I Modèle cylindrique de l'ensemble des axes du plan

I.A - Les éléments de U correspondent à $x^2 + y^2 = 1$, qui devient l'équation de $\mathscr{C}$ dans $\mathbb{E}$ à savoir $X^2 + Y^2 = 1$, équation du cylindre de révolution
- d'axe $\left(O, \overrightarrow{K}\right)$;
- de génératrices $(\cos\theta, \sin\theta, \lambda)$ avec θ fixé et λ décrivant $\mathbb{R}$;
- et enfin de parallèles les cercles de même représentation avec λ fixé et θ décrivant $\mathbb{R}$ ou $[0, 2\pi[$.

I.B - La bijection H

I.B.1) $\det\left(p, \overrightarrow{w}\right) = \det\left(m + \lambda\overrightarrow{w}, \overrightarrow{w}\right) = \det\left(m, \overrightarrow{w}\right)$ qui est bien constant et qu'on écrit h_δ.

$h_\delta = \det\left(m_0, \overrightarrow{w}\right) = \overrightarrow{m_0 o} \cdot \overrightarrow{w}$, ce qui entraine que : $\overrightarrow{om_0} = m_0 = -h_\delta\, r_{\pi/2}\left(\overrightarrow{w}\right)$.

I.B.2) $h_\delta = \det\left(m, \overrightarrow{u}(\theta)\right) = \det\left(-k\overrightarrow{v}(\theta) + \lambda\overrightarrow{u}(\theta), \overrightarrow{u}(\theta)\right) = k$.

Pour obtenir une équation cartésienne de d, on remplace $\overrightarrow{u}(\theta)$ et $\overrightarrow{v}(\theta)$ par leur valeur, les coordonnées de d sont : $x = h_\delta \sin\theta + \lambda\cos\theta$ et $y = -h_\delta\cos\theta + \lambda\sin\theta$, on élimine λ entre ces deux équations et on obtient : $x\sin\theta - y\cos\theta = h_\delta$.

I.B.3) H est clairement une application de Δ dans $\mathscr{C}$.

Réciproquement, si on a $\overrightarrow{w}$ et h_δ, alors la droite d est parfaitement définie par son équation obtenue ci dessus.

On a donc bien montré que H est une bijection de Δ sur $\mathscr{C}$.

Pour la construction géométrique de $H^{-1}(M)$, on place dans le plan le vecteur $\overrightarrow{w}$, on le tourne de $\pi/2$, on reporte $-k$ dans cette direction, on obtient un point m_0.

La droite δ passe par m_0 et est dirigée par $\overrightarrow{w}$.

La figure est laissée au lecteur.

I.C -
- Les génératrices de $\mathscr{C}$ correspondent à $\overrightarrow{w}$ fixé et k libre, ce sont donc tous les axes de direction $\overrightarrow{w}$;
- si $\overrightarrow{w}$ décrit U et $k = 0$, on a les axes de toutes les directions passant par l'origine ;
- les parallèles de $\mathscr{C}$ correspondent à $\overrightarrow{w}$ libre et k fixé, ici non nul si on n'est pas dans le cas précédent, ce sont les axes tangents au cercle centré et de rayon $|k|$, orientés de façon compatible avec l'orientation du cercle si k est positif, dans l'autre sens si k est négatif.

I.D - Symétries et rotations

I.D.1) $h_{\bar{r}(\delta)} = \det\left(r(m), r(\overrightarrow{w})\right) = \det\left(r(\overrightarrow{om}), r(\overrightarrow{w})\right) = \det\left(\overrightarrow{om}, \overrightarrow{w}\right) = \det\left(m, \overrightarrow{w}\right) = h_\delta$.

Ainsi, h_δ, c'est à dire la coordonnée en Z, est conservé et, dans le plan XOY, on tourne de $\overrightarrow{w}$, on conclut que $\bar{R}$ est la restriction au cylindre de la rotation (vectorielle) d'axe OZ et d'angle $\overrightarrow{w}$.

Sa matrice dans la base canonique est donc : $\begin{pmatrix} \cos w & -\sin w & 0 \\ \sin w & \cos w & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

I.D.2) Ici, on a σ qui associe, à l'axe $\left(\overrightarrow{w}, h_\delta\right)$, l'axe $\left(-\overrightarrow{w}, -h_\delta\right)$; c'est en fait la *même* droite vectorielle orientée dans l'autre sens !

