I Questions préliminaires

I.A -

I.A.1) $A\,A' = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & q_1 \\ p_{21} & p_{22} & q_2 \\ r_1 & r_2 & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p'_{11} & p'_{12} & q'_1 \\ p'_{21} & p'_{22} & q'_2 \\ r'_1 & r'_2 & s' \end{bmatrix}$

On calcule le terme première ligne, troisième colonne : $p_{11}q'_1 + p_{12}q'_2 + q_1 s'$,
et le terme deuxième ligne, troisième colonne : $p_{21}q'_1 + p_{22}q'_2 + q_2 s'$.
On a donc :

$$Y = \begin{bmatrix} p_{11}q'_1 + p_{12}q'_2 + q_1 s' \\ p_{21}q'_1 + p_{22}q'_2 + q_2 s' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{11}q'_1 + p_{12}q'_2 \\ p_{21}q'_1 + p_{22}q'_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} q_1 s' \\ q_2 s' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q'_1 \\ q'_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s' \end{bmatrix}.$$

On conclut : $Y = P\,Q' + Q\,S'$.

I.A.2) ${}^tA = \begin{bmatrix} {}^tP & {}^tR \\ {}^tQ & {}^tS \end{bmatrix}$, en admettant que tout se passe « bien ».

I.B -

I.B.1) Si X_1 et X_2 sont propres pour B, il en est de même pour $-X_1$ et X_2, les valeurs propres sont les mêmes,
si X_1 et X_2 sont normés, il en est de même pour $-X_1$ et X_2,
si X_1 et X_2 sont orthogonaux, il en est de même pour $-X_1$ et X_2.
En un mot, si on peut choisir une base orthonormale de vecteurs propres, on peut en plus la choisir directe sans changer la matrice diagonale semblable.

I.B.2) S, symétrique réelle est diagonalisable avec une matrice de passage N orthogonale, c'est à dire telle que $N^{-1} = {}^tN$.
On obtient donc : $S = N\,D\,{}^tN$.
On considère L obtenue en remplaçant la première colonne de N par son opposée. C'est encore une matrice orthogonale qui diagonalise S dans la même matrice D puisque les vecteurs colonnes de L sont respectivement propres pour les mêmes valeurs propres que N.
On obtient donc : $S = L\,D\,{}^tL$.

I.B.3) Clairement : $\det L = -\det N$, l'une des deux matrices est directe. Une matrice orthogonale directe en dimension 2 est une matrice de rotation, qui est de la forme : $R(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$.

I.C $R - I = \begin{bmatrix} \cos\theta - 1 & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta - 1 \end{bmatrix}$.

$$\det(R - I) = \begin{vmatrix} \cos\theta - 1 & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta - 1 \end{vmatrix} = (\cos\theta - 1)^2 + \sin^2\theta = 2(1 - \cos\theta).$$

$R \neq I \Rightarrow \cos\theta \neq 1 \Rightarrow \det(R - I) \neq 0 \Rightarrow R - I$ inversible.

II Le groupe $\mathscr{G}$

II.A -

II.A.1) $\det(M(\theta,p,q)) = \det\left(\begin{bmatrix} R & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = \det R = 1$, car la matrice M est triangulaire par blocs.

II.A.2) Une matrice est orthogonale si et seulement si les vecteurs colonnes sont normés et orthogonaux deux à deux.
Les trois vecteurs colonnes sont normés, ici, si et seulement si $1 + p^2 + q^2 = 1$, ce qui équivaut à $p = q = 0$.

Dans ces conditions, les vecteurs colonnes sont orthogonaux deux à deux et la matrice est orthogonale.
La condition nécessaire et suffisante est : $p = q = 0$.

II.B -

II.B.1) $M(\theta,p,q) \cdot M(\theta',p',q') = \begin{bmatrix} R & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} R' & T' \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R\,R' & R\,T' + T \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

On a bien $R\,R'$ qui est la matrice de rotation correspondant à $\theta + \theta'$.
Le produit des matrices est bien une loi de composition interne de $\mathscr{G}$.

