MATHÉMATIQUES II

Soit $\mathbb{P}$ le plan vectoriel $\mathbb{R}^2$ muni du produit scalaire usuel et orienté par la base canonique $(\vec{i},\vec{j})$.

On notera $o = (0,0)$ l'origine du plan. Tout élément (x,y) de $\mathbb{P}$ peut s'interpréter comme un point p de coordonnées (x,y) dans le repère $(o,\vec{i},\vec{j})$, ou comme un vecteur $\vec{p}$ de coordonnées (x,y) dans la base $(\vec{i},\vec{j})$.
Pour deux vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ de $\mathbb{P}$, on note alors $\langle\vec{u}|\vec{v}\rangle$ leur produit scalaire et $det(\vec{u},\vec{v})$ leur déterminant dans toute base orthonormale directe ; on désigne par U l'ensemble des vecteurs de norme 1, et pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on note $(\vec{u}(\theta),\vec{v}(\theta))$ le repère polaire, défini par :

$$\vec{u}(\theta) = \cos\theta\,\vec{i} + \sin\theta\,\vec{j}\ ,\ \vec{v}(\theta) = -\sin\theta\,\vec{i} + \cos\theta\,\vec{j}\ .$$

On rappelle qu'étant donnés $m \in \mathbb{P}$ et $\vec{w} \in \mathbb{P}\backslash\{\vec{0}\}$, la droite affine passant par m et de vecteur directeur $\vec{w}$ est l'ensemble d des éléments de $\mathbb{P}$ pouvant s'écrire $m + \lambda\vec{w}$, avec $\lambda \in \mathbb{R}$, c'est à dire :

$$d = m + \mathbb{R}\,\vec{w} = \{p \in \mathbb{P} \mid \exists\lambda \in \mathbb{R}, p = m + \lambda\vec{w}\}.$$

On appelle alors *axe* du plan $\mathbb{P}$ tout couple $\delta = (d,\vec{w})$ formé d'une droite affine d, appelée support de δ, et d'un vecteur $\vec{w}$, vecteur directeur de d de norme 1. Un axe est ainsi une droite affine orientée. Réciproquement, chaque droite affine d définit deux axes d'orientations opposées : $(d,\vec{w})$ et $(d,-\vec{w})$.

En notant Δ l'ensemble des axes du plan $\mathbb{P}$, on va successivement :

- construire un modèle cylindrique de Δ et y analyser quelques situations de géométrie élémentaire,
- étudier sur le cylindre représentant Δ les transformations correspondant aux isométries du plan $\mathbb{P}$.

Filière TSI

Partie I - Modèle cylindrique de l'ensemble des axes du plan

On note $\mathbb{E}$ l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, muni du produit scalaire usuel et orienté par la base canonique $(\vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$. Dans tout le problème, les lettres minuscules désigneront les objets relatifs à $\mathbb{P}$ (points, vecteurs, droites, coordonnées), tandis que les majuscules concerneront les objets relatifs à $\mathbb{E}$; on notera ainsi (x,y) les coordonnées des éléments de $\mathbb{P}$ dans la base $(\vec{i},\vec{j})$ et (X, Y, Z) celles des éléments de $\mathbb{E}$ dans la base $(\vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$.

I.A - Caractériser l'ensemble $\mathscr{C} = U \times \mathbb{R}$ par une équation cartésienne en (X, Y, Z), puis montrer que $\mathscr{C}$ est un cylindre de révolution de $\mathbb{E}$ dont on précisera l'axe de révolution, les génératrices et les parallèles.

I.B -

I.B.1) On considère un axe $\delta = (d,\vec{w})$ défini par $m \in \mathbb{P}$ et $\vec{w} \in U$, en posant :

$$d = m + \mathbb{R}\,\vec{w}.$$

Montrer que lorsque p décrit la droite d, le réel $\det(p, \vec{w})$ reste constant ; on notera h_δ sa valeur.

Interpréter géométriquement ce réel h_δ à l'aide du projeté orthogonal m_0 de l'origine o sur d.

Montrer que $m_0 = -h_\delta r_{\pi/2}(\vec{w})$ où $r_{\pi/2}$ est la rotation vectorielle d'angle $+\pi/2$.

