\boxed{\text{F et G sont bien deux sous-espaces vectoriels de E orthogonaux et supplémentaires}}$.

II-C.3.b) On construit une base B de E en juxtaposant une base orthonormale de F et une base orthonormale de G.

Dans cette base B, la matrice de a est $\begin{pmatrix} I_p & O \\ O & I_q \end{pmatrix}$ avec $\begin{cases} p = \dim F \\ q = \dim G \end{cases}$ (écriture par blocs).

Dans cette même base, la matrice de $f = \begin{pmatrix} M_1 & M_2 \\ M_3 & M_4 \end{pmatrix}$ avec des blocs de même dimension.

$f \in \mathcal{O}(E) \cap \mathcal{H}(E) \iff \begin{pmatrix} M_1 & M_2 \\ M_3 & M_4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_p & O \\ O & I_q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_p & O \\ O & I_q \end{pmatrix}\begin{pmatrix} M_1 & M_2 \\ M_3 & M_4 \end{pmatrix}$

$f \in \mathcal{O}(E) \cap \mathcal{H}(E) \iff \begin{pmatrix} M_1 & -M_2 \\ M_3 & -M_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M_1 & M_2 \\ -M_3 & -M_4 \end{pmatrix} \iff M_2 = O$ et $M_3 = O$.

Donc $f \in \mathcal{O}(E) \cap \mathcal{H}(E)$ si et seulement si sa matrice par blocs dans la base adaptée à $F \oplus G$ est de la forme $\begin{pmatrix} M_1 & O \\ O & M_4 \end{pmatrix}$ et, comme $M \in GL(n)$, $M_1 \in GL(p)$ et $M_4 \in GL(q)$,

on en déduit que: $\boxed{f \in \mathcal{O}(E) \cap \mathcal{H}(E) \iff f(F) = F \text{ et } f(G) = G}$.

II-C.4) Si $A = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$ alors la relation $A^2 = I_2$ est vérifiée.

$\rightarrow$ $(x, y) \in E_1 \iff -2x + 4y = 0$ d'où $E_1 = \text{Vect}((2, 1)) = F$.

$\rightarrow$ $(x, -y) \in E_{-1} \iff 8x + 4y = 0$ d'où $E_{-1} = \text{Vect}((1, -2)) = G$.

Dans la base $B = (e_1, e_2)$ avec $e_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(2, 1)$ et $e_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}(1, -2)$

la matrice de a est $\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et celle de f est de la forme $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$.

Pour que f appartienne à $\mathcal{O}(E)$ il faut et il suffit que $\alpha = \pm 1$ et $\beta = \pm 1$

ce qui donne les matrices $I_2, -I_2, \tilde{A}$ et $-\tilde{A}$.

En revenant à la base canonique, $\boxed{\mathcal{O}_2 \cap \mathcal{H}_2 = \{ I_2, -I_2, A, -A \}}$.

II-D) **Caractérisation des endomorphismes strictement positifs dans $\mathcal{H}(E)$.**

II-D.1) D'après le II-A.2.b),

$f \in \mathcal{H}(E)$ si et seulement si sa matrice M dans la base canonique vérifie ${}^tM.A.M = A$.

Dans le cas où $f \in \mathcal{S}(E)^{++}$, on a de plus ${}^tM = M$

donc $\boxed{f \in \mathcal{S}(E)^{++} \cap \mathcal{H}(E) \iff M.A.M = A \iff f \circ a \circ f = a}$.

II-D.2) Si $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et si $M = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ alors $M.A.M = A \iff \begin{cases} ab = 0 \\ bc = 0 \\ ac + b^2 = 1 \end{cases}$

ce qui donne $(a = c = 0$ et $b = \pm 1)$ ou $(b = 0$ et $ac = 1)$.

On obtient A, – A et toutes les matrices $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1/a \end{pmatrix}$ avec $a \in \mathbb{R}^*$.

A et – A n'appartiennent pas à $\mathcal{S}_2^{++}$ car $\text{sp}(A) = \{-1, 1\}$.

Pour qu'une matrice de la forme $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1/a \end{pmatrix}$ soit dans $\mathcal{S}_n^{++}$, il faut et il suffit que $a \in \mathbb{R}_+^*$

Donc $\boxed{\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)^{++} \cap \mathcal{H}(\mathbb{R}^2) = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \longmapsto \left(ax, \frac{y}{a}\right) \text{ avec } a \in \mathbb{R}_+^* \right\}}$.

