

MATHÉMATIQUES II

Dans tout le problème, Π est un plan euclidien orienté rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}, \vec{j})$. On rappelle que les déplacements de Π sont les rotations et les translations de ce plan. On notera Id_π l'identité de Π .

Les matrices utilisées dans le problème sont réelles. On note $M_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées à n lignes.

On désigne par tA la transposée de la matrice A .

Si A est une matrice carrée, on désigne par $\det(A)$ son déterminant et si $A \in M_3(\mathbb{R})$, on convient d'appeler écriture de A par blocs l'écriture

$$A = \begin{bmatrix} P & Q \\ R & S \end{bmatrix},$$

où $P \in M_2(\mathbb{R})$, Q est de la forme $\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix}$, R est de la forme $\begin{bmatrix} r_1 & r_2 \end{bmatrix}$, et S est de la forme $[s]$, avec q_1, q_2, r_1, r_2, s réels.

La matrice identité de $M_2(\mathbb{R})$ est notée I .

Partie I - Questions préliminaires

I.A - Les matrices A, A' et leur produit AA' appartiennent à $M_3(\mathbb{R})$; on les écrit par blocs :

$$A = \begin{bmatrix} P & Q \\ R & S \end{bmatrix} \quad A' = \begin{bmatrix} P' & Q' \\ R' & S' \end{bmatrix} \quad AA' = \begin{bmatrix} X & Y \\ Z & T \end{bmatrix}$$

I.A.1) En prélevant dans les matrices A et A' les termes utiles, calculer les deux termes de la matrice Y et montrer que $Y = PQ' + QS'$.

Des calculs analogues prouveraient que

$$AA' = \begin{bmatrix} PP' + QR' & PQ' + QS' \\ RP' + SR' & RQ' + SS' \end{bmatrix}, \text{ ce que l'on admettra.}$$

I.A.2) Donner sans justification l'écriture par blocs de la transposée de A .

Filière TSI

I.B -

I.B.1) On suppose que le couple (X_1, X_2) forme une base orthonormée de $\mathbb{R}^2$ et que X_1 et X_2 sont des vecteurs propres pour une certaine matrice B appartenant à $M_2(\mathbb{R})$. Montrer que le couple $(-X_1, X_2)$ a les mêmes propriétés.

I.B.2) Soit $S \in M_2(\mathbb{R})$, qu'on suppose symétrique. Justifier l'existence dans $M_2(\mathbb{R})$ de trois matrices, N, L, D , avec N et L orthogonales et D diagonale, telles que $S = ND {}^tN = LD {}^tL$, où L est obtenue en remplaçant dans N la première colonne par son opposée.

I.B.3) En comparant $\det(N)$ et $\det(L)$, montrer que l'une des deux matrices N ou L est de la forme

$$R(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

I.C - Soit R une matrice de la forme $R(\theta)$ précédente, différente de I . Montrer que $R - I$ est inversible.

Partie II - Le Groupe $\mathcal{G}$

À tout triplet (θ, p, q) de nombres réels, on associe la matrice

$$M(\theta, p, q) = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & p \\ \sin \theta & \cos \theta & q \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

et son écriture par blocs, notée

$$\begin{bmatrix} R(\theta) & T(p, q) \\ 0 & [1] \end{bmatrix}, \text{ abrégée en } \begin{bmatrix} R & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

où les deux termes de la sous-matrice uniligne 0 sont nuls.

On appelle $\mathcal{G}$ l'ensemble des matrices de la forme $M(\theta, p, q)$.

II.A -

- II.A.1) Calculer le déterminant de $M(\theta, p, q)$.
- II.A.2) La matrice $M(\theta, p, q)$ est-elle orthogonale ?

II.B -

- II.B.1) Calculer le produit $M(\theta, p, q) \cdot M(\theta', p', q')$ de deux matrices de $\mathcal{G}$. Montrer que ce produit appartient à $\mathcal{G}$.
- II.B.2) Le triplet (θ, p, q) étant donné, comment choisir (θ', p', q') pour que le produit précédent soit la matrice identité I_3 ?
- II.B.3) Montrer que, lorsqu'on le munit de la multiplication, l'ensemble $\mathcal{G}$ est un groupe.