II.B.2) On a besoin de 2 conditions pour que ce produit soit la matrice identité :

* $R\,R' = I_2 \Leftrightarrow \theta + \theta' = 0_{[2\pi]} \Leftrightarrow \theta' = -\theta_{[2\pi]}$

* $R\,T' + T = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p' \\ q' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} p' \\ q' \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} p' \\ q' \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix}$

$M(\theta',p',q')$ est l'inverse de $M(\theta,p,q) \Leftrightarrow \left(\theta' = -\theta_{[2\pi]} \quad \text{et} \quad \begin{bmatrix} p' \\ q' \end{bmatrix} = -\,{}^tR \begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix} \right)$

II.B.3) $\mathscr{G}$ est non vide, par définition ; il est stable par produit et par passage à l'inverse. C'est donc un sous-groupe du groupe orthogonal, c'est donc un groupe pour le produit des matrices.

II.C -

II.C.1) $P_M(\lambda) = \begin{vmatrix} \cos\theta - \lambda & -\sin\theta & p \\ \sin\theta & \cos\theta - \lambda & q \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\Big((\cos\theta - \lambda)^2 + \sin^2\theta \Big)$

$= (1-\lambda)\left(\lambda^2 - 2\,\lambda\cos\theta + 1\right)$

II.C.2) **a)** On sait que $\theta \neq 0_{[2\pi]}$.
Le discriminant Δ de $\lambda^2 - 2\,\lambda\cos\theta + 1$ est : $\Delta = 4\left(\cos^2\theta - 1\right) = -4\sin^2\theta$.
Si $\theta \neq \pi_{[2\pi]}$, la seule valeur propre réelle est 1, qui est simple.
Si $\theta = \pi_{[2\pi]}$, 1 est valeur propre simple et -1 est valeur propre double.

b) E_1 est toujours de dimension 1, car 1 est toujours valeur propre simple.

On résout : $\begin{bmatrix} R - I_2 & T \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Ce qui revient à : $(R - I_2) \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} + T = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = -\,(R - I_2)^{-1}\,T = (I_2 - R)^{-1}\,T$

II.D -

II.D.1) On a évidemment : $(x',y') = (x+p, y+q)$.

II.D.2) La formule habituelle est : $\begin{bmatrix} x' - x_0 \\ y' - y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta_0 & -\sin\theta_0 \\ \sin\theta_0 & \cos\theta_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{bmatrix}$.

Ce qui donne :
$x' = (x\cos\theta_0 - y\sin\theta_0) + (x_0\,(1 - \cos\theta_0) + y_0\sin\theta_0)$,
$y' = (x\sin\theta_0 + y\cos\theta_0) + (-x_0\sin\theta_0 + y_0\,(1 - \cos\theta_0))$.

II.D.3) Pour la translation, il suffit de prendre : $M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & p \\ 0 & 1 & q \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Pour la rotation, on prendra : $M = \begin{bmatrix} \cos\theta_0 & -\sin\theta_0 & x_0\,(1-\cos\theta_0) + y_0 \sin\theta_0 \\ \sin\theta_0 & \cos\theta_0 & -x_0 \sin\theta_0 + y_0\,(1-\cos\theta_0) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Ces matrices sont bien dans $\mathscr{G}$, ce sont les seules qui conviennent, mais l'énoncé ne demande pas de montrer l'unicité.

II.D.4) **a)** $M(\theta,p,q)\begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta_0 & -\sin\theta_0 & p \\ \sin\theta_0 & \cos\theta_0 & q \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x\cos\theta_0 - y\sin\theta_0 + p \\ x\sin\theta_0 + y\cos\theta_0 + q \\ 1 \end{bmatrix}$.

b) Pour $\theta_0 = 0_{[2\pi]}$, P' est le translaté de P de vecteur $\overrightarrow{T}$.

Pour $\theta_0 \neq 0_{[2\pi]}$, P' est le transformé de P par une rotation d'angle θ_0 et de centre l'unique point invariant. Ce point invariant est l'unique solution du système de rang 2 :

$$\begin{cases} x_0 = x_0\cos\theta_0 - y_0\sin\theta_0 + p \\ y_0 = x_0\sin\theta_0 + y_0\cos\theta_0 + q \end{cases}$$

Dans tous les cas, c'est un déplacement.

c) On vient de voir que dans ce cas : $\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = R\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} + T$, c'est à dire : $V_{P_0} = R\,V_{P_0} + T$, ou encore : $(I-R)\,V_{P_0} = T$.