I.B.2) Soient $\vec{w} = \vec{u}(\theta)$ pour $\theta \in \mathbb{R}$, et $k \in \mathbb{R}$; considérant l'axe $\delta = (d,\vec{u}(\theta))$ avec :

$$d = -k\vec{v}(\theta) + \mathbb{R}\,\vec{u}(\theta),$$

calculer h_δ et caractériser d par une équation cartésienne en (x,y).

I.B.3) Montrer que l'application $H : \delta = (d,\vec{w}) \mapsto (\vec{w},h_\delta)$ définit une bijection entre Δ et le cylindre $\mathscr{C}$.

Soit $M = (\vec{w},k) \in \mathscr{C}$; indiquer par un schéma la construction de $\delta = H^{-1}(M)$ à partir de $\vec{w}$ et k dans le cas $k > 0$.

À chaque axe δ de Δ est ainsi associé bijectivement un point de $\mathscr{C}$. Le cylindre $\mathscr{C}$, image de Δ par H, devient ainsi une représentation de l'ensemble des axes. On se propose dans le reste de cette partie de déchiffrer sur cette représentation quelques propriétés géométriques relatives aux axes du plan $\mathbb{P}$.

I.C - Chaque partie du cylindre $\mathscr{C}$ est l'image par la bijection H d'une partie de Δ. Caractériser précisément en termes géométriques les ensembles des axes du plan $\mathbb{P}$ correspondant respectivement :

- à une génératrice de $\mathscr{C}$;
- à l'ensemble $U \times \{0\}$;
- à un parallèle de $\mathscr{C}$.

I.D -

I.D.1) Soit, dans le plan $\mathbb{P}$, la rotation r de centre o et d'angle $\omega \in \mathbb{R}$ qui se confond avec la rotation vectorielle d'angle ω. Pour tout axe $\delta = (d,\vec{w})$, on considère alors l'axe $(r(d), r(\vec{w}))$, que l'on note $\bar{r}(\delta)$. On définit ainsi une application $\bar{r}$ de Δ dans Δ et il en résulte une application $\overline{R}$ de $\mathscr{C}$ dans $\mathscr{C}$ qui à $M = H(\delta)$ associe $\overline{R}(M) = H(\bar{r}(\delta))$.

Montrer que $h_{\bar{r}(\delta)} = h_{\delta}$.
En déduire que $\overline{R}$ correspond à la restriction à $\mathscr{C}$ d'un endomorphisme R de l'espace vectoriel $\mathbb{E}$. On précisera cet endomorphisme et on en donnera la matrice dans la base $(\vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$.

I.D.2) On condidère l'application de $\mathscr{C}$ dans $\mathscr{C}$ obtenue par restriction à $\mathscr{C}$ de la symétrie S de centre $O = (0,0,0)$ (confondue avec l'endomorphisme $\vec{U} \mapsto -\vec{U}$ de $\mathbb{E}$). Par l'intermédiaire de H^{-1}, il lui correspond une application σ de Δ dans Δ. Déterminer cette application ; provient-elle d'une isométrie de $\mathbb{P}$, comme c'était le cas pour l'application $\bar{r}$ de la question I.D.1 ?

I.E - Pour $\alpha > 0$, on considère le point $a = (\alpha,0)$ de $\mathbb{P}$ et on appelle *faisceau* des axes passant par a l'ensemble Δ_a des axes dont le support passe par a ; on veut déterminer l'ensemble $H(\Delta_a)$.

I.E.1) Caractériser par une relation entre k et θ les éléments $(\vec{u}(\theta), k)$ de $\mathscr{C}$ appartenant à $H(\Delta_a)$.

I.E.2) Montrer que $H(\Delta_a)$ est l'intersection de $\mathscr{C}$ et d'un plan vectoriel de E.

I.E.3) Établir que l'ensemble $H(\Delta_a)$ est une ellipse dont on précisera le centre, l'axe focal, le demi-grand axe, le demi-petit axe, la distance focale et l'excentricité.

I.E.4) Représenter sur un même schéma cette ellipse ainsi que l'intersection de $\mathscr{C}$ avec le plan XOY.

