Centrale Supélec Maths 1 TSI 2007

I-A) $\varphi : x \in \mathbb{R}^* \longmapsto \dfrac{\sin^2 x}{x^2}$ est définie et continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$. Comme $\sin x \underset{0}{\sim} x$, $\lim\limits_{x \to 0} \varphi(x) = 1$.

Donc $\boxed{\varphi \text{ est prolongeable par continuité en 0 en posant } \varphi(0) = 1}$.

Ainsi prolongée la fonction φ est définie, continue et <u>positive</u> sur $\mathbb{R}$.
Pour montrer qu'elle est intégrable sur $\mathbb{R}_+$, il suffit de montrer la convergence de $\int_0^{+\infty} \varphi(x).\mathrm{d}x$.
Cette intégrale est simplement impropre en $+\infty$.
$\forall x \in [1, +\infty[$, $\varphi(x) \leq \dfrac{1}{x^2}$ et on sait que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2}$ converge.
Par comparaison, $\int_1^{+\infty} \varphi(x).\mathrm{d}x$ converge donc $\int_0^{+\infty} \varphi(x).\mathrm{d}x$ converge.
Par suite, $\boxed{\varphi \text{ est intégrable sur } \mathbb{R}_+}$.

Comme φ est une fonction paire, $\boxed{\varphi \text{ est intégrable sur } \mathbb{R}}$.

I-B.1) Si $0 < a < b$, la fonction $y \longmapsto \dfrac{\sin y}{y}$ est continue sur $[a, b]$ donc $\displaystyle\int_a^b \frac{\sin y}{y}\,\mathrm{d}y$ est une intégrale définie.

On fait une intégration par parties en posant: $\begin{cases} u(y) = \dfrac{1}{y} & \text{et} \quad v'(y) = \sin y \\ u'(y) = -\dfrac{1}{y^2} & \text{et} \quad v(y) = 1 - \cos y \end{cases}$

Les fonctions u et v sont C^1 sur $[a, b]$ donc $\boxed{\displaystyle\int_a^b \frac{\sin y}{y}\,\mathrm{d}y = \left[\frac{1-\cos y}{y}\right]_a^b + \int_a^b \frac{1-\cos y}{y^2}\,\mathrm{d}y}$.

On sait que $1 - \cos y = 2.\sin^2\left(\dfrac{y}{2}\right)$. Donc $\displaystyle\int_a^b \frac{1-\cos y}{y^2}\,\mathrm{d}y = \int_a^b \frac{2.\sin^2\left(\frac{y}{2}\right)}{y^2}\,\mathrm{d}y$.

Le changement de variable $x = \dfrac{y}{2}$ donne alors $\displaystyle\int_a^b \frac{2.\sin^2\left(\frac{y}{2}\right)}{y^2}\,\mathrm{d}y = \int_{a/2}^{b/2} \frac{2\sin^2 x}{4x^2} \times 2\mathrm{d}x = \int_{a/2}^{b/2} \varphi(x).\mathrm{d}x$.

Par suite: $\boxed{\displaystyle\int_a^b \frac{\sin y}{y}\,\mathrm{d}y = \left[\frac{1-\cos y}{y}\right]_a^b + \int_{a/2}^{b/2} \varphi(x).\mathrm{d}x}$.

I-B.2) → $\lim\limits_{y \to +\infty} \dfrac{1-\cos y}{y} = 0$ et $\lim\limits_{y \to 0} \dfrac{1-\cos y}{y} = 0$ car $\dfrac{1-\cos y}{y} \underset{0}{\sim} \dfrac{y}{2}$

Donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin y}{y}\,\mathrm{d}y$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos y}{y^2}\,\mathrm{d}y$ sont de même nature et égales en cas de convergence.

→ La fonction $y \longmapsto \dfrac{y}{2}$ est une bijection de classe C^1 strictement croissante de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}_+^*$

donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos y}{y^2}\,\mathrm{d}y$ et $\int_0^{+\infty} \varphi(x).\mathrm{d}x$ sont de même nature et égales en cas de convergence

Comme $\int_0^{+\infty} \varphi(x).\mathrm{d}x$ converge, $\boxed{\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin y}{y}\,\mathrm{d}y \text{ est convergente et } \int_0^{+\infty} \frac{\sin y}{y}\,\mathrm{d}y = \int_0^{+\infty} \varphi(x).\mathrm{d}x}$.

