# I Première partie

**I.A -**

**I.A.1)** $J = ]-1,1[$, dans ces conditions $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} r^n = \frac{1}{1-r}$ et $\displaystyle\sum_{n=k}^{+\infty} r^n = \frac{r^k}{1-r}$.

Pour $r \neq 1$, $\displaystyle\sum_{n=0}^{p} r^n = \frac{1-r^{p+1}}{1-r}$ et enfin, $\displaystyle\sum_{n=0}^{p} 1 = p+1$.

**I.A.2)** $|2^{-nH}\cos(2^n x)| \leqslant \left(\frac{1}{2^H}\right)^n$ qui est le terme général d'une série géométrique, positive, de raison $\frac{1}{2^H} < 1$, donc convergente.

La série indiquée est bien absolument convergente.

**I.A.3)** $f$ est donc bien définie sur $\mathbb{R}$ et $2\pi$ périodique car chacune des applications $x \mapsto \cos(2^n x)$ est $2\pi$ périodique.

Par ailleurs, $\left|f(x)\right| \leqslant \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2^H}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{1}{2^H}} = \frac{1}{1-2^{-H}} = M_1(H)$.

**I.A.4)** On a : $|t| \leqslant \frac{1}{2}$ donc $\ln|t| \leqslant -\ln 2$, ce qui donne $-\dfrac{\ln|t|}{\ln 2} \geqslant 1$ et, c'est aussi le cas pour sa partie entière, ce qui donne : $N(t) \geqslant 1$.

On utilise maintenant les inégalités de base de la partie entière.

$2^{-N(t)} \geqslant 2^{-\left(-\frac{\ln|t|}{\ln(2)}\right)} = \mathrm{e}^{\ln|t|} = |t|$,

$2^{-N(t)-1} \leqslant 2^{-\left(-\frac{\ln|t|}{\ln(2)}-1\right)-1} = 2^{-\left(-\frac{\ln|t|}{\ln(2)}\right)} = \mathrm{e}^{\ln|t|} = |t|$.

Enfin, $2^{-N(t)} \leqslant 2^{-\left(-\frac{\ln|t|}{\ln(2)}-1\right)} = 2\times 2^{-\left(-\frac{\ln|t|}{\ln(2)}\right)} = 2\,\mathrm{e}^{\ln|t|} = 2|t|$.

On a bien les quatre inégalités demandées.

**I.A.5)** **a)** $z = \mathrm{e}^{ia}\left(\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{i^n h^n}{n!} - 1 - ih\right) = \mathrm{e}^{ia}\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{i^n h^n}{n!}$.

Ce qui donne, en posant $p = n-2$ dans le calcul :

$$|z| = \left|\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{i^n h^n}{n!}\right| \leqslant \sum_{n=2}^{+\infty}\frac{|h|^n}{n!} = h^2\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{|h|^{n-2}}{n!} \leqslant h^2\sum_{n=2}^{+\infty}\frac{|h|^{n-2}}{(n-2)!} = h^2\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{|h|^p}{p!} = h^2\mathrm{e}^{|h|}.$$

**b)** Tout d'abord : $|\mathfrak{Re}(z)| \leqslant |z| \leqslant h^2\mathrm{e}^{|h|}$.

Par ailleurs, $z = \mathrm{e}^{i(a+h)} - \mathrm{e}^{ia} - ih\mathrm{e}^{ia}$, ce qui nous donne : $\mathfrak{Re}(z) = \cos(a+h) - \cos(a) + h\sin(a)$, il ne reste qu'à conclure : $|\cos(a+h) - \cos(a) + h\sin(a)| \leqslant h^2\mathrm{e}^{|h|}$

**I.A.6)** Montrons d'abord que : $\mathrm{e}^{2^n t} \leqslant \mathrm{e}$, quand $n \in [\![0, N(t)-1]\!]$.

Ainsi : $2^n \leqslant 2^{N(t)} \leqslant 2^{-\frac{\ln|t|}{\ln(2)}} = \dfrac{1}{|t|}$ ce qui entraine l'inégalité préliminaire.