II-D.3) $f\in\mathcal{S}(E)^{++}\cap\mathcal{H}(E) \iff f\circ a\circ f = a$

donc si u est l'unique élément de $\mathcal{S}(E)$ tel que: $f = \exp(u)$,

$f\in\mathcal{S}(E)^{++}\cap\mathcal{H}(E) \iff \exp(u)\circ a\circ\exp(u) = a$

$f\in\mathcal{S}(E)^{++}\cap\mathcal{H}(E) \iff a\circ\exp(u) = [\exp(u)]^{-1}\circ a$

$f\in\mathcal{S}(E)^{++}\cap\mathcal{H}(E) \iff a\circ\exp(u)\circ a = \exp(-u)$ car $a\circ a = id$ et $[\exp(u)]^{-1} = \exp(-u)$

$f\in\mathcal{S}(E)^{++}\cap\mathcal{H}(E) \iff \exp(a\circ u\circ a) = \exp(-u)$ car $a\in O(E)$

$\boxed{f\in\mathcal{S}(E)^{++}\cap\mathcal{H}(E) \iff a\circ u\circ a = -u}$ car Φ est bijective.

II-D.4) Si $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $U = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ alors $U.A = -A.U \iff \begin{cases} c = -a \\ b = 0 \end{cases}$

d'où $\boxed{U = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -a \end{pmatrix} \text{ avec } a\in\mathbb{R}}$.

Dans ce cas, $u\circ a = -a\circ u$ donc $a\circ u\circ a = -u$ et $\exp(u)\in\mathcal{S}(E)^{++}\cap\mathcal{H}(E)$.

Par suite: $\boxed{\mathcal{S}_n^{++}\cap\mathcal{H}_n = \left\{\begin{pmatrix} e^a & 0 \\ 0 & e^{-a} \end{pmatrix},\ a\in\mathbb{R}\right\} = \left\{\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 1/\alpha \end{pmatrix},\ \alpha\in\mathbb{R}_+^*\right\}}$.

ce qui nous ramène bien au résultat précédent.

II-D.5) On se place dans la base adaptée à $F\oplus G$.

La matrice de a est toujours $\begin{pmatrix} I_p & O \\ O & I_q \end{pmatrix}$ et celle de u est de la forme $\begin{pmatrix} U_1 & U_2 \\ U_3 & U_4 \end{pmatrix}$.

$u\circ a = -a\circ u \iff \begin{pmatrix} U_1 & -U_2 \\ U_3 & -U_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -U_1 & -U_2 \\ U_3 & U_4 \end{pmatrix} \iff U_1 = O_p$ et $U_4 = O_q$.

Par suite, $u\circ a = -a\circ u \iff$ la matrice de u est de la forme $\begin{pmatrix} O_p & U_2 \\ U_3 & O_q \end{pmatrix}$.

Donc $\boxed{f\in\mathcal{S}(E)^{++}\cap\mathcal{H}(E) \iff u(F)\subset G \text{ et } u(G)\subset F}$.

II-D.6) Si $A = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$, on cherche $U = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ telle que $U.A = -A.U$ et on obtient $\begin{cases} b = -\frac{3}{4}a \\ c = -a \end{cases}$

Donc $U = \begin{pmatrix} 4\alpha & -3\alpha \\ -3\alpha & -4\alpha \end{pmatrix}$ avec $\alpha\in\mathbb{R}$.

$P_U(\lambda) = \lambda^2 - 25\alpha^2$ d'où $sp(U) = \{-5_{(1)}, 5_{(1)}\}$ puis $\begin{cases} E_{-5} = \text{Vect}((1, 3)) \\ E_5 = \text{Vect}((-3, 1)) \end{cases}$

Par suite, $U = P.\begin{pmatrix} 5\alpha & 0 \\ 0 & -5\alpha \end{pmatrix}.{}^tP$ avec $P = \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

En en déduit que la matrice de f dans la base canonique est $M = P.\begin{pmatrix} e^{5\alpha} & 0 \\ 0 & e^{-5\alpha} \end{pmatrix}.{}^tP$.

