I Première partie

I.A -

I.A.1) Classiquement, on fait une intégration par parties à partir de I_{n+2}.

$$I_{n+2} = \int_0^{\pi/2} \cos^{n+1} x \cos x \, \mathrm{d}x = \Big[\cos^{n+1} x \sin x\Big]_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} (n+1) \cos^n x \sin^2 x \, \mathrm{d}x.$$

Le crochet est nul et on remplace $\sin^2 x$ par $1 - \cos^2 x$.

$I_{n+2} = (n+1)\,(I_n - I_{n+2})$, qui donne finalement : $\quad I_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2}\, I_n \quad$ pour $n \in \mathbb{N}$.

I.A.2) De façon tout aussi classique :

$$I_{2n} = \frac{2n-1}{2n}\, I_{2(n-1)} = \frac{(2n-1)(2n-3)}{2^2\, n(n-1)}\, I_{2(n-2)} = \cdots = \frac{(2n-1)(2n-3)\ldots(3)(1)}{2^n\, n!}\, I_0.$$

On multiplie numérateur et dénominateur par le dénominateur et on remplace I_0 par $\dfrac{\pi}{2}$,

$$I_{2n} = \frac{(2n)!}{2^{2n}\,(n!)^2}\, \frac{\pi}{2}.$$

On fait le même type de calcul pour I_{2n+1}.

$$I_{2n+1} = \frac{2n}{2n+1}\, I_{2(n-1)+1} = \frac{2^2\, n(n-1)}{(2n+1)(2n-1)}\, I_{2(n-2)+1} = \cdots = \frac{2^n\, n!}{(2n+1)(2n-1)\ldots(3)}\, I_1.$$

On multiplie numérateur et dénominateur par le numérateur et on remplace I_1 par 1,

$$I_{2n+1} = \frac{2^{2n}\,(n!)^2}{(2n+1)!}.$$

I.B -

I.B.1) La première relation évidente est : $\quad I_n \underset{+\infty}{\sim} I_{n+2} \quad$ étant donnée la relation de récurrence.

Par ailleurs, sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, on a : $\quad \cos^{n+2} x \leqslant \cos^{n+1} x \leqslant \cos^n x, \quad$ qui donne : $\quad I_{n+2} \leqslant I_{n+1} \leqslant I_n$.

On en conclut : $\quad I_n \underset{+\infty}{\sim} I_{n+1} \quad$ en revenant, au besoin, à la définition des équivalents.

I.B.2) On a : $J_n = (n+1)\, I_n\, I_{n+1} = (n+2)\, I_{n+2}\, I_{n+1} = J_{n+1}$, en utilisant simplement la relation de récurrence.

La suite (J_n) est donc constante, et : $\quad J_0 = I_0\, I_1 = \dfrac{\pi}{2}$.

Finalement : $\quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad J_n = \dfrac{\pi}{2}$.

Mais, $\quad J_n \underset{+\infty}{\sim} n\, I_n^2, \quad$ d'où : $\quad \lim\limits_{+\infty} n\, I_n^2 = \dfrac{\pi}{2}, \quad$ et comme $I_n \geqslant 0$: $\quad \lim\limits_{+\infty} \sqrt{n}\, I_n = \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$.

Et, on en conclut : $\quad \sqrt{n}\, I_n \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{\pi}{2}} \quad$ et : $\quad I_n \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$.

I.B.3) On a : $\quad \mathrm{Ent}(t) \leqslant t < \mathrm{Ent}(t) + 1$,

d'où $\quad \cos^{\mathrm{Ent}(t)+1} x \leqslant \cos^t x \leqslant \cos^{\mathrm{Ent}(t)} x, \quad$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\quad$ d'où encore

$I_{\mathrm{Ent}(t)+1}\, x \leqslant \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^t x \, \mathrm{d}x \leqslant I_{\mathrm{Ent}(t)}, \quad$ et comme les termes extrêmes sont équivalents :

$$\int_0^{\pi/2} \cos^t x \, \mathrm{d}x \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2\,\mathrm{Ent}(t)}} \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2t}} \quad \text{car } \mathrm{Ent}(t) \underset{+\infty}{\sim} t.$$

I.B.4) Remarquons d'abord que la série est une série à termes positifs, on pourra travailler par équivalence.