$$\left|S_{N(t)}(x+t) - S_{N(t)}(x) + t\sum_{n=0}^{N(t)-1} 2^{n(1-H)}\sin(2^n x)\right| = \left|\sum_{n=0}^{N(t)-1} 2^{-nH}\left(\cos 2^n(x+t) - \cos 2^n x + 2^n t\sin 2^n x\right)\right|$$

$$\leqslant \sum_{n=0}^{N(t)-1} 2^{-nH}2^{2n}t^2\mathrm{e}^{2^n t} \leqslant t^2\sum_{n=0}^{N(t)-1} 2^{n(2-H)}\mathrm{e} \leqslant \mathrm{e}\,t^2\sum_{n=0}^{N(t)-1} 2^{n(2-H)}$$

On a bien le résultat demandé.

Maintenant, pour $H < 2$, $\mathrm{e}\,t^2\displaystyle\sum_{n=0}^{N(t)-1} 2^{n(2-H)} = \mathrm{e}\,t^2\frac{1-2^{N(t)(2-H)}}{1-2^{2-H}} \leqslant \frac{\mathrm{e}\,t^2}{1-2^{2-H}} \leqslant \frac{\mathrm{e}|t|^H}{1-2^{2-H}}$.

Rappelons en effet que $|t| < 1$.

$C_1(H) = \dfrac{\mathrm{e}}{1-2^{2-H}}$ convient donc.

Pour $H = 2$, $\mathrm{e}\,t^2\displaystyle\sum_{n=0}^{N(t)-1} 1 = \mathrm{e}\,t^2 N(t) \leqslant \mathrm{e}\,t^2\left(\frac{\ln\left(\frac{1}{|t|}\right)}{\ln 2} + 1\right) \leqslant \mathrm{e}\,t^2\left(2\frac{\ln\left(\frac{1}{|t|}\right)}{\ln 2}\right)$.

Rappelons en effet cette fois ci que $|t| < \frac{1}{2}$.

$K = \dfrac{2e}{\ln 2}$ convient donc.

**I.A.7)** $\left|T_{N(t)}(x+t) - T_{N(t)}(x)\right| = \left|\sum_{n=N(t)}^{+\infty} 2^{-nH}\left(\cos 2^n(x+t) - \cos 2^n x\right)\right|$

$\leqslant \sum_{n=N(t)}^{+\infty} 2^{-nH} 2 \leqslant 2\dfrac{2^{-N(t)H}}{1-2^{2-H}} \leqslant \dfrac{2}{1-2^{2-H}}(2|t|)^H = \dfrac{2^{H+1}}{1-2^{2-H}}|t|^H.$

$C_2(H) = \dfrac{2^{H+1}}{1-2^{2-H}}$ convient donc.

**I.B -**

**I.B.1)** $\left|-2^{n(1-H)}\sin 2^n x\right| \leqslant 2^{n(1-H)} = \left(2^{(1-H)}\right)^n$.

Or $H > 1$ entraine $\left|2^{(1-H)}\right| < 1$, ce qui prouve que la série converge.

$g(x)$ est donc la somme d'une série absolument convergente pour toute valeur de $x$.

$g$ est donc bien définie sur $\mathbb{R}$.

De plus, $\left|g(x)\right| \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty}\left(2^{(1-H)}\right)^n = \dfrac{1}{1-2^{(1-H)}}$.

$M_2(H) = \dfrac{1}{1-2^{(1-H)}}$ convient donc.

**I.B.2)** $l(t) = \dfrac{f(x+t)-f(x)}{t} + \sum_{n=0}^{N(t)-1} 2^{n(1-H)}\sin(2^n x)$

$= \dfrac{S_{N(t)}(x+t) - S_{N(t)}(x)}{t} + \sum_{n=0}^{N(t)-1} 2^{n(1-H)}\sin(2^n x) + \dfrac{T_{N(t)}(x+t) - T_{N(t)}(x)}{t}.$

Ce qui donne : $\left|f(t)\right| \leqslant \dfrac{C_1(H)|t|^H}{|t|} + \dfrac{C_2(H)|t|^H}{|t|} = \left(C_1(H) + C_2(H)\right)|t|^{H-1} \underset{t\to 0}{\to} 0$, car $H - 1 \in ]0,1]$.

