MATHÉMATIQUES II

Dans tout le problème, n est un entier naturel supérieur ou égal à 2.

On note $M_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées réelles de taille n et $M_n(\mathbb{C})$ l'ensemble des matrices carrées complexes de taille n.

On note ${}^tA$ la matrice transposée d'une matrice A.

On note $\det(A)$ le déterminant d'une matrice A appartenant à $M_n(\mathbb{R})$ ou $M_n(\mathbb{C})$.

Partie I - Questions préliminaires

I.A - Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n, $\mathscr{U}$ et $\mathscr{V}$ deux bases de E ; on note P la matrice de passage de $\mathscr{U}$ à $\mathscr{V}$.

Soit f un endomorphisme de E, A sa matrice sur $\mathscr{U}$ et B sa matrice sur $\mathscr{V}$. Exprimer A en fonction de B, de P et de P^{-1}. (On ne demande pas de démonstration).

I.B - Soient M et N deux matrices appartenant à $M_n(\mathbb{R})$; on rappelle que M est dite semblable à N s'il existe une matrice inversible Q appartenant à $M_n(\mathbb{R})$ telle que $M = QNQ^{-1}$.

Montrer que si M est semblable à N, alors N est semblable à M. On dit alors, de façon abrégée, que « M et N sont semblables ».

I.C - Soit A, B et C trois matrices appartenant à $M_n(\mathbb{R})$. On suppose que A est semblable à B et que B est semblable à C.

Montrer que A est semblable à C.

Montrer aussi que ${}^tA$ et ${}^tB$ sont semblables.

I.D - Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$.

I.D.1) Montrer que si A est diagonale, A et ${}^tA$ sont semblables.

I.D.2) Montrer que si A est diagonalisable, alors A et ${}^tA$ sont semblables.

Plus généralement :

Le but du problème est de montrer que toute matrice A appartenant à $M_n(\mathbb{R})$ est semblable à sa transposée.

Filière TSI

Partie II - Cas $n = 2$

Dans cette partie, on fixe une matrice $A \in M_2(\mathbb{R})$, non diagonale, qu'on écrit

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \text{ et on cherche à résoudre l'équation } (\mathscr{E}) \ : \ {}^tAP = PA,$$

où l'inconnue P est une matrice appartenant à $M_2(\mathbb{R})$, qu'on cherchera sous la forme

$$P = \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix}.$$

II.A - Trouver un ensemble de conditions, portant sur x, y, z et t, qui soit nécessaire et suffisant pour que P vérifie $(\mathscr{E})$.

On ramènera cet ensemble à deux conditions, l'une étant $y = z$ et l'autre ne portant que sur x, y et t.

II.B - En prenant l'un des deux nombres x ou t nul, l'autre égal à $d - a$ et, dans chacun des deux cas, en choisissant convenablement y, trouver deux matrices P solutions ; montrer que l'une au moins de ces deux matrices est inversible.

II.C - Montrer que A et ${}^tA$ sont semblables.

Partie III - Cas $n = 3$

Dans cette partie, on munit l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ de sa structure euclidienne usuelle. La base canonique est donc orthonormée. Le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{x}$ et $\vec{y}$ est noté $\vec{x} \cdot \vec{y}$.

On fixe une matrice $A \in M_3(\mathbb{R})$. On note f et h les endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ qui admettent respectivement A et ${}^tA$ pour matrices sur la base canonique. On désigne par id l'endomorphisme identité et par I la matrice unité d'ordre 3.

On rappelle qu'un sous-espace vectoriel V de $\mathbb{R}^3$ est dit stable par f si, pour tout vecteur $\vec{v}$ de V, le vecteur $f(\vec{v})$ appartient à V.

III.A - Questions préliminaires

III.A.1) Montrer que toute fonction polynomiale de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, de degré impair, admet au moins un zéro.

III.A.2) Montrer que les matrices A et ${}^tA$ ont le même polynôme caractéristique et que ce polynôme admet au moins une racine réelle.

III.A.3) Soit (D) une droite vectorielle de $\mathbb{R}^3$, dirigée par un vecteur $\vec{i}$.

Montrer que (D) est stable par f si et seulement si $\vec{i}$ est vecteur propre de f. Montrer qu'il existe au moins une droite stable par f.

III.A.4) On suppose que le réel a est valeur propre de f, le sous-espace propre associé étant F, et valeur propre de h, le sous-espace propre associé étant H. Comparer les rangs des matrices $A - aI$ et ${}^tA - aI$. En déduire que F et H sont de même dimension.