On fait le changement de variable $x = u + n\pi$, et on obtient :

$$u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |\sin x|^x \mathrm{d}x = \int_0^{\pi} |\sin u|^{u+n\pi} \mathrm{d}u = \int_0^{\pi} (\sin u)^{u+n\pi} \mathrm{d}u = 2 \int_0^{\pi/2} (\sin u)^{u+n\pi} \mathrm{d}u$$

$= 2 \displaystyle\int_0^{\pi/2} (\cos x)^{x+n\pi} \mathrm{d}x, \quad$ par un nouveau changement de variable $x = \dfrac{\pi}{2} - u$.

Sur l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, on a : $\quad \cos^{n\pi + \frac{\pi}{2}} x \leqslant \cos^{x+n\pi} x \leqslant \cos^{n\pi} x$.

Mais $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^{n\pi+\frac{\pi}{2}} x\,\mathrm{d}x \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2(n\pi+\frac{\pi}{2})}} \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n\pi}} \underset{+\infty}{\sim} \int_0^{\pi/2} \cos^{n\pi} x\,\mathrm{d}x \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{1}{2n}}$.

Ce qui donne : $\displaystyle u_n \underset{+\infty}{\sim} 2\sqrt{\frac{1}{2n}} = \sqrt{\frac{2}{n}}$.

$\sum u_n$ diverge donc.

Par la relation de Chasles et le fait que la suite des sommes partielles d'une série positive divergente tend vers l'infini, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^{n\pi} |\sin x|^x \mathrm{d}x = +\infty$, ce qui assure la divergence de l'intégrale généralisée par application de la définition même de la convergence d'une telle intégrale.

I.C -

I.C.1) $v_n = u_{n+1} - u_n = \left(n+\frac{3}{2}\right)\ln(n+1) - n - 1 - \ln\Big((n+1)!\Big) - \left(n+\frac{1}{2}\right)\ln(n) + n + \ln\Big(n!\Big)$
$= \left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - 1$.

On fait un développement limité à l'ordre 3 du lograrithme, qui donne :

$$v_n = \left(n+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) - 1 = 1 - 1 + \frac{1}{2n} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{3n^2} - \frac{1}{4n^2} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)$$
$$= \frac{1}{12n^2} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{12n^2}.$$

I.C.2) On a donc $\sum v_n$ qui converge par équivalence et qui est de même nature que la suite (u_n), qui est donc aussi convergente.

On rappelle qu'en effet, une suite et sa série des différences sont de même nature.

I.D On a montré que : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(n+\frac{1}{2}\right)\ln(n) - n - \ln\Big(n!\Big) = S$.

On en prend l'exponentielle (qui est bien une fonction continue) : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{n^{n+\frac{1}{2}}\,\mathrm{e}^{-n}}{n!} = \mathrm{e}^S$.

Ce qui donne : $\displaystyle n! \underset{+\infty}{\sim} \frac{n^{n+\frac{1}{2}}\,\mathrm{e}^{-n}}{\mathrm{e}^S}$. Ce qui est bien le résultat annoncé en posant : $\displaystyle C = \frac{1}{\mathrm{e}^S}$.

I.E On va ici utiliser le résultat suggéré, mais aussi l'écriture de I_{2n} en factorielles et le résultat que l'on vient d'obtenir.

$$I_{2n} = \frac{(2n)!}{2^{2n}\,(n!)^2}\,\frac{\pi}{2} \underset{+\infty}{\sim} \frac{C(2n)^{2n+\frac{1}{2}}\,\mathrm{e}^{-2n}}{2^{2n}C^2\,n^{2n+1}\,\mathrm{e}^{-2n}}\,\frac{\pi}{2} = \frac{1}{C}\sqrt{\frac{2}{n}}\,\frac{\pi}{2}.$$

On avait aussi : $\displaystyle I_{2n} \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{4n}}$.

On obtient donc : $\displaystyle\sqrt{\frac{\pi}{4n}} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{C}\sqrt{\frac{2}{n}}\,\frac{\pi}{2}$ et enfin : $C \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi}$.

Mais comme n a disparu, ce sont deux constantes, et on a l'égalité : $C = \sqrt{2\pi}$ et : $n! \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}\,n^n\,\mathrm{e}^{-n}$.

II Deuxième partie

II.A On sait que : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = -ln(1-x)$ sur $[-1,1[$ et n'est pas définie ailleurs. C'est du cours !

II.B Etude de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) x^n$.

II.B.1) Le rayon de convergence de $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) x^n$ s'obtient classiquement par application du théorème de d'Alembert.