Il vient $\boxed{M = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 9e^{5\alpha} + e^{-5\alpha} & -6\,\text{sh}(5\alpha) \\ -6\,\text{sh}(5\alpha) & e^{5\alpha} + 9e^{-5\alpha} \end{pmatrix},\quad \alpha\in\mathbb{R}}$.

II-E) **Caractérisation de $\mathcal{H}$(E).**

II-E.1) Si $v \in O(\mathrm{E})$ et si $v(\mathrm{F}) = \mathrm{F}$ et $v(\mathrm{G}) = \mathrm{G}$ alors $v \in O(\mathrm{E}) \cap \mathcal{H}(\mathrm{E}) \subset \mathcal{H}(\mathrm{E})$.
Si $u \in \mathcal{S}(\mathrm{E})$ et si $u(\mathrm{F}) \subset \mathrm{G}$ et $u(\mathrm{G}) \subset \mathrm{F}$ alors $\exp(u) \in \mathcal{S}(\mathrm{E})^{++} \cap \mathcal{H}(\mathrm{E}) \subset \mathcal{H}(\mathrm{E})$.
Comme $\mathcal{H}(\mathrm{E})$ est un sous-groupe du groupe linéaire, $\boxed{v \circ \exp(u) \in \mathcal{H}(\mathrm{E})}$.

II-E.2.a) Si $f \in \mathcal{H}(\mathrm{E})$ alors $f \in \mathrm{GL}(\mathrm{E})$ et, d'après I-C.1,
f peut s'écrire $\boxed{f = v \circ \exp(u) \text{ avec } v \in O(\mathrm{E}) \text{ et } u \in \mathcal{S}(\mathrm{E})}$.

II-E.2.b) Si on note M la matrice de f dans la base canonique, alors M et ${}^t\mathrm{M}$ appartiennent à $\mathcal{H}_n$
donc ${}^t\mathrm{M}.\mathrm{M}$ appartient à $\mathcal{H}_n$ et, d'après I-C.3, ${}^t\mathrm{M}.\mathrm{M}$ est la matrice de $\exp(2u)$.
Par suite, $\boxed{\exp(2u) \in \mathcal{H}_n}$.

$\exp(2u) \in \mathcal{S}(\mathrm{E})^{++} \cap \mathcal{H}(\mathrm{E})$ donc $2u(\mathrm{F}) \subset \mathrm{G}$ et $2u(\mathrm{G}) \subset \mathrm{F}$.
Par suite, $u(\mathrm{F}) \subset \mathrm{G}$ et $u(\mathrm{G}) \subset \mathrm{F}$.
Comme $u \in \mathcal{S}(\mathrm{E})$ avec $u(\mathrm{F}) \subset \mathrm{G}$ et $u(\mathrm{G}) \subset \mathrm{F}$, $\boxed{\exp(u) \in \mathcal{H}(\mathrm{E})}$.

Dès lors, $[\exp(u)]^{-1} \in \mathcal{H}_n$ et $\boxed{v = f \circ [\exp(u)]^{-1} \in \mathcal{H}_n}$.

II-E.3) On en déduit que

$$\boxed{f \in \mathcal{H}(\mathrm{E}) \iff f = v \circ \exp(u) \text{ avec } \begin{cases} u \in O(\mathrm{E}) \text{ tel que } u(\mathrm{F}) = \mathrm{F} \text{ et } u(\mathrm{G}) = \mathrm{G} \\ v \in \mathcal{S}(\mathrm{E}) \text{ tel que } u(\mathrm{F}) \subset \mathrm{G} \text{ et } u(\mathrm{G}) \subset \mathrm{F} \end{cases}}.$$

<u>Parie III</u>: Applications géométriques

III-A) Transformations géométriques laissant invariante une conique.

III-A.1) $\mathscr{C}$ est la conique définie par l'équation $(\mathscr{C})$: $xy + 3x + 5y - 4 = 0$.

III-A.1.a) Si Ω a pour coordonnées (a, b) dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$,

le changement d'origine se traduit par $\begin{cases} x = X + a \\ y = Y + b \end{cases}$

L'équation de $\mathscr{C}$ devient $XY + (b + 3)X + (a + 5)Y - 4 + ab = 0$.