II.C -

- II.C.1) Montrer que le polynôme caractéristique de $M(\theta, p, q)$ est le produit de deux polynômes à coefficients réels, que l'on précisera.
- II.C.2) On suppose que $R \neq I$.
- a) Déterminer, selon les valeurs de θ , les valeurs propres réelles de $M(\theta, p, q)$.
- b) Quelle est la dimension du sous-espace propre associé à la valeur propre 1 ?

Trouver un vecteur propre de la forme $\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 1 \end{bmatrix}$ associé à la valeur propre 1. On donnera de $\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$ une expression matricielle utilisant T et $(I - R)^{-1}$.

II.D - Chaque point P de Π est repéré par ses coordonnées (x, y) dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

- II.D.1) Quelles sont les coordonnées (x', y') de l'image P' de P par la translation de vecteur $\vec{T} = p \vec{i} + q \vec{j}$?
- II.D.2) Le point P_0 de Π et le réel θ sont fixés. On désigne par r la rotation de centre P_0 et d'angle θ . Soit P' l'image de P par r .
- Exprimer les coordonnées (x', y') de P' en fonction de x, y, θ , et des coordonnées (x_0, y_0) de P_0 .

II.D.3) Montrer que, dans II.D.2) comme dans II.D.1), on peut trouver dans $\mathcal{G}$ une matrice M , que l'on précisera dans chacun des deux cas, telle que

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}.$$

II.D.4)

a) Réciproquement, les réels θ, p, q, x, y étant donnés, calculer le produit matriciel

$$M(\theta, p, q) \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}.$$

b) Ce produit est de la forme $\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix}$.

Montrer que le point P' de Π , de coordonnées (x', y') , est l'image du point P , de coordonnées (x, y) , par un déplacement.

c) Lorsque ce déplacement est une rotation de centre $P_0(x_0, y_0)$ différente de l'identité de Π , on pose

$$V_{P_0} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}. \text{ Montrer que } V_{P_0} = (I - R)^{-1} T.$$

Partie III - Le groupe $\mathcal{G}$ et les matrices symétriques

Dans cette partie, on introduit l'ensemble $\mathcal{S}$ des matrices symétriques de $M_3(\mathbb{R})$, donc de la forme générale

$$\begin{bmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{bmatrix}.$$

Une telle matrice sera notée $Q(a, b, c, d, e, f)$, ou Q de façon abrégée.

Soit Q une matrice appartenant à $\mathcal{S}$. On appelle transformée de Q toute matrice de la forme tMQM , où M est une matrice appartenant à l'ensemble $\mathcal{G}$ défini dans la partie II.

III.A - Soit Q une matrice appartenant à $\mathcal{S}$.

III.A.1) Montrer que toutes les transformées de Q appartiennent à $\mathcal{S}$.

III.A.2) Montrer que Q est une transformée de Q .

III.A.3) Montrer que si Q' est une transformée de Q , alors Q est une transformée de Q' .

III.A.4) Montrer que si Q' est une transformée de Q et Q'' une transformée de Q' , alors Q'' est une transformée de Q .

Pour les questions qui suivent, on pourra utiliser les résultats de la partie I.A.

III.B - À toute matrice $Q(a, b, c, d, e, f)$, on associe les réels :

$$p_1(Q) = a + c ; p_2(Q) = ac - b^2 ; p_3(Q) = \det(Q)$$

et la matrice :

$$S(Q) = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}.$$

III.B.1) Pour $M \in \mathcal{G}$, associée à θ, p, q , écrire $S({}^tMQM)$ comme un produit de trois matrices.

III.B.2) En déduire que, pour toute transformée Q' de Q , on a $p_1(Q) = p_1(Q')$ et $p_2(Q) = p_2(Q')$.

III.B.3) Montrer que, pour toute transformée Q' de Q , on a $p_3(Q) = p_3(Q')$.

Les nombres réels $p_1(Q), p_2(Q), p_3(Q)$ sont appelés les invariants de Q .

Dans la suite de cette section, on se propose, en considérant divers cas pour les invariants de Q , de trouver, dans chaque cas, une transformée simple de Q .

III.C -

III.C.1) Montrer que, parmi les transformées de $Q(a, b, c, d, e, f)$, il y a une matrice de la forme $Q(\lambda, 0, \mu, d', e', f')$, qu'on notera Q' dans la suite, (on pourra utiliser I.B.3) et III.B.1)).