Pour $x \neq 0$, $\left| \dfrac{\ln\left(1+\dfrac{1}{n+1}\right) x^{n+1}}{\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) x^n} \right| \underset{+\infty}{\sim} \left| \dfrac{\dfrac{1}{n+1}}{\dfrac{1}{n}} x \right| \underset{+\infty}{\sim} \left| \dfrac{n}{n+1} x \right| \underset{+\infty}{\sim} |x|$.

Ce qui prouve que le rayon de convergence est 1.

II.B.2) Pour $x = -1$, la série est : $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$.

Cette série numérique est clairement alternée, répondant au crière spécial : le terme général $(-1)^n \ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$ tend vers 0 et est décroissant en valeur absolue. Elle converge donc.

Calculons la somme partielle jusqu'au rang $2N$.

$S_{2N} = \displaystyle\sum_{n=1}^{2N} (-1)^n \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \sum_{n=1}^{2N} (-1)^n \ln(n+1) - \sum_{n=1}^{2N} (-1)^n \ln(n)$.

Dans caque somme, on sépare les termes de rang pair, en posant $n = 2p$, et de rang impair en posant $n = 2p-1$ la première fois et $n = 2p+1$ la seconde.

$S_{2N} = \displaystyle\sum_{p=1}^{N} \ln(2p+1) - \sum_{p=1}^{N} \ln(2p) - \sum_{p=1}^{N} \ln(2p) + \sum_{p=0}^{N-1} \ln(2p+1)$

$= 2\displaystyle\sum_{p=1}^{N} \ln(2p+1) + ln(1) - ln(2N-1) - 2\sum_{p=1}^{N} \ln(2p)$

$= 2\ln\left(\dfrac{(3)(5)\dots(2N-1)(2N+1)}{2^N N!}\right) - ln(2N-1)$

$= -2\ln(I_{2N+1}) - ln(2N-1) = -\ln\left((I_{2N+1})^2 (2N-1)\right)$.

On peut prendre le logarithme d'équivalents, ce qui donne : $S_{2N} \underset{+\infty}{\sim} -\ln\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$, qui est donc la limite de S_{2N} àl'infini, et donc celle de S_N puisque la série converge.

On en conclut que : $g(-1) = -\ln\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$.

II.C Notons d'abord que, pour $x \geqslant 0$, $g(x)$ est clairement croissante. Ce qui fait que

- $g(x)$ a une limite finie en 1^-, ou,
- $g(x)$ tend vers $+\infty$ en 1^-.

Par ailleurs, $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ diverge, en utilisant par exemple le critère d'équivalence.

Comme la somme d'une série entière est continue sur son ensemble de convergence, $g(x)$ ne peut avoir de limite finie en 1^-, et donc : $g(x)$ tend vers $+\infty$ en 1^-.

Cette démonstration manque de rigueur, sans doute faut-il faire une démonstration en ε ou utiliser la question suivante…

II.D Comparaison de f et g en 1^-.

II.D.1) Pour $x \in]-1,1[$, on a : $g(x) + \ln(1-x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n}\right) x^n$.

Mais, $\ln\left(1+\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n}\right) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{-1}{2\,n^2}$, ce qui fait que la série entière converge en 1, et, par continuité sur l'intervalle de convergence, a une limite à gauche en 1.

Finalement, $g(x) + \ln(1-x)$ a une limite finie à gauche en 1.

Ceci prouve rigoureusement le résultat précédent !

II.D.2) $w_{n+1} - w_n = \dfrac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln(n) = \dfrac{1}{n+1} + \ln\left(1 - \dfrac{1}{n+1}\right)$

Etudions φ définie sur $[0,1[$ par : $\varphi(u) = u + \ln(1-u)$.

$\varphi'(u) = 1 - \dfrac{1}{1-u} = \dfrac{-u}{1-u} \leqslant 0 \Rightarrow \varphi$ décroit, mais : $\varphi(0) = 0 \Rightarrow \varphi(u) \leqslant 0$ sur $[0,1[$.
D'où (w_n) décroit.

II.D.3) On va d'avord montrer que $w_n \geqslant 0$

$\ln(n) = \displaystyle\int_1^n \frac{1}{t}\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{n-1} \int_{k-1}^{k} \frac{1}{t}\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$.

Mais, on pose : $v_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k} - \ln(n)$.

$v_{n+1} - v_n = \dfrac{1}{n} - \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right) \geqslant 0$, par le même type de calcul. Donc $(v_n) \nearrow$. De plus $v_2 > 0$.

Ce qui donne : $w_n \geqslant v_n \geqslant v_2 > 0$,

(w_n) converge bien vers une limite strictement positive.