**I.B.3)** $N(t) \underset{t\to 0}{\to} +\infty$, donc : $\sum_{n=0}^{N(t)-1} 2^{n(1-H)}\sin(2^n x) \underset{t\to 0}{\to} \sum_{n=0}^{+\infty} 2^{n(1-H)}\sin(2^n x) = -g(x)$.

Ceci implique que : $\dfrac{f(x+t)-f(x)}{t} \underset{t\to 0}{\to} g(x)$, et, par définition de la dérivabilité, que $f$ est dérivable pour toute valeur de $x$, de dérivée $f'(x) = g(x)$.

En un mot, $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f' = g$.

**I.B.4)** **a)** $f$ est paire, donc, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on a : $b_n(f) = 0$.

$a_0(f) = \dfrac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{2\pi}\sum_{p=0}^{+\infty}\left(2^{-pH}\int_0^{2\pi}\cos(2^p x)\,\mathrm{d}x\right) = 0.$

On travaille maintenant pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$a_n(f) = \dfrac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos(nx)\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{\pi}\sum_{p=0}^{+\infty}\left(2^{-pH}\int_0^{2\pi}\cos(2^p x)\cos(nx)\,\mathrm{d}x\right).$

En transformant le produit de cosinus en somme, on obtient :

$\int_0^{2\pi}\cos(2^p x)\cos(nx)\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{2}\int_0^{2\pi}\cos(2^p x + nx)\,\mathrm{d}x + \dfrac{1}{2}\int_0^{2\pi}\cos(2^p x - nx)\,\mathrm{d}x$

$= \dfrac{1}{2}\int_0^{2\pi}\cos((2^p+n)x)\,\mathrm{d}x + \dfrac{1}{2}\int_0^{2\pi}\cos((2^p-n)x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{2}\int_0^{2\pi}\cos((2^p-n)x)\,\mathrm{d}x.$

Mais ceci vaut 0 si $n \neq 2^p$ et vaut $\pi$ si $n = 2^p$.

Finalement, $a_n(f) = 0$ si $n$ n'est pas de la forme $2^p$, et $a_{2^p}(f) = 2^{-pH}$.

**b)** La plupart des termes étant nuls, la somme partielle de la série de Fourier jusqu'au rang $2^n$ est :

$S_{2^n}(f)(x) = \sum_{p=0}^{n}\cos(2^p x)$.

**c)** $f$ est $2\pi$ périodique, définie sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathscr{C}^1$, donc continue et de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux, elle est donc partout égale à la somme de sa série de Fourier (qui converge !).

**I.B.5)** **a)** On utilise bien sûr le théorème de Parseval dont les hypothèses, plus faibles que celles du théorème de Dirichlet, sont ici vérifiées.

$\dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T f^2(t)\,\mathrm{d}t = a_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(a_n^2 + b_n^2\right)$.

Donc ici : $\displaystyle\int_0^{2\pi} f^2(t)\,\mathrm{d}t = \pi\sum_{p=0}^{+\infty} 2^{-2pH} = \frac{\pi}{1-2^{-2H}}$.

**b)** On a $f^2(t) = |f(t)| \times |f(t)| \leqslant M_1(H)\,|f(t)|$.

Ce qui entraine $|f(t)| \geqslant \dfrac{f^2(t)}{M_1(H)}$.