Ceci ne peut correspondre à une isométrie du plan puisque le point m_0 serait invariant ... et m_0 peut être quelconque !

I.E - Faisceaux d'axes

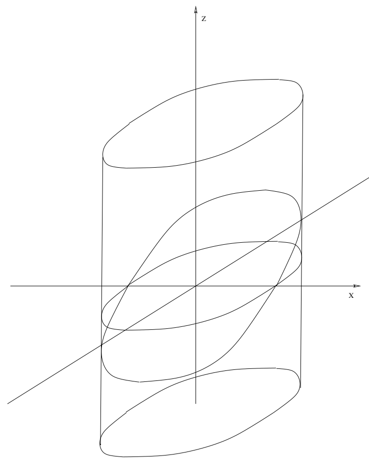
I.E.1) Les droites qui nous intéressent sont d'équation $x\sin\theta - y\cos\theta = k$ et passent pas $a = (\alpha, 0)$ si et seulement si $\alpha\sin\theta = k$, qui est donc la relation cherchée.

I.E.2) On a donc : $H(\Delta_a) = \{(\cos\theta, \sin\theta, \alpha\sin\theta)\}$ est donc l'intersection de $\mathscr{C}$ et du plan vectoriel d'équation $Z = \alpha Y$.

I.E.3)
- L'intersection d'un cylindre de révolution et d'un plan ne contenant pas la direction du cylindre est une ellipse ;

– le centre est l'intersection du plan et de l'axe du cylindre, ici le point O ;
– l'axe focal est l'intersection des plans d'équation $Z = \alpha Y$ et $X = 0$;
– le demi grand axe est la distance du centre à un des sommets situés sur l'axe focal, de coordonnées $(0, 1, \alpha)$ ou $(0, -1, -\alpha)$, c'est à dire : $a = \sqrt{1+\alpha^2}$;
– l'axe non focal est OX, le demi petit axe est $b = 1$;
– la distance du centre à un des foyers est : $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \alpha$;
– l'excentricité est $e = \dfrac{c}{a} = \dfrac{\alpha}{\sqrt{1+\alpha^2}}$.

I.E.4) Voici approximativement la figure demandée.



I.F - Droites concourantes

I.F.1) Si on a : $m = (\alpha\cos\theta_0, \alpha\sin\theta_0)$ avec $\alpha \geqslant 0$, il suffit de tourner l'ellipse obtenue à la question précédente de θ_0 autour de OZ. Le plan P est alors d'équation : $Z = \alpha(\cos\theta_0\, Y - \sin\theta_0\, X)$.

I.F.2) Réglons d'abord le cas où le plan vectoriel P est vertical, $P \cap \mathscr{C}$ est formé de 2 génératrices symétriques, l'ensemble $H^{-1}(P \cap \mathscr{C})$ cherché est l'ensemble des axes d'une direction donnée, ou de son opposée.

Si P n'est pas vertical, il est d'équation : $Z = \alpha(\cos\theta_0\, Y - \sin\theta_0\, X)$ avec $\alpha \geqslant 0$, le point m est alors : $m = (\alpha\cos\theta_0, \alpha\sin\theta_0)$.

L'ensemble des droites cherché est ainsi l'ensemble des droites concourantes en m.

I.F.3) On suppose d'abord que les supports sont concourants en $m = (\alpha\cos\theta_0, \alpha\sin\theta_0)$, alors les droites ont un support dont l'équation est de la forme $x\sin\theta_i - y\cos\theta_i = k_i$, mais comme elles passent par le point m, $k_i = \alpha\,(\cos\theta_0\sin\theta_i - \sin\theta_0\cos\theta_i) = \alpha\sin(\theta_i - \theta_0)$.