II.E $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(\ln\left(1+\frac{1}{k}\right) - \frac{1}{k}\right) = \ln(n+1) - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} = -\left[\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \ln(n)\right] + \ln\left(1+\frac{1}{k}\right) \underset{+\infty}{\rightarrow} -\gamma + 0$.

On a bien : $l = -\gamma$.

II.F Un expression intégrale de γ.

II.F.1) $I = \displaystyle\int_0^1 \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{\ln(1-t)}\right)\mathrm{d}t$ a une singularité en 0 et en 1.

En 1, c'est un faux problème puisque la fonction a une limite finie en ce point.

En 0, $\dfrac{1}{t} + \dfrac{1}{\ln(1-t)} = \dfrac{\ln(1-t)+t}{t\ln(1-t)} = \dfrac{-\dfrac{t^2}{2} + \mathrm{o}\left(t^2\right)}{-t^2 + \mathrm{o}\left(t^2\right)} \underset{t\to 0}{\rightarrow} \dfrac{1}{2}$.

On en encore une limite finie, l'intégrale converge aussi en 0, et donc converge.

II.F.2) On pose : $x = -\ln(1-t)$, qui est bien monotone de classe $\mathcal{C}^1$, les deux intégrales sont de même nature, ici convergentes, et donc égales.

on obtient : $t = 1 - \mathrm{e}^{-x}$, et aussi : $\mathrm{d}t = \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$.

D'où : $I = \displaystyle\int_0^{+\infty}\left(\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-x}} - \frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x$.

Par ailleurs, $\Phi(x) \underset{x\to\infty}{\rightarrow} 1$, et $\Phi(x) \underset{x\to 0}{\rightarrow} \dfrac{1}{2}$, car c'est aussi la limite de $\dfrac{1}{t} + \dfrac{1}{\ln(1-t)}$ en 0.

ϕ est donc continue sur $]0,+\infty[$, prolongeable par continuité aux deux bornes, donc bornée sur cet intervalle par un réel positif K.

II.F.3) Notons d'abord que : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-kx}\mathrm{d}x = \frac{1}{k}$.

$\dfrac{1}{1-\mathrm{e}^{-x}} = 1 + \mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^{-2x} + \cdots + \mathrm{e}^{-n\,x} + \dfrac{\mathrm{e}^{-(n+1)\,x}}{1-\mathrm{e}^{-x}}$ par somme des termes d'une suite géométrique. On en déduit :

$$I = \int_0^{+\infty} 1 + \mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^{-2x} + \cdots + \mathrm{e}^{-n\,x} + \frac{\mathrm{e}^{-(n+1)\,x}}{1-\mathrm{e}^{-x}} - \frac{\mathrm{e}^{-x}}{x}\mathrm{d}x$$
$$= 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} + \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-(n+1)\,x}\left(\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-x}} - \frac{1}{x}\right) + \frac{\mathrm{e}^{-(n+1)\,x}}{x} - \frac{\mathrm{e}^{-x}}{x}\mathrm{d}x$$
$$= 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} + \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-(n+1)\,x}\,\Phi(x)\,\mathrm{d}x - \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{-(n+1)\,x}}{x}\mathrm{d}x.$$

En effet, ces deux intégrales convergent bien, on montre facilement que la première est absolument convergente en utilisant le fait que Φ est bornée ; la seconde converge alors puisque I, l'intégrale du départ, existe.

II.F.4) $\displaystyle\int_\varepsilon^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{-(n+1)\,x}}{x}\mathrm{d}x = \int_\varepsilon^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-x}}{x}\mathrm{d}x - \int_\varepsilon^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-(n+1)\,x}}{x}\mathrm{d}x$.

En effet, ces deux intégrales de fonctions positives convergent, par exemple par comparaison, à l'infini. Dans la deuxième intégrale, on pose : $u=(n+1)x$, qui est bien monotone de classe $\mathcal{C}^1$, ce qui donne :

$\displaystyle\int_\varepsilon^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^{-(n+1)\,x}}{x}\mathrm{d}x=\int_\varepsilon^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-x}}{x}\mathrm{d}x-\int_{(n+1)\,\varepsilon}^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-u}}{u}\mathrm{d}u$

$\displaystyle=\int_\varepsilon^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-x}}{x}\mathrm{d}x-\int_{(n+1)\,\varepsilon}^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-x}}{x}\mathrm{d}x.$

On regroupe ces deux dernières intégrales :

$\displaystyle\int_\varepsilon^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^{-(n+1)\,x}}{x}\mathrm{d}x=\int_\varepsilon^{(n+1)\,\varepsilon}\frac{\mathrm{e}^{-x}}{x}\mathrm{d}x.$