III.C.2) Calculer $p_1(Q)$ et $p_2(Q)$ en fonction de λ et μ .

III.C.3) Montrer que, si $p_2(Q)$ est nul, on peut, en précisant le choix de Q' , faire en sorte que μ soit nul.

III.D - Pour $M \in \mathcal{G}$, de la forme $M(0, p, q)$, calculer les termes non diagonaux de ${}^tMQ'M$.

III.E - Étude des différents cas

III.E.1) *Premier cas* : $p_2(Q)$ est non nul.

Montrer que, parmi les transformées de Q' , il y a une matrice Q'' diagonale dont le troisième terme diagonal est nécessairement $p_3(Q)/p_2(Q)$.

III.E.2) *Deuxième cas* : $p_2(Q)$ est nul.

a) *Premier sous-cas* : $p_1(Q)$ et $p_3(Q)$ sont non nuls.

Montrer que, parmi les transformées de Q' , il y a la matrice $Q(\lambda, 0, 0, 0, e', 0)$.

b) *Deuxième sous-cas* : $p_1(Q)$ est non nul et $p_3(Q)$ est nul.

Montrer que, parmi les transformées de Q' , il y a une matrice de la forme $Q(\lambda, 0, 0, 0, 0, f'')$.

c) *Troisième sous-cas* : $p_1(Q)$ est nul.

Montrer que a, b et c sont nuls.

Partie IV - Application aux coniques

Les coefficients réels (a, b, c, d, e, f) étant fixés, on considère la courbe du plan Π , qui admet, dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ l'équation cartésienne :

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0,$$

Cette courbe est notée $\mathcal{C}(a, b, c, d, e, f)$, ou $\mathcal{C}$, de façon abrégée.

L'ensemble des courbes $\mathcal{C}$ est noté $\mathcal{F}$.

IV.A - Étude d'un exemple

On pose $\mathcal{H}_1 = \mathcal{C}(0, 1/2, 0, 0, -1/2, -1)$ et $\mathcal{H}_2 = \mathcal{C}(1, 0, -1, 0, 0, -2)$.

Représenter sur un même dessin les courbes $\mathcal{H}_1$ et $\mathcal{H}_2$ ainsi que leurs asymptotes.

Dans la suite, on associe au point P de coordonnées (x, y) la matrice

$$P_1 = \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

et à la matrice $Q(a, b, c, d, e, f)$ définie dans la partie III la courbe $\mathcal{C}(a, b, c, d, e, f)$.

IV.B - Trouver une condition nécessaire et suffisante, portant sur le produit matriciel tP_1QP_1 , pour que le point P soit sur la courbe $\mathcal{C}$ associée à la matrice Q .

IV.C - Soit d un déplacement du plan, $d(P)$ l'image par d du point P et M la matrice, appartenant à $\mathcal{G}$, définie dans II.D.3), qui est associée à d .

IV.C.1) Trouver une condition nécessaire et suffisante, liant les matrices P_1 , M et Q et leurs transposées, pour que le point $d(P)$ soit sur la courbe $\mathcal{C}$ associée à la matrice Q .

IV.C.2) En déduire que la courbe $\mathcal{C}$ de $\mathcal{F}$, associée à Q de $\mathcal{S}$, est l'image par d d'une courbe $\mathcal{C}'$ de $\mathcal{F}$, associée à une matrice Q' de $\mathcal{S}$, que l'on précisera.

IV.C.3) Montrer que Q' est, suivant la définition donnée dans la partie II, une transformée de Q .

IV.D - En utilisant III.E, montrer que toute courbe $\mathcal{C}$ de $\mathcal{F}$ est l'image, par un certain déplacement, d'une courbe $\mathcal{C}_1$ de $\mathcal{F}$ d'équation simple.

IV.E - Montrer que si $\mathcal{C}$ est associée à la matrice Q , elle est aussi associée à αQ , pour tout α non nul.

Exemple : montrer, en utilisant III.E.1), que $\mathcal{H}_1$ est l'image de $\mathcal{H}_2$ par un déplacement que l'on ne cherchera pas à expliciter.

••• FIN •••
