Dans tout le problème, l'espace est rapporté à un repère orthonormal

$$\mathscr{R} = (o, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}).$$

Les autres repères qu'on utilise ne sont pas nécessairement orthonormaux. **Ils ont tous la même origine o.** Les points sont désignés par des lettres minuscules. On note, avec une majuscule, M (ou M'), la matrice colonne des coordonnées du point m dans le repère $\mathscr{R}$ (ou $\mathscr{R}\,'$).

On note I la matrice identité de $M_3(\mathbb{R})$ et ${}^tP$ la transposée de la matrice P. Si P est carrée, son déterminant est noté $\det(P)$. Si P ne comporte qu'un seul élément, cet unique élément est noté $\{P\}$.

Si S est une matrice symétrique appartenant à $M_3(\mathbb{R})$, on appelle surface associée à S dans le repère $\mathscr{R}$ l'ensemble des points m tels que ${}^tMSM$ soit la matrice nulle.

Partie I - Quelques préliminaires

I.A - Exemple.

La matrice S est diagonale. Ses termes diagonaux sont $1, 1$ et -1.

On note x, y, z les coordonnées du point m dans $\mathscr{R}$.

I.A.1) Calculer le produit matriciel ${}^tMSM$.

I.A.2) En déduire que $x^2 + y^2 - z^2 = 0$ est une équation cartésienne de la surface $\mathscr{S}$ associée à S dans le repère $\mathscr{R}$.

I.A.3) Quelle est la nature de $\mathscr{S}$? Représenter la partie de $\mathscr{S}$ comprise entre les plans d'équations $z = 0$ et $z = 1$.

I.B - Changement de repère

On revient au cas général. Soit $\mathscr{S}$ la surface associée à la matrice symétrique S dans le repère $\mathscr{R}$.

I.B.1) En posant $S = \begin{bmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{bmatrix}$, donner une équation cartésienne de $\mathscr{S}$ dans le repère $\mathscr{R}$.

I.B.2) Soit $P \in M_3(\mathbb{R})$, P inversible, et soit $\mathscr{R}'$ le repère tel que P soit la matrice de passage de la base de $\mathscr{R}$ à la base de $\mathscr{R}'$. Soit M' la matrice des coordonnées du point m dans $\mathscr{R}'$. Exprimer M en fonction de P et de M'.

I.B.3) On pose $S' = {}^tPSP$; montrer que la matrice S' est symétrique.

Montrer que S' est inversible si et seulement si S est inversible.

I.B.4) Montrer que $\mathscr{S}$ est l'ensemble des points m qui vérifient $\{{}^tM'S'M'\} = 0$.

I.C - Nature de $\mathscr{S}$

I.C.1)

a) Justifier que les racines $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ du polynôme caractéristique de S sont réelles et qu'on peut choisir la matrice P précédente orthogonale de sorte que S' soit diagonale. On énoncera avec précision le théorème utilisé.

b) Écrire une équation de $\mathscr{S}$ dans $\mathscr{R}'$.

I.C.2) On suppose S inversible.

a) Montrer que $\lambda_i \neq 0$ $(i = 1, 2, 3)$.

b) On suppose que $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3$ ne sont pas tous de même signe. Montrer qu'on peut trouver un repère orthormal $\mathscr{R}'$ dans lequel $\mathscr{S}$ admette une équation de la forme $\dfrac{x'^2}{a^2} + \dfrac{y'^2}{b^2} = z'^2$. Montrer que $\mathscr{S}$ est un cône de sommet o.

c) Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ sont de même signe.

(ii) La surface $\mathscr{S}$ est réduite au point o.

I.D - Inverse d'une matrice

On considère une matrice réelle ou complexe M, carrée de taille 3.

On appelle comatrice de M la matrice où figure, à la i-ème ligne, j-ème colonne, le déterminant, multiplié par $(-1)^{i+j}$, de la sous-matrice de M obtenue en barrant la i-ème ligne et la j-ème colonne. On note M' la transposée de la comatrice de M.

I.D.1) Montrer que $MM' = (\det(M))I$. On se bornera à calculer un terme diagonal et un terme non diagonal du produit MM'.

I.D.2) En supposant que M est inversible, exprimer M^{-1} en fonction de $\det(M)$ et de M'.

I.E - Calcul matriciel

Soient M_1 et M_2 deux matrices colonnes à trois éléments et $S \in M_3(\mathbb{R})$ une matrice symétrique.

I.E.1) Montrer que $\{{}^tM_1SM_2\} = \{{}^tM_2SM_1\}$.

I.E.2) Posons $Q = {}^tM_1SM_2$ et $q = \{Q\}$. Si M_0 est une matrice colonne à trois éléments, vérifier que $M_0Q = qM_0$.

Partie II - Tangentes à une conique

Dans cette partie, S est une matrice symétrique, appartenant à $M_3(\mathbb{R})$, inversible et dont les valeurs propres ne sont pas toutes de même signe ; $\mathscr{S}$ est la surface associée à S dans le repère $\mathscr{R}$.