II.F.5) On a facilement : $1\geqslant \mathrm{e}^{-x}\geqslant 1-x$, pour $x\geqslant 0$, qui entraine : $\dfrac{1}{x}\geqslant\dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{x}\geqslant\dfrac{1}{x}-1.$

On intègre entre ε et $(n+1)\,\varepsilon$, ce qui donne :

$\displaystyle\ln(n+1)\geqslant\int_\varepsilon^{(n+1)\,\varepsilon}\frac{\mathrm{e}^{-x}}{x}\mathrm{d}x\geqslant\ln(n+1)-n\,\varepsilon.$

La limite de l'intégrale quand $\varepsilon\to 0$ est donc : $\ln(n+1)$,

mais c'est aussi : $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^{-(n+1)\,x}}{x}\mathrm{d}x$ par convergence de cette intégrale en 0.

On conclut : $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-x}-\mathrm{e}^{-(n+1)\,x}}{x}\mathrm{d}x=\ln(n+1).$

II.F.6) $\displaystyle\left|\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-(n+1)\,x}\,\Phi(x)\,\mathrm{d}x\right|\leqslant\int_0^{+\infty}\left|\mathrm{e}^{-(n+1)\,x}\,\Phi(x)\right|\mathrm{d}x\leqslant\int_0^{+\infty}\left|\mathrm{e}^{-(n+1)\,x}\,K\right|\mathrm{d}x$

$\displaystyle\leqslant K\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-(n+1)\,x}\mathrm{d}x\leqslant\frac{K}{n+1}\underset{+\infty}{\to}0.$

On en déduit : $\displaystyle I=\underbrace{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln(n+1)}_{\underset{n\to+\infty}{\to}\gamma}+\underbrace{\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-(n+1)\,x}\,\Phi(x)\,\mathrm{d}x}_{\underset{n\to+\infty}{\to}0}.$

Ce qui prouve que : $I=\gamma$.

III Troisième partie

III.A -

III.A.1) Soit $0<x<1$, alors : $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}a_n\,x^n$ converge (absolument), et $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}|b_n|\,x^n$ converge par comparaison.

Ce qui prouve que : $R_b\geqslant 1$.

III.A.2) Pour $0\leqslant x<1$, on a la convergence absolue de la série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}b_n\,x^n$.

Ce qui donne : $\displaystyle|v(x)|=\left|\sum_{n=0}^{\infty}b_n\,x^n\right|\leqslant\sum_{n=0}^{\infty}|b_n|\,x^n=\sum_{n=0}^{N}|b_n|\,x^n+\sum_{n=N+1}^{\infty}|b_n|\,x^n.$

Si on prend N assez grand pour avoir : $\forall n>N$, $\left|\dfrac{b_n}{a_n}\right|\leqslant\dfrac{\varepsilon}{2}$,

ce qui est possible car ce quotient tend vers 0, alors :

$\displaystyle|v(x)|\leqslant\sum_{n=0}^{N}|b_n|\,x^n+\sum_{n=N+1}^{\infty}a_n\frac{\varepsilon}{2}\,x^n\leqslant\sum_{n=0}^{N}|b_n|+\sum_{n=0}^{\infty}a_n\frac{\varepsilon}{2}\,x^n\leqslant\sum_{n=0}^{N}|b_n|+\frac{\varepsilon}{2}\,u(x).$

III.A.3) $u(x)\underset{x\to1^-}{\to}+\infty$, donc, pour x assez proche de 1, $\dfrac{\displaystyle\sum_{n=0}^{N}|b_n|}{u(x)}\leqslant\dfrac{\varepsilon}{2}$

ce qui donne alors : $|v(x)|\leqslant\varepsilon\,u(x)$.

Mais, on pouvait choisir ε aussi petit que l'on veut, et donc : $v(x)=\mathrm{o}(u(x))$.

III.B On pose $c_n = a_n - b_n$, et, $w(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n\, x^n$, clairement : $w(x) = u(x) - v(x)$.

Comme $a_n \underset{+\infty}{\sim} b_n$, on a : $c_n = \mathrm{o}\,(a_n)$, et, $w(x) = u(x) - v(x) = \mathrm{o}(u(x))$.

Ce qui équivaut à : $v(x) \underset{x\to 1^-}{\sim} u(x)$.

III.C Application 1 :

III.C.1) On obtient ce rayon de convergence classiquementpar application du théorème de d'Alembert.