On remplace les k_i par leur valeur et on obtient :

$$k_1\sin(\theta_3-\theta_2) + k_2\sin(\theta_1-\theta_3) + k_3\sin(\theta_2-\theta_1)$$
$$= \alpha\,(\sin(\theta_1-\theta_0)\sin(\theta_3-\theta_2) + \sin(\theta_2-\theta_0)\sin(\theta_1-\theta_3) + \sin(\theta_3-\theta_0)\sin(\theta_2-\theta_1))$$
$$= \frac{\alpha}{2}\,(\cos(\theta_1-\theta_0-\theta_3+\theta_2) - \cos(\theta_1-\theta_0+\theta_3-\theta_2)$$
$$+\cos(\theta_2-\theta_0-\theta_1+\theta_3) - \cos(\theta_2-\theta_0+\theta_1-\theta_3)$$
$$+\cos(\theta_3-\theta_0-\theta_2+\theta_1) - \cos(\theta_3-\theta_0+\theta_2-\theta_1)) = 0$$

Si les droites sont parallèles alors : $\sin(\theta_3-\theta_2) = \sin(\theta_1-\theta_3) = \sin(\theta_2-\theta_1) = 0$, la quantité est encore nulle.

Reciproquement, si tous les sinus sont nuls, les droites sont parallèles.

Toujours dans la réciproque, si les deux premières ne sont pas parallèles, elles concourent en un point $m = (\alpha\cos\theta_0, \alpha\sin\theta_0)$, avec $\sin(\theta_2-\theta_1) \neq 0$, et on a :

$$k_3 = -\frac{k_1\sin(\theta_3-\theta_2) + k_2\sin(\theta_1-\theta_3)}{\sin(\theta_2-\theta_1)}$$
$$= -\frac{\alpha}{2}\times\frac{\cos(\theta_1-\theta_0-\theta_3+\theta_2) - \cos(\theta_1-\theta_0+\theta_3-\theta_2) + \cos(\theta_2-\theta_0-\theta_1+\theta_3) - \cos(\theta_2-\theta_0+\theta_1-\theta_3)}{\sin(\theta_2-\theta_1)}$$

$= -\dfrac{\alpha}{2} \times \dfrac{-\cos(\theta_1-\theta_0+\theta_3-\theta_2)+\cos(\theta_2-\theta_0-\theta_1+\theta_3)}{\sin(\theta_2-\theta_1)} = \alpha \dfrac{\sin(\theta_3-\theta_0)\sin(\theta_2-\theta_1)}{\sin(\theta_2-\theta_1)}$
$= \alpha\sin(\theta_3-\theta_0)$.

Ce qui prouve que la troisième droite passe aussi par m, les trois droites sont concourantes.

On a donc bien $k_1\sin(\theta_3-\theta_2)+k_2\sin(\theta_1-\theta_3)+k_3\sin(\theta_2-\theta_1)=0$ si et seulement si les trois droites sont concourantes ou parallèles.

I.G - Cycles

I.G.1) On translate un plan vectoriel P de $\lambda\overrightarrow{K}$, on obtient ainsi tous les plans affines ne contenant pas la direction $\overrightarrow{K}$ et les plans affines contenant cette direction et l'origine.

Ne sont donc pas obtenus les plans affines verticaux ne contenant pas l'origine.

I.G.2) Remarquons d'abord que, si le plan Q est horizontal, $Q\cup\mathscr{C}$ est un parallèle et le problème a déjà été traité au I.C -.

Partons d'un cycle, le cercle est représenté en paramétrique par : $\begin{cases} x = x_0 + R\cos\theta \\ y = y_0 + R\sin\theta \end{cases}$

et le vecteur tangent compatible en θ_0 est : $\begin{pmatrix} -\sin\theta_0 \\ \cos\theta_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta_0+\pi/2) \\ \sin(\theta_0+\pi/2) \end{pmatrix}$.

L'axe en ce point est donc la droite d'équation :

$(x-x_0-R\cos\theta_0)\cos\theta_0+(y-y_0-R\sin\theta_0)\sin\theta_0=0$, orientée dans le sens du vecteur précédent.

L'équation de cette droite se simplifie en : $x\cos\theta_0+y\sin\theta_0=x_0\cos\theta_0+y_0\sin\theta_0+R$.

On pose $\theta_1=\theta_0+\pi/2$ pour diriger l'axe selon θ_1,

et on obtient : $x\sin\theta_1-y\cos\theta_1=x_0\sin\theta_1-y_0\cos\theta_1+R=h(\delta)$.

L'image de cet axe sur le cylindre est donc le point : $(\cos\theta_1,\sin\theta_1,x_0\sin\theta_1-y_0\cos\theta_1+R)$.