Soit $\mathscr{S}_1$ l'intersection de $\mathscr{S}$ et du plan d'équation $z = 1$ et soit m_0 un point de ce plan, n'appartenant pas à $\mathscr{S}_1$.

On admet que $\mathscr{S}_1$ est une conique (ellipse, hyperbole ou parabole).

II.A -

Soit m un point non aligné avec o et m_0. Soit μ un réel et p le point dont la matrice des coordonnées dans $\mathscr{R}$ est $P = \mu M_o + M$.

II.A.1) Montrer que, quel que soit μ, le point p est distinct de o et appartient au plan passant par o, m_0 et m.

II.A.2) Montrer que p appartient à $\mathscr{S}$ si et seulement si μ vérifie une certaine équation du second degré dont le discriminant est

$$\Delta(M) = \{{}^tMSM_0\}^2 - \{{}^tM_0SM_0\}\{{}^tMSM\}.$$

On admet, **dans toute la suite du problème,** que, si le point m est dans le plan $z = 1$ et m est distinct de m_0, alors la droite (m_0m) est tangente à la conique $\mathscr{S}_1$ si et seulement si $\Delta(M) = 0$.

II.B - On pose $T = SM_0{}^tM_0S - \{{}^tM_0SM_0\}S$.

II.B.1) Montrer que $\Delta(M)$ est l'unique terme de ${}^tMTM$.

II.B.2) Montrer que la matrice T est symétrique. On note $\mathscr{T}$ la surface qui lui est associée dans le repère $\mathscr{R}$.

II.B.3) Montrer que la droite om_0 est contenue dans $\mathscr{T}$.

II.C - Soit N une matrice unicolonne à 3 éléments.

II.C.1) Montrer que $TN = S.(\{{}^tM_0SN\}M_0 - \{{}^tM_0SM_0\}N)$.

II.C.2) En déduire que 0 est valeur propre de T et que le sous-espace propre associé est la droite dirigée par M_0.

II.C.3) En déduire que T est de rang 2.

II.D -

II.D.1) En utilisant I.C.1), montrer qu'il existe un repère $\mathscr{R}'$ dans lequel $\mathscr{T}$ a une équation de la forme $\lambda_1 {x'}^2 + \lambda_2 {y'}^2 = 0$, où les réels λ_1 et λ_2 sont non nuls.

II.D.2) En déduire que, suivant les signes de λ_1 et λ_2, $\mathscr{T}$ est formée de deux plans se coupant suivant la droite om_0 ou réduite à cette droite om_0.

II.D.3) En déduire que le nombre de tangentes à $\mathscr{S}_1$ qui passent par m_0 est égal à 0 ou à 2.

Partie III - Utilisation de deux surfaces

Dans cette partie, on considère deux matrices A et B appartenant à $M_3(\mathbb{R})$. Ces matrices sont symétriques et inversibles ; elles ont chacune trois valeurs propres non de même signe.

Soient $\mathscr{A}$ et $\mathscr{B}$ les surfaces associées à A et B dans le repère $\mathscr{R}$.

On note $\mathscr{A}_1$ et $\mathscr{B}_1$ les intersections de $\mathscr{A}$ et $\mathscr{B}$ et du plan $z = 1$. Les courbes $\mathscr{A}_1$ et $\mathscr{B}_1$ sont donc des coniques. On suppose qu'on peut mener par tout point m_0 de $\mathscr{B}_1$ deux tangentes à $\mathscr{A}_1$ et que ces tangentes recoupent $\mathscr{B}_1$ en deux points m_1 et m_2 distincts de m_0. On dira que m_0 a la propriété $\mathscr{P}$ si et seulement si la droite m_1m_2 est tangente à $\mathscr{A}_1$.

On fixe le point m_0 sur $\mathscr{B}_1$.

III.A - Représenter, sur un même dessin, $\mathscr{B}_1$, $\mathscr{A}_1$ et le triangle $m_0m_1m_2$. Pour simplifier le dessin, on supposera que $\mathscr{B}_1$ et $\mathscr{A}_1$ sont deux ellipses, $\mathscr{A}_1$ étant en entier à l'intérieur de $\mathscr{B}_1$.

III.B - On utilise maintenant le repère $\mathscr{R}'$ dont la base est $(\overrightarrow{om_0}, \overrightarrow{om_1}, \overrightarrow{om_2})$. Comme dans I.B.4), $\mathscr{A}$ et $\mathscr{B}$ sont associées dans le repère $\mathscr{R}'$ à deux matrices A' et B'.

III.B.1) Écrire les matrices M'_0, M'_1 et M'_2 des coordonnées de m_0, m_1 et m_2 dans le repère $\mathscr{R}'$.

III.B.2) Montrer que B' est de la forme $B' = \begin{bmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & c \\ b & c & 0 \end{bmatrix}$, avec a, b, c non nuls.

III.B.3) Montrer que A' est inversible. On pose $A' = \begin{bmatrix} x & y & z \\ y & t & u \\ z & u & v \end{bmatrix}$.