Calculons d'abord : $\ln\left(\mathrm{ch}\dfrac{1}{n}\right) = \ln\left(1 + \dfrac{1}{2\,n^2} + \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)\right) = \dfrac{1}{2\,n^2} + \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n^2}\right) \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2\,n^2}$.

$$\frac{(n+1)^3 \ln\left(\mathrm{ch}\dfrac{1}{n+1}\right)}{n^3 \ln\left(\mathrm{ch}\dfrac{1}{n}\right)} \underset{+\infty}{\sim} \frac{\dfrac{n+1}{2}}{\dfrac{n}{2}} \to 1, \quad \text{d'où :} \quad R = 1.$$

III.C.2) On a donc : $\sum_{n=1}^{\infty} n^3 \ln\left(\mathrm{ch}\dfrac{1}{n}\right) x^n \underset{1^-}{\sim} \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{2}\, x^n \underset{1^-}{\sim} \dfrac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)\, x^n$.

Mais $\sum_{n=1}^{\infty} (n+1)\, x^n$ est la dérivée de $\sum_{n=1}^{\infty} x^{n+1} = \dfrac{x^2}{1-x}$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} (n+1)\, x^n = \frac{2x - x^2}{(1-x)^2}.$$

Enfin : $\sum_{n=1}^{\infty} n^3 \ln\left(\mathrm{ch}\dfrac{1}{n}\right) x^n \underset{1^-}{\sim} \dfrac{1}{2(1-x)^2}$.

III.D Application 2 :

III.D.1) La limite finie de (w_n) et infinie de $\ln n$ entraine : $H_n \underset{+\infty}{\sim} \ln n$.

Les deux séries entières ont donc le même rayon de convergence.

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \left|\dfrac{\ln(n+1)}{\ln n}\right| = 1$, ce rayon de convergence est égal à 1.

On travaille donc maintenant avec $x \in]-1,1[$.

On remarquera sans le rappeler à chaque fois que toutes les séries utilisées convergent au moins sur cet intervalle.

$$(1-x) \sum_{n=1}^{\infty} H_n\, x^n = \sum_{n=1}^{\infty} H_n\, x^n - \sum_{n=1}^{\infty} H_n\, x^{n+1} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} H_n\, x^n - \sum_{n=1}^{\infty} H_{n+1}\, x^{n+1}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}\, x^{n+1}$$

En effet : $H_n = H_{n+1} - \dfrac{1}{n+1}$.

$$(1-x) \sum_{n=1}^{\infty} H_n\, x^n = \left(\sum_{n=1}^{\infty} H_n\, x^n - \sum_{n=2}^{\infty} H_n\, x^n\right) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}\, x^{n+1} = x + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}\, x^n$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\, x^n = -\ln(1-x).$$

III.D.2) On sait déjà que : $\sum_{n=1}^{\infty} H_n\, x^n \underset{1^-}{\sim} \sum_{n=1}^{\infty} (\ln n)\, x^n$.

Or : $\sum_{n=1}^{\infty} H_n\, x^n = -\dfrac{\ln(1-x)}{1-x}$.

On en déduit : $\sum_{n=1}^{\infty} (\ln n)\, x^n \underset{1^-}{\sim} -\dfrac{\ln(1-x)}{1-x}$.

III.E Application 3 :

III.E.1) $\dfrac{1}{\sqrt{1-a^2x^2}} = \left(1 - a^2x^2\right)^{-\frac{1}{2}}$

On sait développer cette expression en série entière pour $|a\,x| < 1$.

On prend donc $x \in \left]-\frac{1}{a}, \frac{1}{a}\right[$, le rayon de convergence est bien sûr $R = \dfrac{1}{a}$.

$$\left(1 - a^2x^2\right)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\dots\left(-\frac{1}{2} - n + 1\right)}{n!} (-1)^n a^{2n} x^{2n}$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \times 3 \times \cdots \times (2n-1)}{2^n n!} a^{2n} x^{2n} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} a^{2n} x^{2n}$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi} I_{2n}\, a^{2n} x^{2n} = \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} I_{2n}\, a^{2n} x^{2n}.$$

III.E.2) On a donc : $\dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2 \cos^2 t}} = \dfrac{2}{\pi} \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} I_{2n} x^{2n} \cos^{2n}(t).$

Cette dernière série est une série trigonométrique, de variable t, dont la somme est une fonction continue, c'est donc la série de Fourier de cette fonction continue. On peut donc par ailleurs intégrer terme à terme cette série de Fourier sur $[0, \frac{\pi}{2}]$. Cela donne :

$$J(x) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} I_{2n} x^{2n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n}(t)\, dt = \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} (I_{2n})^2\, x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n I_{2n} x^{2n}$$

pour : $a_n = \dfrac{2}{\pi} I_{2n}$.