$\rightarrow$ La fonction φ étant paire, $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x).\mathrm{d}x = 2\int_{0}^{+\infty} \varphi(x).\mathrm{d}x$.

Par suite, $\boxed{2\int_0^{+\infty} \frac{\sin y}{y}\,\mathrm{d}y = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x).\mathrm{d}x}$.

Note: *la formule d'intégration par parties pour les intégrales impropres n'est pas inscrite au programme de la filière TSI.*

I-C) La fonction $t \longmapsto h(t).e^{itv}$ est continue sur $[\alpha, \beta]$ donc $\int_\alpha^\beta h(t).e^{itv}.\mathrm{d}t$ est une intégrale définie.

On fait une intégration par parties avec $\begin{cases} u(t) = h(t) & \text{et} \quad v'(t) = e^{itv} \\ u'(t) = h'(t) & \text{et} \quad v(t) = -\frac{i}{v} e^{itv} \end{cases}$

$$\int_\alpha^\beta h(t).e^{itv}.\mathrm{d}t = -\frac{i}{v}\left[h(\beta).e^{i\beta v} - h(\alpha).e^{i\alpha v} - \int_\alpha^\beta h'(t).e^{itv}.\mathrm{d}t\right].$$

Comme h est C^1 sur $[\alpha, \beta]$, h' est C^0 sur $[\alpha, \beta]$ donc $\exists M \in \mathbb{R}_+$, $\forall t \in [\alpha, \beta]$, $|h'(t)| \leq M$.

Par suite, $\left|\int_\alpha^\beta h(t).e^{itv}.\mathrm{d}t\right| \leq \frac{1}{|v|}\left[|h(\beta)| + |h(\alpha)| + M(\beta - \alpha)\right]$.

On en déduit que: $\boxed{\lim_{v \to +\infty} \int_\alpha^\beta h(t).e^{itv}.\mathrm{d}t = 0}$.

I-D.1) $\forall n \in \mathbb{N}$, $h_n(t) \underset{0}{\sim} \frac{(2n+1)t}{t} = 2n + 1$ donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $\lim_{t \to 0} h_n(t) = 2n + 1$.

Par suite, $\boxed{h_n \text{ est prolongeable par continuité en 0 en posant } h_n(0) = 2n + 1}$.

L'intégrale I_n est faussement impropre en 0 donc $\boxed{I_n \text{ est convergente}}$.

I-D.2) $\rightarrow$ $I_0 = \int_0^{\pi/2} 1.\mathrm{d}t$ donc $\boxed{I_0 = \frac{\pi}{2}}$.

$\rightarrow$ En utilisant la relation $\sin p - \sin q = 2\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)$

$\forall n \in \mathbb{N}$, $I_{n+1} - I_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin[(2n+3)t] - \sin[(2n+1)t]}{\sin t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2} 2\cos[(2n+2)t].\mathrm{d}t$.

Donc $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ I_{n+1} - I_n = 0}$. La suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est constante.

$\rightarrow$ On en déduit que: $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ I_n = \frac{\pi}{2}}$.

I-D.3) $h :\ t \in]0, \pi/2] \longmapsto \frac{1}{\sin t} - \frac{1}{t}$

a-) $\forall t \in]0, \pi/2]$, $h(t) = \frac{t - \sin t}{t.\sin t}$ donc $h(t) \underset{0}{\sim} \frac{\frac{t^3}{6}}{t^2} = \frac{t}{6}$. Par suite: $\boxed{h(t) = \frac{t}{6} + \underset{0}{o}(t)}$.

b-) • La fonction h est définie, continue et dérivable sur $]0, \pi/2]$.

• h n'est pas définie en 0 mais admet en ce point le développement limité d'ordre 1
$h(t) = 0 + \frac{1}{6}.t + \underset{0}{o}(t)$

Par suite: → $\boxed{h \text{ est prolongeable par continuité en 0 en posant } h(0) = 0}$.