En passant aux intégrales :

$$\int_0^{2\pi} |f(t)|\,\mathrm{d}t \geqslant \frac{1}{M_1(H)}\int_0^{2\pi} f^2(t)\,\mathrm{d}t \geqslant \frac{\pi}{M_1(H)\left(1-2^{-2H}\right)} = \frac{\pi\left(1-2^{-H}\right)}{\left(1-2^{-H}\right)\left(1+2^{-H}\right)} = \frac{\pi}{1+2^{-H}}.$$

**I.C -** Ici, $H = 2$.

**I.C.1)** On fait le tableau de valeurs suivant :

| | $\cos(2^n\pi/4)$ | $\cos(2^n 3\pi/4)$ | $\sin(2^n\pi/4)$ | $\sin(2^n 3\pi/4)$ |
|---|---|---|---|---|
| $n=0$ | $\sqrt{2}/2$ | $-\sqrt{2}/2$ | $\sqrt{2}/2$ | $\sqrt{2}/2$ |
| $n=1$ | 0 | 0 | 1 | $-1$ |
| $n=2$ | $-1$ | $-1$ | 0 | 0 |
| $n\geqslant 3$ | 1 | 1 | 0 | 0 |

D'où $f\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2} - 2^{-4} + \displaystyle\sum_{n=3}^{+\infty} 2^{-2n} = \frac{\sqrt{2}}{2} - 2^{-4} + \frac{2^{-6}}{1-2^{-2}}$.

$f\left(\dfrac{3\pi}{4}\right) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} - 2^{-4} + \displaystyle\sum_{n=3}^{+\infty} 2^{-2n} = \frac{-\sqrt{2}}{2} - 2^{-4} + \frac{2^{-6}}{1-2^{-2}}$.

$g\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} - 2^{-1}$.

$g\left(\dfrac{3\pi}{4}\right) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} + 2^{-1}$.

On peut bien sûr arranger encore un peu ces expressions.

**I.C.2)** **a)** La valeur minimale de $\varphi(x)$ sur $\left[\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{3\pi}{4}\right]$ est obtenue, en tenant compte du graphe sur la calculatrice, en $\dfrac{3\pi}{4}$.

Cette valeur est donc : $\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}$.

**b)** $|g(x) + \varphi(x)| = \displaystyle\sum_{n=4}^{+\infty} \frac{\sin(2^n x)}{2^n} \leqslant \sum_{n=4}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{8}$.

Ce qui donne : $g(x) \leqslant \dfrac{1}{8} - \varphi(x) \leqslant \dfrac{1}{8} - \dfrac{\sqrt{2}-1}{2} < 0$ sur $\left[\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{3\pi}{4}\right]$.

**c)** $f$ est donc continue, strictement décroissante sur $\left[\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{3\pi}{4}\right]$, de plus $f\left(\dfrac{\pi}{4}\right) > 0$ et $f\left(\dfrac{3\pi}{4}\right) < 0$.

**I.C.3)** $f$ s'annule donc exactement une fois sur cet intervalle.

**I.D -** Ici, $H \in ]0,1[$.

**I.D.1)** On pose $h(x) = 1 - \cos x - \dfrac{x^2}{4}$,

ce qui donne $h'(x) = \sin x - \dfrac{x}{2}$ et $h''(x) = \cos x - \dfrac{1}{2}$ qui est positive sur $\left[0, \dfrac{\pi}{3}\right]$ puis négative.

D'où le tableau de variation :

| $x$ | $0$ | | $\pi/3$ | | $\pi/2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $h''(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $h'(x)$ | $0$ | $\nearrow$ | | $\searrow$ | $1-\pi/4>0$ |
| $h(x)$ | $0$ | $\nearrow$ | | $\nearrow$ | |

On a bien $h$ qui est positive sur l'intervalle, ce qui donne l'inégalité demandée.