On a donc bien : $V_{P_0} = (I-R)^{-1}T$.

III Le groupe $\mathscr{G}$ et les matrices symétriques

III.A Soit $Q \in \mathscr{S}$.

III.A.1) On doit montrer que : $M \in \mathscr{G} \Rightarrow {}^tMQM \in \mathscr{S}$.

Mais ${}^t({}^tMQM) = {}^tMQM$, ce qui prouve que cette matrice est bien symétrique.

III.A.2) ${}^tI = I$, donc : ${}^tIQI = Q$.

Q est bien une transformée de Q.

III.A.3) N'oublions pas que M est orthogonale, c'est à dire que $M^{-1} = {}^tM$, et que M^{-1} est aussi orthogonale.

$Q' = {}^tMQM = M^{-1}QM \Leftrightarrow Q = MQ'M^{-1} = {}^t(M^{-1})Q'M^{-1}$.

Ce qui prouve que Q' est une transformée de Q.

III.A.4) On a : $Q' = {}^tMQM$, et : $Q'' = {}^tPQ'P$. On remplace : $Q'' = {}^tP\,{}^tMQMP = {}^t(MP)Q(MP)$.

Mais, MP est aussi orthogonale, donc Q'' est une transformée de Q.

III.B -

III.B.1) $M = \begin{bmatrix} R & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ et ${}^tM = \begin{bmatrix} {}^tR & 0 \\ {}^tT & 1 \end{bmatrix}$.

$Q = \begin{bmatrix} S(Q) & A \\ {}^tA & f \end{bmatrix}$, en posant : $A = \begin{bmatrix} d \\ e \end{bmatrix}$.

$QM = \begin{bmatrix} S(Q) & A \\ {}^tA & f \end{bmatrix}\begin{bmatrix} R & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S(Q)R & ST+A \\ {}^tAR & {}^tAT+f \end{bmatrix}$.

Et enfin : ${}^tMQM = \begin{bmatrix} {}^tRS(Q)R & * \\ * & * \end{bmatrix}$.

C'est à dire : $S\left({}^tMQM\right) = {}^tRS(Q)R$.

III.B.2) $P_1(Q) = \mathrm{Tr}(S(Q))$, la trace de $S(Q)$.

$P_1(Q') = \mathrm{Tr}(S(Q')) = \mathrm{Tr}(S\left({}^tMQM\right)) = \mathrm{Tr}({}^tRS(Q)R)$.

Mais, ${}^tR = R^{-1}$, car R est orthogonale.
$P_1(Q') = \mathrm{Tr}(R^{-1}S(Q)R) = \mathrm{Tr}(S(Q)) = P_1(Q)$.
On conclut donc : $P_1(Q) = P_1(Q')$.
$P_2(Q) = \det(S(Q))$, le déterminant de $S(Q)$.
$P_2(Q') = \det(S(Q')) = \det(S\left({}^tMQM\right)) = \det({}^tRS(Q)R)$.
Mais, ${}^tR = R^{-1}$, car R est orthogonale.
$P_2(Q') = \det(R^{-1}S(Q)R) = \det(S(Q)) = P_2(Q)$.
On conclut donc : $P_2(Q) = P_2(Q')$.

III.B.3) $P_3(Q') = \det(Q') = \det({}^tMQM) = \det({}^tM)\det(Q)\det(M)$
$= \underbrace{\det(M)}_{=1}\det(Q)\underbrace{\det(M)}_{=1} = \det(Q) = P_3(Q)$.
On conclut donc : $P_3(Q) = P_3(Q')$.

III.C -

III.C.1) $S(Q)$ est symétrique réelle, donc diagonalisable avec une matrice de passage orthogonale, qu'on peut choisir directe, comme on l'a montré. On appelle R cette matrice.

Alors : ${}^tRS(Q)R = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix}$.