III.A.5) Soient $\vec{x}$ et $\vec{y}$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$, de matrices X et Y sur la base canonique.

Comparer le produit scalaire $\vec{x} \,.\, \vec{y}$ et l'unique terme de la matrice ${}^tXY$.

Exprimer de façon analogue les produits scalaires $f(\vec{x}) \,.\, \vec{y}$ et $\vec{x} \,.\, h(\vec{y})$ et montrer que ces deux nombres sont égaux.

III.A.6) Soit $\vec{u}$ un vecteur propre de h.

Montrer que le plan vectoriel orthogonal au vecteur $\vec{u}$ est stable par f.

III.B - Dans toute cette question, on suppose qu'il existe une seule droite, notée (D), stable par f. On désigne par $\vec{i}$ un vecteur unitaire dirigeant (D).

III.B.1) Montrer qu'il existe une seule droite, qu'on notera (D'), stable par h. Dans toute cette question **III.B**, on suppose que (D') est orthogonale à (D) et on introduit une base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de $\mathbb{R}^3$, le vecteur $\vec{k}$ dirigeant (D'). Soit B la matrice de f sur cette base.

III.B.2) Montrer que $f(\vec{j})$ est orthogonal à $\vec{k}$.

III.B.3) Justifier que B est de la forme

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & a & d \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}.$$

III.B.4) En considérant le rang de $B - aI$, montrer que b et d sont non nuls.

III.B.5) On pose

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & b \\ 0 & d & 0 \\ b & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Calculer BP et $P\,{}^tB$.

Montrer que A est semblable à ${}^tA$.

III.C - Complément

On suppose, dans cette question seulement, que

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Montrer que f vérifie toutes les hypothèses de **III.B**.

III.D - Dans cette question, on suppose que f ne vérifie pas toutes les hypothèses de la question **III.B**.

III.D.1) Montrer qu'il existe une droite (D) et un plan (P) stables par f, (D) n'étant pas contenue dans (P).

III.D.2) Montrer qu'on peut trouver un vecteur $\vec{i}$ dans (D) et deux vecteurs $\vec{j}$ et $\vec{k}$ dans (P) tels que $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ soit une base de $\mathbb{R}^3$.

Quel est l'aspect de la matrice B de f sur cette base ?

III.D.3) Montrer, en calculant les produits ${}^tBQ$ et QB et en utilisant la partie **II**, qu'on peut trouver des réels x, y, z et t tels que la matrice

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & x & y \\ 0 & z & t \end{bmatrix}$$ soit inversible et vérifie ${}^tBQ = QB$.

Montrer que A est semblable à ${}^tA$.

Partie IV - Un résultat utile pour la suite du problème

On utilise maintenant des matrices complexes.

On note i le complexe usuel tel que $i^2 = -1$.

IV.A - Soit M une matrice appartenant à $M_n(\mathbb{C})$. Montrer qu'il existe un unique couple (P, Q) de matrices appartenant à $M_n(\mathbb{R})$ tel que $M = P + iQ$.

IV.B - Soient A et B deux matrices appartenant à $M_n(\mathbb{R})$. On suppose que ces deux matrices, considérées comme éléments de $M_n(\mathbb{C})$, sont semblables.

IV.B.1) Montrer qu'il existe deux matrices P_1 et P_2 appartenant à $M_n(\mathbb{R})$ telles que $P_1A = BP_1$, $P_2A = BP_2$ et $\det(P_1 + iP_2)$ est non nul.

IV.B.2) Soit g l'application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par $g(x) = \det(P_1 + xP_2)$.

Montrer, par exemple par récurrence sur n, que g est une fonction polynomiale. Montrer que g n'est pas la fonction nulle de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$.

En déduire qu'on peut trouver un réel x tel que $\det(P_1 + xP_2) \neq 0$.

IV.B.3) Montrer que les matrices A et B, considérées comme éléments de $M_n(\mathbb{R})$, sont semblables.

Partie V - Cas général

Dans cette partie, n est un entier quelconque supérieur ou égal à 2.

Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{C}^n$ dont A est la matrice sur la base canonique.

V.A - Rappeler le résultat du cours sur la trigonalisation d'un endomorphisme et justifier qu'il s'applique à f.

On admettra le résultat suivant, plus précis :

Soit α une valeur propre de f. On peut trouver une base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ de $\mathbb{C}^n$ et un entier k entre 0 et $n-1$ ayant les propriétés suivantes :

- La matrice T de f sur $\mathcal{B}$ est triangulaire supérieure.
- Les k premiers termes diagonaux sont tous différents de α et les $n-k$ derniers sont tous égaux à α.