→ $\boxed{\text{La fonction ainsi prolongée est dérivable en 0 avec } h'(0) = \frac{1}{6}}$.

c-) • $\forall t\in]0, \pi/2]$, $h'(t) = -\frac{1}{\sin^2 t} \times \cos t + \frac{1}{t^2}$.

La dérivée de h est donc continue sur $]0, \pi/2]$ donc h est C^1 sur $]0, \pi/2]$.

• Comme $\begin{cases} -t^2.\cos t + \sin^2 t = -t^2 + \frac{t^4}{2} + t^2 - \frac{t^4}{3} + \underset{0}{o}(t^4) \underset{0}{\sim} \frac{t^4}{6} \\ t^2.\sin^2 t \underset{0}{\sim} t^4 \end{cases}$

$\lim\limits_{t\to 0} h'(t) = \lim\limits_{t\to 0} \frac{-t^2.\cos t + \sin^2 t}{t^2.\sin^2 t} = \frac{1}{6} = h'(0)$ donc h' est continue en 0.

Par suite, $\boxed{h \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } [0, \pi/2]}$.

d-) $\int_0^{\pi/2} \sin[(2n+1)t].h(t).dt = \text{Im}\left\{\int_0^{\pi/2} h(t).e^{it(2n+1)}.dt\right\}$

Quand n tend vers $+\infty$, $2n + 1$ tend aussi vers $+\infty$.

Comme h est de classe C^1 sur $[0, \pi/2]$, le résultat du I-C donne $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^{\pi/2} h(t).e^{it(2n+1)}.dt = 0$.

On en déduit que: $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^{\pi/2} \sin[(2n+1)t].h(t).dt = \lim\limits_{n\to+\infty} Im\left(\int_0^{\pi/2} h(t).e^{it(2n+1)}.dt\right) = 0}$.

e-) → La fonction g : $t\in]0, \pi/2] \longmapsto \frac{\sin[(2n+1)t]}{t}$ est continue

et elle est prolongeable par continuité en 0 en posant $g(0) = 2n + 1$.

L'intégrale $\int_0^{\pi/2} \sin[(2n+1)t].h(t).dt$ est donc faussement impropre en 0.

Par suite: $\boxed{\int_0^{\pi/2} \sin[(2n+1)t].h(t).dt \text{ est convergente}}$.

→ $\forall n\in \mathbb{N}$, $I_n - J_n = \int_0^{\pi/2} \sin[(2n+1)t].h(t).dt$ donc $J_n = I_n - \int_0^{\pi/2} \sin[(2n+1)t].h(t).dt$.

Par suite, $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} J_n = \frac{\pi}{2}}$.

→ • Dans l'intégrale définissant J_n, on fait le changement de variable $u = (2n+1)t$.

Il vient $J_n = \int_0^{(2n+1)\pi/2} \frac{\sin u}{u} du$

• La fonction θ: $\begin{cases} \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R} \\ \left| \begin{array}{l} y \longmapsto \frac{\sin y}{y} \text{ si } y > 0 \\ 0 \longmapsto 1 \end{array} \right. \end{cases}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.

Θ: $x \longmapsto \int_0^x \frac{\sin y}{y} dy$ est la primitive de θ sur $\mathbb{R}_+$ qui s'annule en 0.

C'est une fonction continue sur $\mathbb{R}_+$.

Comme $\int_0^{+\infty} \frac{\sin y}{y} dy$ converge, $\lim\limits_{x\to+\infty} \int_0^x \frac{\sin y}{y} dy = \int_0^{+\infty} \frac{\sin y}{y} dy$

- $J_n = \Theta[(2n+1)\pi/2]$. Par suite, $\lim\limits_{n \to +\infty} J_n = \lim\limits_{n \to +\infty} \Theta[(2n+1)\pi/2]$

se traduit par $\boxed{\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin y}{y}\,\mathrm{d}y = \frac{\pi}{2}}$ et on en déduit $\boxed{\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x).\mathrm{d}x = \pi}$.