I.F -

I.F.1) Soit maintenant m un point quelconque de $\mathbb{P}$ et Δ_m le faisceau des axes passant par m ; déduire des questions précédentes la nature et la position de l'ensemble $H(\Delta_m)$.

I.F.2) Réciproquement, étant donné un plan vectoriel P de $\mathbb{E}$, préciser selon la direction de P la nature de l'ensemble $H^{-1}(P \cap \mathscr{C})$.

I.F.3) Soient δ_1, δ_2, δ_3 trois axes caractérisés respectivement par les relations $H(\delta_i) = (\vec{u}(\theta_i), k_i)$.

Démontrer que leurs supports sont tous concourants ou tous parallèles si et seulement si :

$$k_1 \sin(\theta_3 - \theta_2) + k_2 \sin(\theta_1 - \theta_3) + k_3 \sin(\theta_2 - \theta_1) = 0 .$$

I.G - On appelle *cycle* γ de $\mathbb{P}$ tout cercle de $\mathbb{P}$ orienté par une paramétrisation ; un axe δ est *tangent* à ce cycle si son support est tangent au cercle correspondant, avec des orientations de δ et γ concordantes.

I.G.1) Soit P un plan vectoriel de $\mathbb{E}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$; on considère le plan affine $Q = P + \lambda\vec{K}$ obtenu par translation du plan P, de vecteur $\lambda\vec{K}$.

Montrer que ce procédé fournit tous les plans affines de $\mathbb{E}$ à l'exception d'un ensemble de plans que l'on précisera.

I.G.2) On considère un tel plan affine $Q = P + \lambda\vec{K}$, non vectoriel c'est-à-dire ne contenant pas l'origine $O = (0, 0, 0)$.

Démontrer que $Q \cap \mathscr{C}$ est l'image par H de l'ensemble des axes tangents à un cycle que l'on précisera.

Si Q coupe la droite OZ en Ω, que représente la distance $O\Omega$?

Préciser la nature géométrique de l'ensemble $Q \cap \mathscr{C}$.

I.G.3) Montrer que réciproquement, tout cycle de $\mathbb{P}$ peut être associé à un plan affine de $\mathbb{E}$.

I.G.4) Soit (a, b, c) un triangle du plan $\mathbb{P}$; en orientant les droites (ab), (bc) et (ca) par les vecteurs $\overrightarrow{ab}$, $\overrightarrow{bc}$ et $\overrightarrow{ca}$, on obtient trois axes représentés par trois points du cylindre $\mathscr{C}$.

Montrer que ces trois points de $\mathscr{C}$ définissent un plan affine Q de $\mathbb{E}$, associé à un cycle γ de $\mathbb{P}$ comme en I.G.2 et I.G.3. Quelle est la particularité de ce cycle relativement au triangle (a, b, c) ?

Partie II - Transformations de l'ensemble des axes du plan

II.A - On considère dans cette question la translation t de $\mathbb{P}$, de vecteur $\vec{\tau} = \alpha\vec{i} + \beta\vec{j}$ non nul. À tout axe $\delta = (d, \vec{w})$, on associe l'axe $\delta' = (t(d), \vec{w})$ que l'on note $\bar{t}(\delta)$. On définit ainsi une application $\bar{t}$ de Δ dans Δ dont on déduit une application $\overline{T}$ de $\mathscr{C}$ dans $\mathscr{C}$ qui à $M = H(\delta)$ associe $\overline{T}(M) = H(\bar{t}(\delta))$.

II.A.1) En reprenant les notations de la question I.B, exprimer $h_{\delta'}$ en fonction de h_δ, $\vec{w}$ et $\vec{\tau}$.

II.A.2) Montrer que $\overline{T}$ correspond à la restriction à $\mathscr{C}$ d'un endomorphisme T de l'espace vectoriel $\mathbb{E}$ dont on donnera la matrice dans la base $(\vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$.

II.A.3) Montrer que l'ensemble des vecteurs de $\mathbb{E}$ invariants par T est un plan vectoriel P que l'on précisera. L'endomorphisme T est-il diagonalisable ?