**I.D.2)** Notons bien qu'on va ici utiliser le fait que $0 \leqslant 2^n t \leqslant 1 < \pi/2$, dont la partie délicate a été montrée au I.A-6, et le fait que $2^{N(t)} \geqslant \dfrac{1}{2t}$, montrée au I.A-4.

$$S_{N(t)}(0) - S_{N(t)}(t) = \sum_{n=0}^{N(t)-1} 2^{-nH}\left(1-\cos\left(2^n t\right)\right) \geqslant \sum_{n=0}^{N(t)-1} 2^{-nH}\frac{2^{2n}t^2}{4} \geqslant \frac{t^2}{4}\sum_{n=0}^{N(t)-1} 2^{n(2-H)}$$

$$\geqslant \frac{t^2}{4}\times\frac{2^{N(t)(2-H)}-1}{2^{2-H}-1} \geqslant \frac{t^2}{4}\times\frac{\left(2^{N(t)}\right)^{2-H}-1}{2^{2-H}-1} \geqslant \frac{t^2}{4}\times\frac{1}{2^{2-H}-1}\left(\frac{1}{2^{2-H}}\times\frac{1}{t^{2-H}}-1\right)$$

$$\geqslant \frac{1}{4}\times\frac{1}{2^{2-H}-1}\times\frac{1}{2^{2-H}}\left(t^H - t^2 2^{2-H}\right).$$

$C_3(H) = \dfrac{1}{4}\times\dfrac{1}{2^{2-H}-1}\times\dfrac{1}{2^{2-H}}$ convient donc. La quantité étant positive, l'inégalité est encore vraie en valeur absolue.

**I.D.3)** $T_{N(t)}(0) - T_{N(t)}(t) = \sum_{n=N(t)}^{+\infty} 2^{-nH}\left(1-\cos\left(2^n t\right)\right) \geqslant 0$ par simple somme d'une série positive convergente.

**I.D.4)** $\dfrac{f(0)-f(t)}{t} = \dfrac{S_{N(t)}(0)-S_{N(t)}(t)}{t} + \dfrac{T_{N(t)}(0)-T_{N(t)}(t)}{t}$

Remarquons que le premier quotient de cette somme tend vers $+\infty$ en $0^+$ et que le deuxième quotient est positif.

Ce qui donne : $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{f(t)-f(0)}{t} = -\infty$, ce qui, par définition de la dérivabilité, prouve que $f$ n'est pas dérivable en 0.

La courbe représentative de $f$ possède tout simplement une tangente verticale en ce point.

# II Seconde partie

**II.A -**

**II.A.1)** $Q$ étant un polynôme, $f$ est clairement de classe $\mathscr{C}^{+\infty}$. On utilisera à la question suivante le fait qu'elle est de classe $\mathscr{C}^2$ pour les dérivées partielles croisées égales et le développement de Taylor.

$\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}\times f$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial y}\times f$, et comme $f$ ne s'annule pas (c'est une exponentielle), les dérivées partielles de $f$ et de $Q$ s'annulent aux mêmes points.

**II.A.2)** $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 Q}{\partial x^2} \times f + \left(\dfrac{\partial Q}{\partial x}\right)^2 \times f$,

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \dfrac{\partial^2 Q}{\partial x \partial y} \times f + \dfrac{\partial Q}{\partial x} \times \dfrac{\partial Q}{\partial y} \times f$, et,

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \dfrac{\partial^2 Q}{\partial y^2} \times f + \left(\dfrac{\partial Q}{\partial y}\right)^2 \times f$.

En un point où les dérivées partielles premières de $Q$ sont nulles, on a :

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 Q}{\partial x^2} \times f$,

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 Q}{\partial x \partial y} \times f$, et,

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \dfrac{\partial^2 Q}{\partial y^2} \times f$.

On retrouve alors le même type de relation que pour les dérivées partielles premières.

**II.A.3)** Pour trouver les extremums locaux, on se place aux points critiques où les dérivées partielles premières sont nulles.

Remarquons aussi que $\dfrac{\partial^2 Q}{\partial x^2} = 2a$, $\dfrac{\partial^2 Q}{\partial x \partial y} = b$, et enfin, $\dfrac{\partial^2 Q}{\partial y^2} = 2c$.

En un point critique de $f$ ou $Q$, on calcule $s^2 - rt = \left(b^2 - 4ac\right) f^2(x_0, y_0)$ pour $f$ et, $s^2 - rt = \left(b^2 - 4ac\right)$ pour $Q$.