I-E.1)

- La fonction $x : u \longmapsto a(v-u)$ est continue sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.
Comme la fonction φ est continue sur $\mathbb{R}$, $\boxed{\psi_v = a(\varphi \circ x) \text{ est continue sur } \mathbb{R}}$.

- La fonction x est une bijection de classe C^1 strictement décroissante de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.
Le changement de variable $x = a(v-u)$ donne
$\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \psi_v(u).\mathrm{d}u = -\int_{+\infty}^{-\infty} a.\varphi(x).\frac{\mathrm{d}x}{a} = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x).\mathrm{d}x$ qui est une intégrale convergente.
Donc $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \psi_v(u).\mathrm{d}u$ est une intégrale convergente.
En remarquant que ψ_v est positive, on en déduit que $\boxed{\psi_v \text{ est intégrable sur } \mathbb{R}}$.

I-E.2) Avec le même changement de variable,
$$\lim_{v \to +\infty} \int_0^{+\infty} \psi_v(u).\mathrm{d}u = \lim_{v \to +\infty} -\int_{av}^{-\infty} \varphi(x).\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x).\mathrm{d}x \text{ et comme } \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x).\mathrm{d}x = \pi,$$
$$\boxed{\lim_{v \to +\infty} \int_0^{+\infty} \psi_v(u).\mathrm{d}u = \pi}.$$

I-F) → Si $u \neq v$,
$$K = \int_{-2a}^{2a} \left(1 - \frac{|t|}{2a}\right).e^{it(u-v)}.\mathrm{d}t = \int_{-2a}^{0} \left(1 + \frac{t}{2a}\right).e^{it(u-v)}.\mathrm{d}t + \int_{0}^{2a} \left(1 - \frac{t}{2a}\right).e^{it(u-v)}.\mathrm{d}t = K_1 + K_2.$$
On calcule K_1 et K_2 au moyen de deux intégrations par parties.

- $$K_1 = \left[\left(1 + \frac{t}{2a}\right).\frac{i}{v-u}.e^{it(u-v)}\right]_{-2a}^{0} - \frac{1}{2a} \times \frac{i}{v-u} \int_{-2a}^{0} e^{it(u-v)}.\mathrm{d}t$$
$$K_1 = \frac{i}{v-u} + \frac{1}{2a} \times \frac{1}{(v-u)^2}\,[1 - e^{-2ia(u-v)}]$$

- $$K_2 = \left[\left(1 - \frac{t}{2a}\right).\frac{i}{v-u}.e^{it(u-v)}\right]_{0}^{2a} + \frac{1}{2a} \times \frac{i}{v-u} \int_{0}^{2a} e^{it(u-v)}.\mathrm{d}t$$
$$K_2 = -\frac{i}{v-u} - \frac{1}{2a} \times \frac{1}{(v-u)^2}\,[e^{2ia(u-v)} - 1]$$

D'où $K = -\dfrac{1}{2a(v-u)^2}\,[e^{2ia(u-v)} - 2 + e^{-2ia(u-v)}] = -\dfrac{1}{2a(v-u)^2}\,[e^{ia(u-v)} - e^{-ia(u-v)}]^2$

soit $K = \dfrac{4.\sin^2[a(v-u)]}{2a.(v-u)^2} = 2\psi_v(u)$.

→ Si $u = v$, $\displaystyle K = \int_{-2a}^{2a} \left(1 - \frac{|t|}{2a}\right).\mathrm{d}t = \int_{-2a}^{0} \left(1 + \frac{t}{2a}\right).\mathrm{d}t + \int_{0}^{2a} \left(1 - \frac{t}{2a}\right).\mathrm{d}t$
$$K = \left[t + \frac{t^2}{4a}\right]_{-2a}^{0} + \left[t - \frac{t^2}{4a}\right]_{0}^{2a} = 2a = 2\psi_v(v).$$

Donc $\boxed{\forall u \in \mathbb{R}, \quad \displaystyle\int_{-2a}^{2a} \left(1 - \frac{|t|}{2a}\right).e^{it(u-v)}.\mathrm{d}t = 2\psi_v(u)}$.