On choisit : $M = \begin{bmatrix} R & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, avec cet R là et T quelconque et $Q' = {}^tMQM = M^{-1}QM$ vérifie :

$S(Q') = S({}^tMQM) = {}^tRS(Q)R = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{bmatrix}$.

Q' est donc bien de la forme $Q(\lambda,0,\mu,d',e',f')$.

III.C.2) $P_1(Q) = P_1(Q') = \lambda + \mu$, et $P_2(Q) = P_2(Q') = \lambda\,\mu$.

III.C.3) $P_2(Q) = 0 \Rightarrow \Big(\lambda = 0 \text{ ou } \mu = 0\Big)$.

Mais, en diagonalisant $S(Q)$, on n'avait aucune condition sur l'ordre des valeurs propres, dont l'un est nulle, on pouvait donc choisir sans contrainte la seconde nulle, c'est à dire : $\mu = 0$.

III.D $M = M(0,p,q) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & p \\ 0 & 1 & q \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$${}^tMQ'M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ p & q & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \lambda & 0 & d' \\ 0 & \mu & e' \\ d' & e' & f' \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & p \\ 0 & 1 & q \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & d' \\ 0 & \mu & e' \\ \lambda\,p + d' & \mu\,q + e' & d'p + e'q + f' \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & p \\ 0 & 1 & q \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \lambda & 0 & \lambda\,p + d' \\ 0 & \mu & \mu\,q + e' \\ \lambda\,p + d' & \mu\,q + e' & \alpha \end{bmatrix}.$$

On n'a ici calculé explicitement que les termes demandés et appelé le dernier « α ».

III.E Etude des différents cas

III.E.1) $P_2(Q) \neq 0 \Leftrightarrow \Big(\lambda \neq 0 \text{ et } \mu \neq 0\Big)$.

On va chercher à annuler les termes non diagonaux de Q'. C'est à dire : $\begin{cases} \lambda\,p + d' = 0 \\ \mu\,q + e' = 0 \end{cases}$

On a donc : $p = \dfrac{-d'}{\lambda}$ et $q = \dfrac{-e'}{\mu}$ qui conviennent.

Alors : ${}^tMQ'M = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix}$.

$P_3(Q) = P_3(Q') = \det(Q')$, et,

$\det({}^tMQ'M) = \det({}^tM)\det(Q')\det(M) = \det(Q')$ car $\det(M) = 1$.

Ce qui donne : $P_3(Q) = \lambda\,\mu\,\alpha = \det(S(Q))\,\alpha = P_2(Q)\,\alpha$.

Le troisième terme diagonal, α, est bien alors : $\dfrac{P_3(Q)}{P_2(Q)}$.

III.E.2) $P_2(Q) = 0 \Leftrightarrow \mu = 0$, compte tenu du choix déjà fait.

a) $P_1(Q) \neq 0$ et $P_3(Q) \neq 0$.
On a donc $\lambda \neq 0$ et $\det(Q) \neq 0$.
On choisit p tel que $\lambda\,p + d' = 0$.
Ce qui donne :

$$ {}^tMQ'M = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & d' \\ 0 & 0 & e' \\ 0 & e' & d'p + e'q + f' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & p \\ 0 & 1 & q \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e' \\ 0 & e' & d'p + 2\,e'q + f' \end{bmatrix} $$

Mais $P_3(Q) = \det(Q) = \det(Q') = \det({}^tMQ'M) = -\lambda\,{e'}^2 \neq 0$, donc : $e' \neq 0$.
On choisit donc q tel que $d'p + 2\,e'q + f' = 0$.