Sauf erreur de ma part, l'énoncé semble s'être pris les pieds dans le tapis.

III.E.3) $\dfrac{2}{\pi} (I_{2n})^2 \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2n}$, et : $-\dfrac{1}{2} \ln\left(1 - x^2\right) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2n}$,

ce qui entraine : $J(x) \underset{1^-}{\sim} -\dfrac{1}{2} \ln\left(1 - x^2\right) \underset{1^-}{\sim} -\dfrac{\ln 2}{2} \ln(1 - x)$.

On a bien : $K = -\dfrac{\ln 2}{2}$.

IV Quatrième partie

IV.A $$(1 - x) \sum_{p=0}^{n} A_p x^p = \sum_{p=0}^{n} A_p x^p - \sum_{p=0}^{n} A_p x^{p+1} = \sum_{p=0}^{n} A_p x^p - \sum_{p=1}^{n+1} A_{p-1} x^p$$

$$= A_0 + \sum_{p=1}^{n} \left(A_p - A_{p-1}\right) x^p - A_n x^{n+1} = A_0 + \sum_{p=1}^{n} a_p x^p - A_n x^{n+1}.$$

Mais $A_0 = a_0 = a_0 x^0$!

On a donc bien : $(1 - x) \displaystyle\sum_{p=0}^{n} A_p x^p = \sum_{p=0}^{n} a_p x^p - A_n x^{n+1}$.

Premièrement, comme $\sum a_n$ diverge, $\sum A_n$ diverge par comparaison, puisque $0 \leqslant a_n \leqslant A_n$.
Le rayon de convergence de $\sum A_n x^n$ est donc inférieur ou égal à 1.

Deuxièmement, pour $0 \leqslant x < 1$, fixé, on a : $\displaystyle\sum_{p=1}^{n} A_p x^p \leqslant \frac{\sum_{p=1}^{n} a_p x^p}{1 - x} \leqslant \frac{\sum_{p=1}^{\infty} a_p x^p}{1 - x}$.

La suite $\left(\displaystyle\sum_{p=1}^{n} A_p x^p\right)$ est donc croissante majorée, ce qui prouve qu'elle converge.

Le rayon de convergence de $\sum A_n x^n$ est donc supérieur ou égal à 1.
On conclut que le rayon de convergence de $\sum A_n x^n$ est bien égal à 1.

IV.B Pour $x \in]-1, 1[$, toutes les séries convergent et donc $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} A_n x^n = 0$, de même pour la limite de $A_n x^{n+1}$.

On en déduit : $(1 - x) \displaystyle\sum_{p=0}^{\infty} A_p x^p = \sum_{p=0}^{\infty} a_p x^p$, et enfin : $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} A_n x^n = \frac{1}{1 - x} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

On travaille toujours avec $x \in]-1,1[$.

$A_n \underset{+\infty}{\sim} B_n$ prouve que le rayon de convergence de $\sum_{n=0}^{\infty} B_n x^n$ est aussi 1.

On a donc : $\lim_{n\to+\infty} B_n x^{n+1} = 0$

On a aussi : $(1-x)\sum_{p=0}^{n} B_p x^p = \sum_{p=0}^{n} b_p x^p - B_n x^{n+1}$, sur lequel on peut faire le même passage à la limite... qui prouve au passage la convergence de $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$!...

On conclut : $\sum_{n=0}^{\infty} B_n x^n = \dfrac{1}{1-x}\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$.

Maintenant, appliquons la partie précédente avec A_n et B_n à la place de a_n et b_n.

On obtient : $\sum_{n=0}^{\infty} A_n x^n \underset{1^-}{\sim} \sum_{n=0}^{\infty} B_n x^n$,

et en multipliant par $(1-x)$ ces deux termes : $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \underset{1^-}{\sim} \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$

IV.C Application 1 :

Rappelons que le rayon de convergence d'une série entière est aussi :
$\sup\{r \geqslant 0 \ / \ \lim_{n\to+\infty} a_n r^n = 0\}$. On garde la notation r pour un réel positif.

Or : $\left(\lim_{n\to+\infty} r^{a^n} = 0 \Leftrightarrow r < 1\right)$ car $\lim_{n\to+\infty} a^n = +\infty$.

Le rayon de convergence de $\sum_{n=0}^{\infty} x^{a^n}$ est 1.