On pose $g = f - \alpha\, id$, où id désigne l'identité de $\mathbb{C}^n$.

V.B - Dans cette question, $k = 0$; les termes diagonaux de T sont donc tous égaux à α.

V.B.1) Montrer que, pour tout i de 2 à $n, g(e_i)$ appartient au sous-espace engendré par $e_1, e_2, \ldots, e_{i-1}$.

En déduire que l'endormorphisme g^n est nul. (g^m désigne l'endomorphisme composé $g \circ g \ldots \circ g$, où g est utilisé m fois).

Dans toute la suite de ce **V.B**, on désigne par p le plus petit entier supérieur ou égal à 1 tel que g^p soit nul.

Montrer que si $p = 1$, alors A est semblable à ${}^tA$.

On continue en supposant $p \neq 1$. On a donc : $2 \leq p \leq n, g^{p-1} \neq 0$ et on désigne par $\vec{u}$ un vecteur tel que $g^{p-1}(\vec{u})$ ne soit pas nul.

On pose $\vec{u}_p = \vec{u},\ \vec{u}_{p-1} = g(\vec{u}), \ldots, \vec{u}_1 = g^{p-1}(\vec{u})$.

Montrer que la famille $(\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_p)$ est libre.

V.B.2) On suppose que $p = n$.

Quelles sont les matrices de f sur les bases $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n)$ et $(\vec{u}_n, \vec{u}_{n-1}, \ldots, \vec{u}_1)$ de $\mathbb{C}^n$? Montrer que A est semblable à ${}^tA$.

V.B.3) On suppose que $p < n$ et on complète $(\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_p)$ en une base $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n)$ de $\mathbb{C}^n$.

On note U la matrice de g sur cette base et P la matrice carrée dont la k – ième ligne est égale à la première ligne de U^{k-1}.

Montrer que les lignes de cette matrice P, à partir de la $p+1$ – ième, sont nulles. Que peut-on en conclure concernant le rang de P ?

Pour j et k entre 1 et p, préciser $g^{k-1}(u_j)$ suivant que $k < j,\ k = j$ ou $k > j$.

En déduire les p premiers termes de la k – ième ligne de P.

Montrer que la matrice P est de rang p.

Soit h l'endomorphisme admettant P pour matrice sur la base $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n)$ de $\mathbb{C}^n$ et soit W le sous-espace engendré par $(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_p)$.

Montrer que pour tout $\vec{v} \in W$, on a $h(\vec{v}) = \vec{v}$.

En déduire que W et le noyau de h sont deux sous-espaces supplémentaires de $\mathbb{C}^n$. Montrer que ces deux sous-espaces sont stables par g et par f.

V.C - Dans cette question, k n'est pas nul.

V.C.1) Justifier que la matrice de g sur la base $\mathcal{B}$ est de la forme

$$\begin{bmatrix} T_1 & | & B \\ — & & — \\ O & | & T_2 \end{bmatrix},$$

où les matrices T_1 et T_2 sont triangulaires supérieures, de tailles respectives k et $n-k$.

Montrer que la matrice T_2^{n-k} est nulle et que la matrice T_1 est inversible.

V.C.2) On admet que la matrice de g^{n-k} sur la base $\mathcal{B}$ est de la forme

$$\begin{bmatrix} T_1^{n-k} & | & B' \\ — & & — \\ O & | & T_2^{n-k} \end{bmatrix}.$$

Quel est le rang de cette matrice ? Quelle est la dimension du noyau G de g^{n-k} ?

V.C.3) Soit F le sous-espace de $\mathbb{C}^n$ engendré par $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_k)$.

Montrer que F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{C}^n$ et que ces sous-espaces de $\mathbb{C}^n$ sont stables par g et f.

V.D - On suppose par récurrence que toute matrice carrée complexe de taille comprise entre 1 et $n-1$ est semblable à sa transposée.

V.D.1) On suppose ici qu'il existe deux sous-espaces F et G supplémentaires dans $\mathbb{C}^n$ et stables par f, aucun de ces deux sous-espaces n'étant réduit au vecteur nul.

En considérant les restrictions de f à F et G, montrer que A est semblable à ${}^tA$.

V.D.2) En rassemblant les résultats, montrer que, dans tous les cas, A est semblable à ${}^tA$.

V.E - On suppose maintenant que $A \in M_n(\mathbb{R})$. Montrer que A est semblable à ${}^tA$ dans $M_n(\mathbb{R})$.

••• FIN •••