L'ensemble de ces points quand θ_1 varie est l'intersection de $\mathscr{C}$ et du plan d'équation : $x_0Y-y_0X+R=Z$.

Réciproquement, tout plan non horizontal a une équation avec un coefficient de Z non nul, qui peut donc se mettre sous la forme précédente !

On retrouve facilement le centre du cercle et R. Si celui ci est négatif, c'est que le cycle est décrit dans l'autre sens.

Quand Q coupe OZ, celacorrespond à $X=Y=0$, et donc : $O\Omega=Z=R$. La distance $O\Omega$ est le rayon (algébrique) du cercle.

$Q\cap\mathscr{C}$ est bien sûr une ellipse.

I.G.3) Ceci vient d'être traité. En fait, on a traité cette question avant la précédente.

I.G.4) Les trois axes, cotés de ce triangle orientés de façon compatible, appartiennent à un même cycle, l'ensemble des axes tangents au cercle inscrit orienté dans le même sens. Les trois points du cylindre représentant ces trois axes définissent un plan. L'intersection de ce plan avec le cylindre définit à rebours un cycle ... auquel appartiennent les trois axes du départ !

Ce cycle est bien le cercle inscrit dans le triangle, orienté dans le sens abc.

II Transformations de l'ensemble des axes du plan

II.A - Translations

II.A.1) $h_{\delta'}=\det\left(m+\overrightarrow{\tau},\overrightarrow{\omega}\right)=\det\left(m,\overrightarrow{\omega}\right)+\det\left(\overrightarrow{\tau},\overrightarrow{\omega}\right)=h_\delta+\det\left(\overrightarrow{\tau},\overrightarrow{\omega}\right)$.

II.A.2) Soit $M=\left(\overrightarrow{\omega},h_\delta\right)$, alors : $\bar{T}(M)=M'$,

avec $M'=\left(\overrightarrow{\omega},h_{\delta'}\right)=\left(\overrightarrow{\omega},h_\delta+\det\left(\overrightarrow{\tau},\overrightarrow{\omega}\right)\right)=\left(\overrightarrow{\omega},h_\delta+\det\left(\alpha\overrightarrow{\imath}+\beta\overrightarrow{\jmath},\overrightarrow{\omega}\right)\right)$.

$\overrightarrow{\omega}=\omega_x\overrightarrow{\imath}+\omega_y\overrightarrow{\jmath}$ d'où : $\det\left(\overrightarrow{\tau},\overrightarrow{\omega}\right)=-\beta\omega_x+\alpha\omega_y$.

On obtient bien la restriction d'un endomorphisme dont la matrice dans la base canonique est : $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\beta & \alpha & 1 \end{pmatrix}$.

II.A.3) Les vecteurs invariants vérifient donc : $\begin{pmatrix} X \\ Y \\ -\beta X + \alpha Y + Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$, c'est à dire : $-\beta X + \alpha Y = 0$ qui est bien l'équation d'un plan vectoriel P.

Par ailleurs, T n'est pas diagonalisable car 1 est valeur propre triple et le sous espace propre associé est de dimension 2.

II.A.4) P est un plan vertical, $P \cap \mathscr{C}$ est donc formé de 2 génératrices du cylindre, on retrouve donc $-\beta \cos \overrightarrow{\omega} + \alpha \sin \overrightarrow{\omega} = 0$.

$H^{-1}(P \cap \mathscr{C})$ est constitué des axes de direction colinéaire au vecteur de la translation, ce qui, intuitivement, parait naturel.

On peut aussi argumenter ce résultat par de la géométrie élémentaire, les droites vectorielles, et donc les axes, invariants par une translation sont bien ceux dont le vecteur de la translation est dans la direction de la droite.

II.B - Automorphisme orthogonal

II.B.1) Calculons d'abord : $h_{\bar{\varphi}(\delta)} = \det\left(\varphi\left(\overrightarrow{om}\right), \varphi\left(\overrightarrow{\omega}\right)\right) = \det\varphi \times \det\left(\overrightarrow{om}, \overrightarrow{\omega}\right) = h_\delta \det\varphi$.