Alors : $\quad {}^tMQ'M = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e' \\ 0 & e' & 0 \end{bmatrix} = Q(\lambda,0,0,0,e',0)$.

b) $P_1(Q) \neq 0$ et $P_3(Q) = 0$.
On a donc $\lambda \neq 0$ et $\det(Q) = 0$.
On choisit p tel que $\lambda\,p + d' = 0$.
Ce qui donne, en reprenant le calcul précédent :

$$ {}^tMQ'M = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e' \\ 0 & e' & d'p + 2\,e'q + f' \end{bmatrix} $$

Mais $P_3(Q) = \det(Q) = \det(Q') = \det({}^tMQ'M) = -\lambda\,{e'}^2 = 0$, donc : $e' = 0$.

$$ {}^tMQ'M = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d'p + f' \end{bmatrix} = Q(\lambda,0,0,0,0,f''), \text{ en posant : } f'' = d'p + f'. $$

c) $P_1(Q) = 0$.
On a donc : $\lambda = \mu = 0$, $S(Q)$ est semblable à la matrice nulle et est donc nulle.
On en déduit immédiatement : $\quad a = b = c = 0$.

IV Application aux coniques

IV.A Etude d'un exemple.

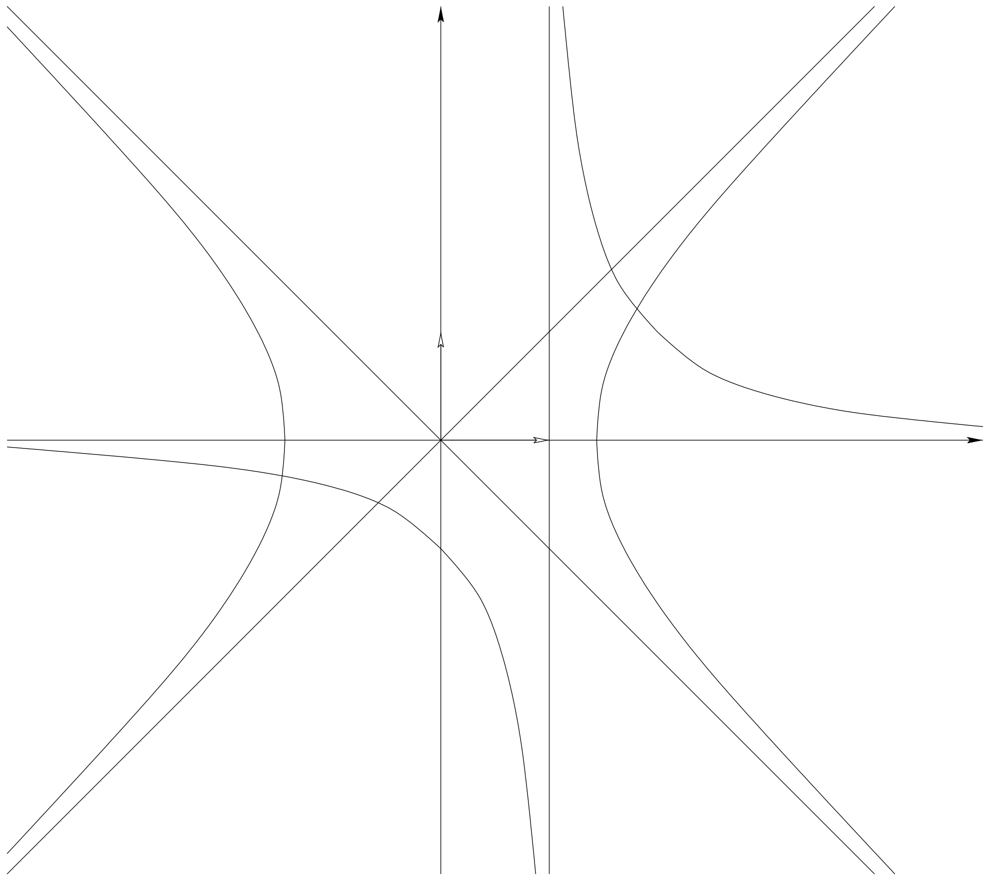
$\mathscr{H}_1$ est d'équation : $\quad xy - y = 1$.

Sous la forme : $\quad y = \dfrac{1}{x-1}$, $\quad$ on reconnait une hyperbole équilatère.

Les asymptotes sont les droites d'équations $x = 1$ et $y = 0$.

$\mathscr{H}_2$ est d'équation : $\quad x^2 - y^2 = 2$.