Soit n et p deux entiers naturels. On pose : $a_n = 1 \Leftrightarrow \exists p \in \mathbb{N} \ / \ n = a^p$, et $a_n = 0$ sinon.

$A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ revient à compter le nombre de k tels que $a^k \leqslant n$; c'est à dire tels que : $k \leqslant \dfrac{\ln n}{\ln a}$.

On en déduit : $A_n = \mathrm{Ent}\left(\dfrac{\ln n}{\ln a}\right)$.

On obtient facilement : $A_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{\ln n}{\ln a}$.

En utilisant la partie précédente :

$\sum_{n=0}^{\infty} A_n x^n \underset{1^-}{\sim} \dfrac{1}{\ln a}\sum_{n=0}^{\infty} (\ln n) x^n \underset{1^-}{\sim} -\dfrac{1}{\ln a}\dfrac{\ln(1-x)}{1-x}$.

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} x^{a^n} \underset{1^-}{\sim} -\dfrac{1}{\ln a}\ln(1-x)$.

$L = -\dfrac{1}{\ln a}$ convient.

IV.D Application 2 :

IV.D.1) Pour $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)x^n$, on a : $\sqrt{n+1}-\sqrt{n} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2\sqrt{n}}$, en multipliant et en divisant par la quantité conjuguée.

Cela donne un rayon de convergence de 1 par application simple du théorème de d'Alembert.

Pour $\sum_{n=0}^{\infty} x^{n^2}$, on utilise le même théorème qu'à la question précédente... avec la même notation r pour désigner un réel positif.

Or : $\left(\lim_{n\to+\infty} r^{n^2} = 0 \Leftrightarrow r < 1\right)$ car $\lim_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$.

Le rayon de convergence de $\sum_{n=0}^{\infty} x^{n^2}$ est bien 1.

Soit n et p deux entiers naturels. On pose : $a_n = 1 \Leftrightarrow \exists p \in \mathbb{N} \;/\; n = p^2$, et $a_n = 0$ sinon.
$A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ revient à compter le nombre de k tels que $k^2 \leqslant n$; c'est à dire tels que : $k \leqslant \sqrt{n}$.
On en déduit : $A_n = \text{Ent}\left(\sqrt{n}\right)$.
On obtient facilement : $A_n \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{n}$.
En posant : $b_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$, on obtient : $B_n = \sqrt{n+1} \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{n}$.
Ce qui donne : $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} x^{n^2} \underset{+\infty}{\sim} \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) x^n$.

IV.D.2) $I_n \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$, d'où $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{I_n}{\sqrt{2\pi}}$.
Ce qui donne : $\sum_{n=0}^{\infty} x^{n^2} \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} I_n x^n$.

IV.D.3) Pour $x \in]-1,1[$, $\dfrac{1}{1 - x\cos t} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \cos^n t$.
On a ainsi encore une fonction continue égale à la somme d'une série trigonométrique. Cette série trigonométrique est donc sa série de Fourier… que l'on peut intégrer terme à terme sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.
Ainsi : $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1 - x\cos t}\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} \left(x^n \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t \,\mathrm{d}t \right) = \sum_{n=0}^{\infty} I_n x^n$.

IV.D.4) On pose d'abord $u = \tan \frac{t}{2}$, ce qui donne apès un peu de calcul :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1 - x\cos t}\mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{2}{(1-x) + (1+x)u^2}\,\mathrm{d}u = \frac{2}{1+x}\int_0^1 \frac{1}{\left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right)^2 + u^2}\,\mathrm{d}u$$

$$= \frac{2}{\sqrt{(1+x)(1-x)}}\left[\arctan u\sqrt{\tfrac{1+x}{1-x}}\right]_0^1 = \frac{2}{\sqrt{(1+x)(1-x)}}\arctan\sqrt{\tfrac{1+x}{1-x}}$$

$$\underset{1^-}{\sim} \frac{2}{\sqrt{2(1-x)}}\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{1-x}}.$$

On a donc : $\sum_{n=0}^{\infty} I_n x^n \underset{1^-}{\sim} \dfrac{\pi}{\sqrt{2}} \dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$.
Et enfin : $\sum_{n=0}^{\infty} x^{n^2} \underset{1^-}{\sim} \dfrac{\sqrt{\pi}}{2} \dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$.
$D = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$ convient.

Tout ceci sauf erreur de calcul de ma part. Si un collègue de TSI a une classe où un nombre significatif d'élèves peut faire une partie significative de ce problème… j'échange mes élèves contre les siens quand il veut !