I-G.1) Si $\sigma \geq 1$ alors pour tout réel u positif, $\psi_v(u).e^{(1-\sigma)u} \geq 0$.

De plus $0 \leq \psi_v(u).e^{(1-\sigma)u} \leq \psi_v(u)$.

Comme ψ_v est intégrable sur $\mathbb{R}_+$, $\boxed{\forall\sigma \geq 1, \text{ la fonction } u \longmapsto \psi_v(u).e^{(1-\sigma)u} \text{ est intégrable sur } \mathbb{R}_+}$.

I-G.2) La fonction Φ: $\sigma \geq 1 \longmapsto \int_0^{+\infty} \psi_v(u).e^{(1-\sigma)u}.\mathrm{d}u$ est définie par une intégrale impropre à paramètre et d'après la question précédente, $\mathscr{D}_\Phi = [1, +\infty[$.

- La fonction $(\sigma, u) \longmapsto \psi_v(u).e^{(1-\sigma)u}$ est continue sur $[1, +\infty[\times \mathbb{R}_+$,
- $\forall(\sigma, u) \in [1, +\infty[\times \mathbb{R}_+$, $|\psi_v(u).e^{(1-\sigma)u}| \leq \psi_v(u)$ et ψ_v est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

On en déduit que la fonction Φ est continue sur $[1, +\infty[$.

Par suite, $\lim\limits_{\sigma \to 1^+} \Phi(\sigma) = \Phi(1)$ soit $\boxed{\lim\limits_{\sigma \to 1^+} \int_0^{+\infty} \psi_v(u).e^{(1-\sigma)u}.\mathrm{d}u = \int_0^{+\infty} \psi_v(u).\mathrm{d}u}$.

II-A) $\boldsymbol{\forall n \geq 2, \quad u_n = \sum\limits_{k=1}^{n-1} \mathrm{B}(k).[k^{-\sigma} - (k+1)^{-\sigma}]}$.

Cette définition pose un problème pour $n = 1$ *car elle suppose* $n - 1 \geq 1$ *donc* $n \geq 2$.

II-A.1) $\forall n \geq 2$, $u_{n+1} - u_n = \mathrm{B}(n).[[n^{-\sigma} - (n+1)^{-\sigma}]$.

- $\mathrm{B}(n) = \sum\limits_{k=1}^{n-1} \beta_k \geq 0$ car les réels β_k sont positifs.
- $\dfrac{1}{n} > \dfrac{1}{n+1}$ et, comme $\sigma > 1$, $n^{-\sigma} > (n+1)^{-\sigma}$.

Par suite, $\forall n \geq 2$, $u_{n+1} - u_n \geq 0$ donc $\boxed{(u_n) \text{ est croissante}}$.

II-A.2) $\forall n \geq 2, \quad u_n = \sum\limits_{k=1}^{n-1} \mathrm{B}(k).k^{-\sigma} - \sum\limits_{k=1}^{n-1} \mathrm{B}(k).(k+1)^{-\sigma}$.

$\forall n \geq 2, \quad u_n = \mathrm{B}(1) + \sum\limits_{k=2}^{n-1} \mathrm{B}(k).k^{-\sigma} - \sum\limits_{k=1}^{n-2} \mathrm{B}(k).(k+1)^{-\sigma} - \mathrm{B}(n-1).n^{-\sigma}$.

$\forall n \geq 2, \quad u_n = \beta_1 + \sum\limits_{k=2}^{n-1} \mathrm{B}(k).k^{-\sigma} - \sum\limits_{k=2}^{n-1} \mathrm{B}(k-1).(k)^{-\sigma} - \mathrm{B}(n-1).n^{-\sigma}$.

$\forall n \geq 2, \quad u_n = \beta_1 \times 1^{-\sigma} + \sum\limits_{k=2}^{n-1} \beta_k.k^{-\sigma} - \mathrm{B}(n-1).n^{-\sigma}$.

Donc $\boxed{\forall n \geq 2, \quad u_n = \sum\limits_{k=1}^{n-1} \beta_k.k^{-\sigma} - \mathrm{B}(n-1).n^{-\sigma}}$.