Sous la forme : $\dfrac{x^2}{\left(\sqrt{2}\right)^2} - \dfrac{y^2}{\left(\sqrt{2}\right)^2} = 1,$ on reconnait encore une hyperbole équilatère.
Les asymptotes sont les droites d'équations $y = x$ et $y = -x$.
Sur la figure qui suit, personne n'aura de mal à identifier les deux hyperboles.



IV.B Compte tenu de l'expression générale d'une forme quadratique, sans calculs :

$$[x\ y\ z] \begin{bmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = a\,x^2 + c\,y^2 + f\,z^2 + 2b\,xy + 2d\,xz + 2e\,yz.$$

En posant $z = 1$, on obtient :

$$^{t}P_1 Q P_1 = [x\ y\ 1] \begin{bmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = a\,x^2 + 2b\,xy + c\,y^2 + 2d\,x + 2e\,y + f.$$

Finalement : $P \in \mathscr{C} \Leftrightarrow {}^{t}P_1 Q P_1 = 0.$

IV.C -

IV.C.1) Si le point P correspond à la matrice P_1, le point $d(P)$ correspond à la matrice MP_1.
Ce qui donne : $d(P) \in \mathscr{C} \Leftrightarrow {}^{t}(MP_1)Q(MP_1) = 0 \Leftrightarrow {}^{t}P_1\,{}^{t}MQMP_1 = 0.$

IV.C.2) $d(P) \in \mathscr{C} \Leftrightarrow {}^{t}P_1({}^{t}MQM)P_1 = 0 \Leftrightarrow {}^{t}P_1 Q' P_1 = 0 \Leftrightarrow P \in \mathscr{C}'$, avec $\mathscr{C}'$ qui correspond à la matrice $Q' = {}^{t}MQM$.

IV.C.3) $Q' = {}^{t}MQM$ est une transformée de Q puisque $M \in \mathscr{G}$.
Cette définition a été donnée à la partie III...

IV.D Selon les invariants de Q, $\mathscr{C}$ est la transformée d'une courbe $\mathscr{C}_1$ d'équation

- $\lambda\,x^2 + \mu\,y^2 + \dfrac{P_3(Q)}{P_2(Q)} = 0$ au cas III.E.1) ;

- $\lambda\, x^2 + 2e' y = 0$ au cas III.E.1.a) ;
- $\lambda\, x^2 + f' = 0$ au cas III.E.1.b) ;
- $2d\, x + 2e\, y + f = 0$ au cas III.E.1.c).

IV.E $P \in \mathscr{C}_Q \Leftrightarrow {}^tP_1 Q P_1 = 0 \Leftrightarrow {}^tP_1(\alpha Q)P_1 = 0$ puisque $\alpha \neq 0$.
Examinons l'exemple proposé.

Pour $\mathscr{H}_1$, la matrice Q_1 peut être, en doublant tous les coefficients : $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix}$

et on peut avoir comme transformée : $Q_1'' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$.

En effet, les valeurs propres de $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ sont 1 et -1. De plus $P_3(Q) = 2$ et $P_2(Q) = -1$, on applique le cas III.E.1).

Pour $\mathscr{H}_2$, la matrice Q_2 est : $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} = Q_1''$.

Ces matrices Q_1 et Q_2 sont transformées l'une de l'autre.
$\mathscr{H}_1$ est bien l'image de $\mathscr{H}_2$ par un déplacement.
Mais, géométriquement, on remarque que ce déplacement est, par exemple, la rotation d'angle $\dfrac{\pi}{4}$ qui transforme le centre de $\mathscr{H}_2$, de coordonnées $(0{,}0)$, en le centre de $\mathscr{H}_1$, de coordonnées $(1{,}0)$, ce qui permet de déterminer le point fixe, centre de la rotation.
Ce sont tout simplement deux hyperboles équilatères dont la distance d'un sommet au centre est à chaque fois $\sqrt{2}$...
Pour $\mathscr{H}_1$, le centre est de coordonnées $(1{,}0)$, et les sommets $(0, -1)$ et $(2{,}1)$.
Pour $\mathscr{H}_2$, le centre est de coordonnées $(0{,}0)$, et les sommets $(-\sqrt{2}{,}0)$ et $(\sqrt{2}{,}0)$.