Ω est centre de symétrie pour $\mathscr{C}$ si et seulement si cette expression est invariante quand on change X en – X et Y en – Y.

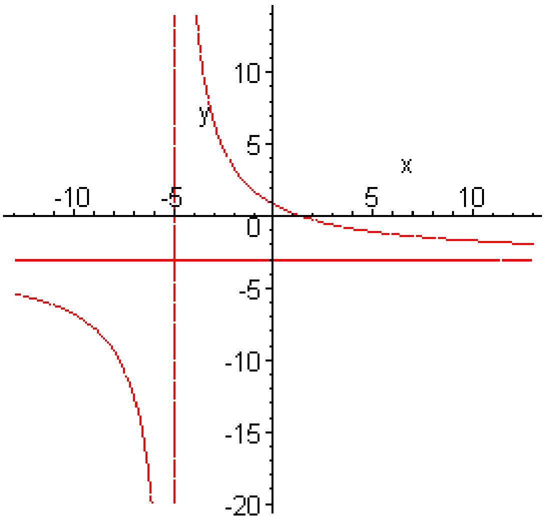
C'est le cas si et seulement si $\begin{cases} a = -5 \\ b = -3 \end{cases}$.

Donc $\boxed{\mathscr{C} \text{ admet un centre de symétrie qui est } \Omega(-5, -3)}$.

III-A.1.b) Dans le repère $(\Omega; \vec{i}, \vec{j})$ une équation de $\mathscr{C}$ est donc $\boxed{XY = 19}$.

III-A.1.c) $\boxed{\mathscr{C} \text{ est une hyperbole équilatère d'asymptôtes } (\Omega; \vec{i}) \text{ et } (\Omega; \vec{j})}$.

```
> with(plots):
> implicitplot({x*y+3*x+5*y-4=0,x=-5,y=-3},x=-13..13,y=-20..14);
```



III-A.2.a) Dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$, cela revient à trouver les endomorphismes qui laissent invariante la forme quadratique associée à l'équation $2XY = 38$.

La matrice de cette forme quadratique est $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Donc $\boxed{\text{le problème posé revient à déterminer } \mathscr{H}_2 \text{ pour } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}$.

III-A.2.b) Les matrices de $O_2 \cap \mathcal{H}_2$ sont I_2, $-I_2$, A_2 et $-A_2$.

Les matrices de $\mathcal{S}_2^{++} \cap \mathcal{H}_2$ sont les matrices de la forme $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1/a \end{pmatrix}$ avec $a \in \mathbb{R}_+^*$.

Les matrices de $\mathcal{H}_2$ sont donc les matrices $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1/a \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} 0 & a \\ 1/a & 0 \end{pmatrix}$ avec $a \in \mathbb{R}^*$.

En tenant compte du changement d'origine, on trouve les applications

$$\boxed{(x, y) \longmapsto \left(a(x+5) - 5, \frac{y+3}{a} - 3\right) \quad \text{et} \quad (x, y) \longmapsto \left(a(y+3) - 5, \frac{x+5}{a} - 3\right)} \text{ avec } a \in \mathbb{R}^*.$$

III-B) **Transformations laissant invariante une quadrique**
(S_1): $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ et (S_2): $x^2 + y^2 - z^2 = 1$

III-B.1.a) $\boxed{S_1 \text{ est la sphère de centre O et de rayon 1}}$.

Note: S_2 est un hyperboloïde à une nappe de révolution autour de l'axe (Oz).

III-B.1.b) $\rightarrow$ Pour S_1, la matrice de la forme quadratique $x^2 + y^2 + z^2$ est $\boxed{A_1 = I_3}$.

D'où $\boxed{F_1 = \mathbb{R}^3}$ et $\boxed{G_1 = \{0\}}$.

$\rightarrow$ Pour S_2, la matrice de la forme quadratique $x^2 + y^2 - z^2$ est $\boxed{A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}}$.

D'où $\boxed{F_2 = \mathrm{Vect}((1, 0, 0), (0, 1, 0))}$ et $\boxed{G_2 = \mathrm{Vect}((0, 0, 1))}$.

Les deux quadriques admettent l'origine pour centre de symétrie
donc pour que la quadrique soit invariante par une application affine
il faut et il suffit que sa forme quadratique soit invariante par l'endomorphisme sous-jacent.
Il suffit donc de déterminer $\mathcal{H}(E)$.