$\rightarrow$ Comme $\sigma > 1$, la série $\sum \beta_n.n^{-\sigma}$ converge.

Si on note S sa somme, comme c'est une série à termes positifs, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\sum\limits_{k=1}^{n-1} \beta_k.k^{-\sigma} \leq \mathrm{S}$.

$\rightarrow$ $\forall n \geq 2$, $-\mathrm{B}(n-1).n^{-\sigma} \leq 0$.

On en déduit que la suite (u_n) est majorée par S.

Comme elle est croissante, $\boxed{(u_n) \text{ est convergente}}$. On note u sa limite.

II-A.3) $\forall n \geq 1,\quad \mathrm{B}(n).(n+1)^{-\sigma} = \sum_{k=1}^{n} \beta_k.k^{-\sigma} - u_{n+1}$

donc $\quad \forall n \geq 1,\quad \mathrm{B}(n).n^{-\sigma} = \left[\sum_{k=1}^{n} \beta_k.k^{-\sigma} - u_{n+1}\right] \times \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{-\sigma}$

D'après les résultats précédents, $\boxed{\text{la suite } \left(\mathrm{B}(n).n^{-\sigma}\right) \text{ converge vers } \mathrm{S} - u}$.

II-A.4) La fonction B est continue et croissante.
Pour montrer qu'elle admet une limite finie en $+\infty$, il suffit de montrer qu'elle est majorée.

Pour $\varepsilon = 1$, $\exists \mathrm{N} \in \mathbb{N}^*$, $\forall n \geq \mathrm{N}$, $\mathrm{S} - u - 1 \leq \mathrm{B}(n).n^{-\sigma} \leq \mathrm{S} - u + 1$.

$\forall x \in [\mathrm{N}, +\infty[$, $\mathrm{E}(x) \leq x < \mathrm{E}(x+1)$ donc $\mathrm{B}(x) < \mathrm{B}[\mathrm{E}(x)+1] \leq \dfrac{\mathrm{S} - u + 1}{[\mathrm{E}(x)+1]^{-\sigma}} \leq \mathrm{S} - u + 1$.

Par suite, $\boxed{\text{B admet une limite finie en } +\infty}$.

II-B.1) La fonction $u \longmapsto e^u$ est une bijection de classe C^1 strictement croissante de $\mathbb{R}_+$ sur $[1, +\infty[$.
Le changement de variable $u = e^u$ donne $\mathrm{G}(s) = \displaystyle\int_0^{+\infty} [e^{-u}.\mathrm{B}(e^u) - 1].(e^u)^{-s}.e^u.\mathrm{d}u$

soit $\boxed{\mathrm{G}(s) = \displaystyle\int_0^{+\infty} [e^{-u}.\mathrm{B}(e^u) - 1].e^{(1-s)u}.\mathrm{d}u}$.

II-B.2) $\mathrm{H}(a, v) = \displaystyle\int_{-2a}^{2a} \mathrm{G}(\sigma + it).\left(1 - \frac{|t|}{2a}\right).e^{itv}.\mathrm{d}t = \int_{-2a}^{2a} \left(\int_0^{+\infty} [e^{-u}.\mathrm{B}(e^u) - 1].e^{(1-\sigma-it)u}.\mathrm{d}u\right).\left(1 - \frac{|t|}{2a}\right).e^{itv}.\mathrm{d}t$

donc $|\mathrm{H}(a, v)| \leq \displaystyle\int_{-2a}^{2a} \left|\int_0^{+\infty} [e^{-u}.\mathrm{B}(e^u) - 1].e^{(1-\sigma-it)u}.\mathrm{d}u\right|.\left|1 - \frac{|t|}{2a}\right|.\mathrm{d}t$ car $|e^{itv}| = 1$

d'où $\boxed{|\mathrm{H}(a, v)| \leq \displaystyle\int_{-2a}^{2a} \left(\int_0^{+\infty} \left|[e^{-u}.\mathrm{B}(e^u) - 1].e^{(1-\sigma)u}\right|.\mathrm{d}u\right).\mathrm{d}t}$ car $\begin{cases} |e^{-itu}| = 1 \\ \forall t \in [-2a, 2a],\ 1 - \dfrac{|t|}{2a} \in [0, 1] \end{cases}$