D'où : $\bar{\Phi}\left(\overrightarrow{\omega}, h_\delta\right) = \left(\varphi\left(\overrightarrow{\omega}\right), h_{\bar{\varphi}(\delta)}\right) = \left(\varphi\left(\overrightarrow{\omega}\right), h_\delta \det\varphi\right)$.

On a bien encore la restriction d'un endomorphisme dont la matrice dans la base canonique, définie par blocs, est : $\begin{pmatrix} \begin{matrix} & N & \end{matrix} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 \end{matrix} & \det\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{matrix} & N & \end{matrix} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 \end{matrix} & \det N \end{pmatrix}$.

II.B.2) Si φ est une symétrie orthogonale, elle est diagonalisable, de même pour N bien sûr, avec P_N comme matrice de passage. De plus : $\det\varphi = \det N = -1$.

Φ est aussi diagonalisable et on peut prendre comme matrice de passage : $\begin{pmatrix} \begin{matrix} & P_N & \end{matrix} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 \end{matrix} & 1 \end{pmatrix}$ qui convient évidemment car tout se passe par blocs.

Dans la nouvelle base la matrice de Φ est donc : $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Φ est donc aussi une symétrie orthogonale par rapport à une droite.

$H^{-1}(E_1 \cap \mathscr{C})$ correspond aux axes de vecteur directeur invariant par φ et de distance nulle à l'origine, c'est d_0 et le même axe orienté dans l'autre sens.

$H^{-1}(E_{-1} \cap \mathscr{C})$ correspond aux axes de vecteur directeur transformé en son opposé par φ et de distance quelconque à l'origine, c'est l'ensemble des axes orthogonaux à d_0.

Résultat qu'on peut ussi argumenter par géométrie élémentaire, les droites invariantes par une symétrie orthogonales sont constituées de l'axe de cette symétrie, dont l'orientation est conservée, et des droites normales à cet axe, dont l'orientation est inversée.

II.C - Isométrie

II.C.1) La matrice de F dans la base canonique est la matrice de T fois la matrice de Φ dans la même base.

C'est à dire : $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\beta & \alpha & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} N & & 0 \\ & & 0 \\ 0 & 0 & \det N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N & & 0 \\ & & 0 \\ \lambda & \mu & \det N \end{pmatrix}$.

λ et μ dépendent de α, β et N.

Remarquons que : $(\lambda, \mu) = (-\beta, \alpha)N$, ce qui donne en transposant : $\begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} = {}^tN \begin{pmatrix} -\beta \\ \alpha \end{pmatrix}$.

Ce qui signifie que, comme φ est orthogonale : $\lambda \overrightarrow{\imath} + \mu \overrightarrow{\jmath}$ est l'image par φ^{-1} de $-\beta \overrightarrow{\imath} + \alpha \overrightarrow{\jmath}$.

Finalement : $\lambda \overrightarrow{\imath} + \mu \overrightarrow{\jmath} = \varphi^{-1} \left(-\beta \overrightarrow{\imath} + \alpha \overrightarrow{\jmath} \right)$.

II.C.2) Une première condition nécessaire pour que F soit diagonalisable est que le polynôme caractéristique de φ (ou N) soit scindé.

On exclut donc les rotations vectorielles d'angle différent de 0 ou π, la première condition revient donc à ce que φ soit une symétrie orthogonale par rapport à une droite, ou l'identité ou la symétrie centrale.

Etudions le cas où φ est la symétrie par rapport à une droite.

1 est donc valeur propre simple et -1 valeur propre double de F.

La condition nécessaire et suffisant est donc que le sous espace propre associé à la valeur propre -1 soit de dimension 2. C'est à dire que la matrice : $\begin{pmatrix} N + I_2 & & 0 \\ & & 0 \\ \lambda & \mu & 0 \end{pmatrix}$ soit de rang 1.

En enlevant la colonne inutile et en transposant, ceci s'écrit aussi : $\begin{pmatrix} N + I_2 & \lambda \\ & \mu \end{pmatrix}$ de rang 2.

Or $N + I_2$ est 2 fois la projection orthogonale sur d_0.

Cela revient donc à $\begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix}$ invariant par N et donc $\begin{pmatrix} -\beta \\ \alpha \end{pmatrix}$ invariant par φ.

Enfin, ceci est équivalent à $\overrightarrow{\tau}$ dans la direction de d_0.

Etudions le cas où φ est l'identité.