III-B.2) Dans le cas de S_1,

$\rightarrow$ $\forall v \in O(E)$, $v(\mathbb{R}^3) = \mathbb{R}^3$ et $v(\{0\}) = \{0\}$ donc $v \in O(E) \cap \mathcal{H}(E)$.

$\rightarrow$ $u(F_1) \subset G_1$ s'écrit $u(\mathbb{R}^3) = \{0\}$ ce qui donne $u = 0$ donc $\exp(u) = id$.

Par suite, f peut être n'importe quel automorphisme orthogonal de $\mathbb{R}^3$. $\boxed{\mathcal{H}(E) = O_3}$.

Les transformations affines associées qui laissent O invariant sont donc:

- l'identité et la symétrie par rapport à O,
- les réflexions par rapports à un plan P passant par O,
- les rotations d'axe Δ passant par O,
- les composées d'une rotation d'axe Δ passant par O
  par une réflexion par rapport au plan P perpendiculaire à Δ en O.

III-B.3.a) Si v est un automorphisme orthogonal de $\mathcal{H}(E)$,

$\rightarrow$ La restriction de v à G_2 est un automorphisme orthogonal de la droite G_2
ce qui donne l'identité ou moins l'identité,

$\rightarrow$ La restriction de v à F_2 est un automorphisme orthogonal du plan F_2
ce qui donne soit une rotation soit une symétrie orthogonale.

Par suite la matrice de v est de la forme $\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\alpha.\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \alpha.\cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}$

avec $\theta \in [0, 2\pi[$, $\alpha = \pm 1$ et $\beta = \pm 1$.

II-B.3.b) $\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ correspond à la rotation d'axe G_2 et d'angle θ
Si $\theta = 0$, c'est l'identité

$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ correspond à la composée de cette rotation par la réflexion par rapport à F_2
Si $\theta = 0$, c'est la réflexion par rapport à F_2

$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ correspond à une réflexion par rapport à un plan P contenant G_2
Si $\theta = 0$, c'est la réflexion par rapport au plan $(x\mathrm{O}z)$

$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$
correspond à la composée de la réflexion précédente par la réflexion par rapport à F_2.
Comme les deux plans de réflexion sont orthogonaux, c'est une rotation d'angle π autour de la droite d'intersection de ces deux plans.
Si $\theta = 0$, c'est le demi-tour autour de $(\mathrm{O}x)$.

III-B.4.a) Si $U = \begin{pmatrix} m & a & b \\ a & n & c \\ b & c & p \end{pmatrix}$ est la matrice de u, les conditions $u(F_2) \subset G_2$ et $u(G_2) \subset F_2$

donnent $m = a = n = 0$ et $p = 0$ d'où $\boxed{U = \begin{pmatrix} 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & c \\ b & c & 0 \end{pmatrix} \text{ avec } (b, c) \in \mathbb{R}^2}$

et les endomorphismes u tels que $\exp(u)$ soit dans $\mathcal{H}(E)$ forment bien un eace vectoriel de dimension 2.

III-B.4.b) Si $U = O_3$ alors la base canonique est une base de vecteurs propres de u et la matrice de $\exp(u)$ est I_3.

Si $U \neq O_3$ alors $P_U(\lambda) = -\lambda^3 + (b^2 + c^2)\lambda = -\lambda(\lambda - \sqrt{b^2 + c^2})(\lambda + \sqrt{b^2 + c^2})$.
Les calculs (fastidieux) donne la base $B = (e_1, e_2, e_3)$
avec $e_1 = \frac{1}{\sqrt{b^2 + c^2}}(c, -b, 0)$, $e_2 = \frac{1}{\sqrt{2(b^2 + c^2)}}(b, c, -\sqrt{b^2 + c^2})$ et $e_3 = \frac{1}{\sqrt{2(b^2 + c^2)}}(b, c, \sqrt{b^2 + c^2})$

et, dans cette base, u a pour matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{a^2 + b^2} & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{a^2 + b^2} \end{pmatrix}$

et $\exp(u)$ a pour matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & exp(\sqrt{a^2 + b^2}) & 0 \\ 0 & 0 & exp(-\sqrt{a^2 + b^2}) \end{pmatrix}$.