Déduire de I.D.2) le troisième terme diagonal de ${A'}^{-1}$.
Calculer aussi $\{{}^tM'_1A'M'_0\}^2 - \{{}^tM'_0A'M'_0\}\{{}^tM'_1A'M'_1\}$.

III.B.4) Montrer, en utilisant II.A.2), que $xt - y^2 = 0$.

III.B.5) Justifier que ${A'}^{-1}$ est de la forme $\begin{bmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \beta & 0 & \delta \\ \gamma & \delta & 0 \end{bmatrix}$ et que m_0 a la propriété $\mathscr{P}$ si et seulement si $\alpha = 0$.
Montrer que $\delta \neq 0$.

III.C - Soit $M \in M_3(\mathbb{R})$.
On l'écrit sous la forme $M = \begin{bmatrix} d & e & f \\ g & h & i \\ j & k & l \end{bmatrix}$ et on lui associe le polynôme $P(x) = \det(xI - M)$; on note σ_1 et σ_2 les coefficients respectifs de x^2 et x dans $P(x)$.
Exprimer, en développant $P(x)$, σ_1 et σ_2 en fonction des termes de M.

III.D - Dorénavant, on prend $M = {A'}^{-1}B'$.
III.D.1) Calculer M.
III.D.2)
a) Écrire dans un langage de calcul formel une fonction qui prend en argument les scalaires $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma, \delta$ et qui retourne la valeur de $\dfrac{{\sigma_1}^2}{4} - \sigma_2$.

b) On a $\dfrac{{\sigma_1}^2}{4} - \sigma_2 = 2\alpha\delta ab$. En déduire que $\alpha = 0$ si et seulement si $\sigma_1^2 = 4\sigma_2$.

III.E -
III.E.1) Montrer que les matrices $A^{-1}B$ et ${A'}^{-1}B'$ sont semblables.
III.E.2) En déduire que ${\sigma_1}^2 - 4\sigma_2$ ne dépend pas du choix de m_0 sur $\mathscr{B}_1$.
III.E.3) En déduire que s'il existe un point de $\mathscr{B}_1$ ayant la propriété $\mathscr{P}$, alors tous les points de $\mathscr{B}_1$ ont la propriété $\mathscr{P}$.

III.F - On pose $Q(x) = \det(xA - B)$.
III.F.1) Calculer $Q(x)$ en fonction de $\det(A)$ et de $P(x)$.
III.F.2) On note s et q les coefficients de x^2 et x dans $Q(x)$. Montrer que les points de $\mathscr{B}_1$ ont la propriété $\mathscr{P}$ si et seulement si $s^2 = 4q\det(A)$.

Partie IV - Exemple d'application aux coniques

Dans un plan Π rapporté à un repère orthonormal, on considère deux courbes $\mathscr{A}_1$ et $\mathscr{B}_1$ d'équations respectives $x^2 - 4x + 3 + y^2 = 0$ et $y^2 - 2px = 0$, où p est un réel fixé positif.

IV.A - Préciser la nature de $\mathscr{A}_1$ et $\mathscr{B}_1$.

Représenter $\mathscr{A}_1$ et $\mathscr{B}_1$ sur un même dessin, d'abord dans le cas $p = \dfrac{1}{2}$, puis dans le cas $p = \dfrac{1}{6}$.

Dans ce dernier cas, donner, par ses coordonnées, un exemple de point qui appartienne à $\mathscr{B}_1$ tout en étant à l'intérieur de $\mathscr{A}_1$.

IV.B - On plonge Π dans l'espace, de sorte que le point de coordonnées (x, y) de Π ait pour coordonnées $(x, y, 1)$ dans $\mathscr{R}$.

IV.B.1) Soient $\mathscr{A}$ et $\mathscr{B}$ deux surfaces associées dans $\mathscr{R}$ à deux matrices symétriques A et B.

Comment choisir ces deux matrices pour que ces surfaces coupent le plan $z = 1$ suivant les courbes $\mathscr{A}_1$ et $\mathscr{B}_1$ (utiliser I.B.1)) ?

IV.B.2) Montrer que A et B sont inversibles puis, en utilisant I.C.2)c) , que ni A ni B n'a trois valeurs propres de même signe.

IV.C -

IV.C.1)

Donner les coefficients s et q de x^2 et x dans le polynôme $Q(x) = \det(xA - B)$.

IV.C.2) Montrer que $\dfrac{1}{2}$ est la seule valeur de p telle que, par tout point m_0 de $\mathscr{B}_1$, on puisse mener deux tangentes à $\mathscr{A}_1$ recoupant $\mathscr{A}_1$ en m_1 et m_2 tels que la droite m_1m_2 soit tangente à $\mathscr{A}_1$.

IV.C.3) Avec cette valeur de p, représenter $\mathscr{A}_1$, $\mathscr{B}_1$ et une position quelconque du triangle $m_0m_1m_2$.

••• FIN •••