La fonction F_s est intégrable sur $[1, +\infty[$ donc l'intégrale $\mathrm{G}(s)$ est absolument convergente.
Soit K le réel $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left|[e^{-u}.\mathrm{B}(e^u) - 1].e^{(1-\sigma)u}\right|.\mathrm{d}u$, $\boxed{|\mathrm{H}(a, v)| \leq \int_{-2a}^{2a} \mathrm{K}.\mathrm{d}t = 4a\mathrm{K}}$.

II-B.3) $\mathrm{H}(a, v) = \displaystyle\int_0^{+\infty} [e^{-u}.\mathrm{B}(e^u) - 1].e^{(1-\sigma)u}\left[\int_{-2a}^{2a} e^{-itu}.\left(1 - \frac{|t|}{2a}\right).e^{itv}.\mathrm{d}t\right].\mathrm{d}u$

$\mathrm{H}(a, v) = \displaystyle\int_0^{+\infty} [e^{-u}.\mathrm{B}(e^u) - 1].e^{(1-\sigma)u}\left[\int_{-2a}^{2a} \left(1 - \frac{|t|}{2a}\right).e^{it(v-u)}.\mathrm{d}t\right].\mathrm{d}u$

$\boxed{\mathrm{H}(a, v) = 2\displaystyle\int_0^{+\infty} [e^{-u}.\mathrm{B}(e^u) - 1].e^{(1-\sigma)u}.\psi_v(u).\mathrm{d}u}$ car $\psi_u(v) = \psi_v(u)$.

II-C.1)
- La fonction $u \longmapsto e^{-\sigma u}.\mathrm{B}(e^u).\psi_v(u)$ est continue et <u>positive</u> sur $\mathbb{R}_+$.
- $\exists \lambda \in \mathbb{R}_+$, $\displaystyle\lim_{u \to +\infty} e^{-\sigma u}.\mathrm{B}(e^u) = \lim_{\substack{x \to +\infty \\ (x = e^u)}} \mathrm{B}(x).x^{-\sigma} = \lambda$.
- ψ_v est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

On en déduit que $e^{-\sigma u}.\mathrm{B}(e^u).\psi_v(u) \underset{\infty}{\sim} \psi_v(u)$ et donc que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\sigma u}.\mathrm{B}(e^u).\psi_v(u).\mathrm{d}u$ converge.

Par suite, $\boxed{u \longmapsto e^{-\sigma u}.\mathrm{B}(e^u).\psi_v(u) \text{ est intégrable sur } \mathbb{R}_+}$.

II-C.2) La fonction $\sigma \longmapsto \int_0^{+\infty} e^{-\sigma u}.B(e^u).\psi_v(u).du$ est définie par une intégrale impropre à paramètre.

- La fonction $(\sigma, u) \longmapsto e^{-\sigma u}.B(e^u).\psi_v(u)$ est continue sur $]\sigma_0, +\infty[\times \mathbb{R}_+$.
- $\forall(\sigma, u) \in]\sigma_0, +\infty[\times \mathbb{R}_+$, $|e^{-\sigma u}.B(e^u).\psi_v(u)| = e^{-\sigma u}.B(e^u).\psi_v(u) \leq e^{-\sigma_0 u}.B(e^u).\psi_v(u)$ et on vient de voir que cette dernière fonction qui ne dépend pas de σ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

Par suite, $\boxed{\forall\sigma_0 > 1,\ \text{la fonction } \sigma \longmapsto \int_0^{+\infty} e^{-\sigma u}.B(e^u).\psi_v(u).du \text{ est continue sur }]\sigma_0, +\infty[}$.

Conformément à l'énoncé, on admet que $\boxed{\lim_{\sigma \to 1^+} \int_0^{+\infty} e^{-\sigma u}.B(e^u).\psi_v(u).du = \int_0^{+\infty} e^{-u}.B(e^u).\psi_v(u).du}$.