Ces deux quantités n'étant pas nulles et étant de même signe, les points critiques étant les mêmes, on peut toujours conclure sur l'existence d'un extremum pour $f$ et pour $Q$. Si on a un extrémum pour $f$, on en a aussi un pour $Q$, et réciproquement, les extremums de $f$ et $Q$ sont donc situés aux mêmes points.

Comme $f(x_0, y_0) > 0$, les signes de $2af(x_0, y_0)$ et $2a$ sont les mêmes, ces extremums sont de même nature.

**II.B -**

**II.B.1)** On cherche les points critiques de $Q_1$ qui sont solution du système : $\begin{cases} x + \dfrac{2}{3}y - \dfrac{5}{3} = 0 \\ \dfrac{2}{3}x - 2y + \dfrac{11}{3} = 0 \end{cases}$

Ce système possède une solution unique. Remarquons que : $s^2 - rt = b^2 - 4ac = \dfrac{4}{9} + 2 > 0$, on a alors un point col.

Il n'y a pas d'extrémums pour $f_1$.

**II.B.2)** Pour $Q_2$, $s^2 - rt = b^2 - 4ac = -\dfrac{2}{5} < 0$.

On aura un extrémum en chaque point critique, c'est à dire chaque point vérifiant :

$$\begin{cases} 2x - \dfrac{19}{10} = 0 \\ \dfrac{1}{5}y + \dfrac{1}{10} = 0 \end{cases}.$$

L'unique point critique est donc de coordonnées : $\left(\dfrac{19}{20}, -\dfrac{1}{2}\right)$. En ce point, $\dfrac{\partial^2 Q_2}{\partial x^2} = 2a = 2 > 0$. C'est un minimum.

**II.B.3)** $Q_1(x, 2x) = -\dfrac{13}{6}x^2 + \dfrac{17}{3}x - \dfrac{7}{2} = Q_2(x, 2x) = \dfrac{7}{5}x^2 - \dfrac{17}{10}x + \dfrac{3}{10}$ est équivalent à :

$107x^2 - 221x + 114 = 0$, équation du second degré possédant deux racines : 1 et $\dfrac{114}{107}$.

On a donc exactement deux points : $(1, 2)$ et $\left(\dfrac{114}{107}, \dfrac{228}{107}\right)$ tels que $Q_1 = Q_2$.

**II.C -**

**II.C.1)** $Q_1(1,2) = Q_2(1,2) = 0$, donc $f_1(1,2) = 1$, et $f_2(1,2) = 2$, ce qui donne finalement $F(1,2) = (1,2)$.

**II.C.2)** La surface $\mathscr{S}_1$ est d'équation cartésienne $f_1(x,y) - z = 0$.

Son plan tangent en $(1,2,1)$ est normal au gradient de cette équation en ce point : $\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -1\right)$.

L'équation est donc $\frac{2}{3}(x-1) + \frac{1}{3}(y-2) - (z-1) = 0$.

Après simplification, on obtient : $2x + y - 3z = 1$.

Pour $\mathscr{S}_2$ qui est d'équation cartésienne $f_2(x,y) - z = 0$.

Son plan tangent en $(1,2,2)$ est normal au gradient de cette équation en ce point : $\left(\frac{1}{5}, \frac{6}{5}, -1\right)$.

L'équation est donc $\frac{1}{5}(x-1) + \frac{6}{5}(y-2) - (z-2) = 0$.

Après simplification, on obtient : $x + 6y - 5z = 3$.

**II.C.3)** On a déjà calculé à la question précédente les dérivées partielles de $f_1$ et $f_2$ en $(1,2)$.

Ceci nous donne la matrice jacobienne de $F$ en ce point : $\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{5} & \frac{6}{5} \end{pmatrix}$.

On calcule son polynôme caractéristique : $\lambda^2 - \frac{28}{15}\lambda + \frac{11}{15} = 0$.

Son discriminant est $\left(\frac{28}{15}\right)^2 - \frac{44}{15} = \frac{124}{225} > 0$, on a donc un polynôme caractéristique scindé à racines simples, cette matrice est diagonalisable.