Dans ce cas, 1 est valeur propre triple et le sous espace propre ne peut être de dimension 3 puisque $\lambda^2 + \mu^2 = 1$.

F n'est donc pas diagonalisable.

Etudions le cas où φ est la symétrie centrale.

Dans ce cas la matrice de F dans la base canonique est : $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ \lambda & \mu & 1 \end{pmatrix}$.

qui est diagonalisable si et seulement si le sous espace propre associé à la valeur propre -1 est de dimension 2, c'est à dire si et seulement si la matrice : $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \mu & 2 \end{pmatrix}$ est de rang 1, ce qui est le cas.

Ici, F est diagonalisable.

F est donc diagonalisable si et seulement si

- $\begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix}$ invariant par N, une symétrie par rapport à une droite ;
  φ est alors une symétrie orthogonale par rapport à une droite d_0 et le vecteur de la translation est dans la direction de cette droite, f est ici une symétrie glissée ;

– ou si φ est une symétrie centrale.

II.D - Similitude

II.D.1) Une homothétie de centre o et de rapport k laisse le vecteur directeur orienté normé de l'axe invariant et multiplie h_δ par k.

L'endomorphisme correspondant de $\mathbb{E}$ a donc pour matrice dans la base canonique : $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix}$.

II.D.2) Si F est un automorphisme et si $F(\mathscr{C}) \subset \mathscr{C}$, comme $\overrightarrow{I} \in \mathscr{C}$, on a aussi $F\left(\overrightarrow{I}\right) \in \mathscr{C}$, et sa projection orthogonale sur le plan horizontal est sur le cercle trigonométrique, donc normée.

Il en est de même pour $\overrightarrow{J}$.

Il en est ausi de même pour $\cos\theta\,\overrightarrow{I} + \sin\theta\,\overrightarrow{J}$ dont l'image par F,

c'est à dire $\cos\theta\, F\left(\overrightarrow{I}\right) + \sin\theta\, F\left(\overrightarrow{J}\right)$, a une projection orthogonale sur le plan horizontal normée.

Ceci prouve que les projections sur ce plan de $F\left(\overrightarrow{I}\right)$ et de $F\left(\overrightarrow{J}\right)$ qui sont normées sont orthogonales.

Les deux premières lignes des deux premières colonnes de la matrice de F dans la base canonique sont les coordonnées de deux vecteurs normés et orthogonaux du plan et forment donc une mathice orthogonale.

Par ailleurs, $\overrightarrow{I} + \lambda\,\overrightarrow{K}$ a une image sur $\mathscr{C}$ pour tout λ, ce qui prouve que $F\left(\overrightarrow{K}\right)$ est dans la dircetion du cylindre, donc colinéaire à $\overrightarrow{K}$.

La matrice de F dans la base canonique a bien la forme : $\begin{pmatrix} \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{N}} & 0 \\ & & 0 \\ \lambda & \mu & \nu \end{pmatrix}$

avec N orthogonale.

II.D.3) Il suffit d'écrire : $\begin{pmatrix} \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{N}} & 0 \\ & & 0 \\ \lambda & \mu & \nu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \multicolumn{2}{c}{\multirow{2}{*}{N}} & 0 \\ & & 0 \\ \lambda & \mu & \det N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\nu}{\det N} \end{pmatrix}$.

Si $\mathscr{C}$ est globalement invariant par un automorphisme de déterminant ($\nu \det N$) positif, on a bien cet automorphisme qui correspond à la composée d'une homothétie de rapport strictement positif et d'une isométrie, et qui est donc une similitude.

La réciproque est évidente par le même produit de matrices, en écrivant la similitude comme le produit d'une homothétie et d'une isométrie, chacune de ces transformations correspondant à un endomorphisme qui laisse $\mathscr{C}$ globalement invariant.

II.D.4) Si le déterminant est strictement négatif, cela revient à composer par la symétrie centrale, cela revient aussi à composer l'isométrie φ par la symétrie centrale, on retrouve les mêmes similitudes.

Toute similitude de $\mathbb{P}$ peut être associée à deux endomorphismes de $\mathbb{E}$. Ceci provient de l'orientation de nos axes qui fait que chaque droite affines correspond à deux points de $\mathscr{C}$ selon l'orientation.