II-D) D'après le II-B.3, $\int_{-2a}^{2a} G(\sigma + it).\left(1 - \frac{|t|}{2a}\right).e^{itv}.dt = 2\int_0^{+\infty} [e^{-u}.B(e^u) - 1].e^{(1-\sigma)u}.\psi_v(u).du$

donc $\int_{-2a}^{2a} G(\sigma + it).\left(1 - \frac{|t|}{2a}\right).e^{itv}.dt = 2\int_0^{+\infty} e^{-\sigma u}.B(e^u).\psi_v(u).du - 2\int_0^{+\infty} e^{(1-\sigma)u}.\psi_v(u).du$.

- On vient d'admettre que: $\lim_{\sigma \to 1^+} \int_0^{+\infty} e^{-\sigma u}.B(e^u).\psi_v(u).du = \int_0^{+\infty} e^{-u}.B(e^u).\psi_v(u).du$,
- D'après le I-G.2, $\lim_{\sigma \to 1^+} \int_0^{+\infty} e^{(1-\sigma)u}.\psi_v(u).du = \int_0^{+\infty} \psi_v(u).du$.

On en déduit que: $\lim_{\sigma \to 1^+} \int_{-2a}^{2a} G(\sigma + it).\left(1 - \frac{|t|}{2a}\right).e^{itv}.dt = 2\int_0^{+\infty} e^{-u}.B(e^u).\psi_v(u).du - 2\int_0^{+\infty} \psi_v(u).du$

soit $\lim_{\sigma \to 1^+} \int_{-2a}^{2a} G(\sigma + it).\left(1 - \frac{|t|}{2a}\right).e^{itv}.dt = 2\int_0^{+\infty} [e^{-u}.B(e^u) - 1].\psi_v(u).du$

et, encore d'après II-B.3, $\boxed{\lim_{\sigma \to 1^+} \int_{-2a}^{2a} G(\sigma + it).\left(1 - \frac{|t|}{2a}\right).e^{itv}.dt = \int_{-2a}^{2a} G(1 + it).\left(1 - \frac{|t|}{2a}\right).e^{itv}.dt}$.

II-E) $\int_{-2a}^{2a} G(1 + it).\left(1 - \frac{|t|}{2a}\right).e^{itv}.dt + 2\int_0^{+\infty} \psi_v(u).du = 2\int_0^{+\infty} [e^{-u}.B(e^u) - 1].\psi_v(u).du + 2\int_0^{+\infty} \psi_v(u).du$.

La linéarité des intégrales impropres donne immédiatement

$\boxed{\int_{-2a}^{2a} G(1 + it).\left(1 - \frac{|t|}{2a}\right).e^{itv}.dt + 2\int_0^{+\infty} \psi_v(u).du = 2\int_0^{+\infty} e^{-u}.B(e^u).\psi_v(u).du}$.

II-F.1) On suppose que si h est continue sur $[\alpha, \beta]$ alors $\lim_{v \to +\infty} \int_\alpha^\beta h(t).e^{itv}.dt = 0$.

La fonction $t \longmapsto G(1 + it)\left(1 - \frac{|t|}{2a}\right)$ étant continue sur $[-2a, 2a]$,

$\boxed{\lim_{v \to +\infty} \int_{-2a}^{2a} G(1 + it).\left(1 - \frac{|t|}{2a}\right).e^{itv}.dt = 0}$.

II-F.2) On a vu dans II-E que $\int_{-2a}^{2a} G(1 + it).\left(1 - \frac{|t|}{2a}\right).e^{itv}.dt + 2\int_0^{+\infty} \psi_v(u).du = 2\int_0^{+\infty} e^{-u}.B(e^u).\psi_v(u).du$.

Par passage à la limite, $\lim_{v \to +\infty} \int_{-2a}^{2a} G(1 + it).\left(1 - \frac{|t|}{2a}\right).e^{itv}.dt = 0$ et $\lim_{v \to +\infty} \int_0^{+\infty} \psi_v(u).du$

donnent $\boxed{\lim_{v \to +\infty} \int_0^{+\infty} e^{-u}.B(e^u).\psi_v(u).du = \pi}$.