II.A.4) Déterminer l'ensemble $H^{-1}(P \cap \mathscr{C})$ et indiquer ce qu'il représente vis-à-vis de la translation t.

II.B - Soit φ un automorphisme orthogonal de $\mathbb{P}$. À tout $\delta = (d, \vec{w})$, on associe $\bar{\varphi}(\delta) = (\varphi(d), \varphi(\vec{w}))$, ce qui définit une application $\bar{\varphi}$ de Δ dans Δ, puis l'application $\overline{\Phi}$ de $\mathscr{C}$ dans $\mathscr{C}$ qui à $M = H(\delta)$ associe $\overline{\Phi}(M) = H(\bar{\varphi}(\delta))$.

II.B.1) Montrer que $\overline{\Phi}$ correspond à la restriction à $\mathscr{C}$ d'un endomorphisme Φ dont on exprimera la matrice dans la base $(\vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$ à l'aide de la matrice N de φ dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$.

II.B.2) Soit maintenant φ une symétrie orthogonale par rapport à une droite vectorielle d_0 de $\mathbb{P}$. L'endomorphisme Φ de $\mathbb{E}$ est-il diagonalisable ?

Caractériser Φ en termes géométriques. Pour chaque sous-espace propre $\mathbb{E}_i$ de Φ, interpréter $H^{-1}(\mathbb{E}_i \cap \mathscr{C})$ vis-à-vis de la symétrie φ.

II.C - On rappelle que toute isométrie f de $\mathbb{P}$ peut s'écrire de manière unique sous la forme $f = t \circ \varphi$ où t et φ sont respectivement une translation et un automorphisme orthogonal de $\mathbb{P}$; avec les notations des questions II.A et II.B, on pose alors : $\bar{f} = \bar{t} \circ \bar{\varphi}$, $\overline{F} = \overline{T} \circ \overline{\Phi}$ et $F = T \circ \Phi$.

II.C.1) Montrer que l'endomorphisme F ainsi obtenu a dans la base $(\vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$ une matrice de la forme :

$$\begin{bmatrix} \begin{matrix} & N & \end{matrix} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \\ \lambda \quad \mu & \det N \end{bmatrix},$$

où N désigne une matrice réelle orthogonale d'ordre 2 et (λ, μ) un couple de réels.

Exprimer le vecteur $\lambda\vec{i} + \mu\vec{j}$ à l'aide de α, β, $\vec{i}$, $\vec{j}$ et φ.

II.C.2) À quelle condition, portant sur N, λ et μ, F est-il diagonalisable ? Déterminer les isométries f correspondantes.

II.D - On veut maintenant étudier si d'autres endomorphismes F de $\mathbb{E}$ pourraient correspondre, par restriction à $\mathscr{C}$ et par l'intermédiaire de H^{-1}, à d'autres transformations de $\mathbb{P}$.

II.D.1) Démontrer que toute homothétie de $\mathbb{P}$, de centre o et de rapport $k > 0$ correspond bien par les procédés utilisés précédemment à un endomorphisme de $\mathbb{E}$ dont on donnera la matrice.

II.D.2) Soit F un automorphisme de $\mathbb{E}$ tel que $F(\mathscr{C}) \subset \mathscr{C}$.

Montrer que les projections orthogonales de $F(\vec{I})$ et $F(\vec{J})$ sur le plan XOY sont orthonormées.

En déduire que F a dans la base $(\vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$ une matrice de la forme :

$$\begin{bmatrix} \begin{matrix} & N & \end{matrix} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \\ \lambda \quad \mu & \nu \end{bmatrix},$$

où N désigne une matrice réelle orthogonale d'ordre 2 et (λ, μ, ν) un triplet de réels.

II.D.3) Établir que les endomorphismes F de $\mathbb{E}$, tels que $F(\mathscr{C}) \subset \mathscr{C}$ et de déterminant strictement positif, correspondent aux similitudes de $\mathbb{P}$.

II.D.4) Que faut-il penser de ce point de vue des endomorphismes de $\mathbb{E}$ tels que $F(\mathscr{C}) \subset \mathscr{C}$ et de déterminant strictement négatif ?

••• FIN •••
