On utilisera dans ce problème, plusieurs fois, la propriété : ${}^t\left(P^{-1}\right) = \left({}^tP\right)^{-1} = {}^tP^{-1}$.
On évitera ainsi d'écrire des parenthèses en préférant l'écriture : ${}^tP^{-1}$ aux deux autres.

I Questions préliminaires

I.A On a : $B = P^{-1}AP$.

I.B On a : $M = QNQ^{-1}$, d'où : $N = Q^{-1}MQ = Q^{-1}M\left(Q^{-1}\right)^{-1}$.
N est aussi semblable à M.

I.C On a encore : $B = P^{-1}AP$ et $C = Q^{-1}BQ$, ce qui donne : $C = Q^{-1}P^{-1}APQ = (PQ)^{-1}A(PQ)$.
C est aussi semblable à A.
On part maintenant de : $B = P^{-1}AP$, qu'on transpose : ${}^tB = {}^tP\,{}^tA\,{}^tP^{-1}$.
Ce qui prouve que ${}^tA$ et ${}^tB$ sont semblables.

I.D Cas où A est diagonale ou diagonalisable

I.D.1) Si A est diagonale, alors, $A = {}^tA = I^{-1}\,{}^tAI$.
A et ${}^tA$ sont alors semblables.

I.D.2) Si A est diagonalisable, alors : $A = PDP^{-1}$
et aussi, en transposant : ${}^tA = {}^tP^{-1}D\,{}^tP$, car D est diagonale.
On a donc A et ${}^tA$ semblables toutes les 2 à D, et donc semblables.

II Cas $n = 2$

II.A ${}^tAP = PA$ devient : $\begin{pmatrix} ax+cz & ay+ct \\ bx+dz & by+dt \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax+cy & bx+dy \\ az+ct & bz+dt \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} cy = cz \\ ay+ct = bx+dy \\ az+ct = bx+dz \\ by = bz \end{cases}$

A n'est pas diagonale, donc b et c ne sont pas tous les 2 nuls, d'où : $y = z$ en simplifiant la première ou la dernière ligne.

Finalement : ${}^tAP = PA \Leftrightarrow \begin{cases} y = z \\ ay+ct = bx+dy \end{cases}$

II.B Si $c \neq 0$, on prend $t = 0$, $t = a-d$ et $y = -c = z$.
$P = \begin{pmatrix} 0 & -c \\ -c & a-d \end{pmatrix}$ est bien inversible et convient.
Si $b \neq 0$, on prend $t = 0$, $x = a-d$ et $y = b = z$.
$P = \begin{pmatrix} 0 & b \\ b & a-d \end{pmatrix}$ est bien inversible et convient.
Dans tous les cas on a une matrice de passage P qui convient.

II.C Avec cette matrice P, on a : ${}^tAP = PA$ et donc : $A = P^{-1}\,{}^tAP$.
A et ${}^tA$ sont bien semblables.

III Cas $n = 3$

III.A Questions préliminaires

III.A.1) Les limites de la fonction en $\pm\infty$ sont $\pm\infty$ ou $\mp\infty$ selon le signe du coefficient de plus haut degré. Cette fonction polynomiale change donc de signe et est bien sûr continue, elle s'annule donc au moins une fois.

III.A.2) $P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n) = \det\left({}^t(A - \lambda I_n)\right) = P_{{}^tA}(\lambda) = -\lambda^3 + \cdots + \det A$

Les deux polynômes caractéristiques sont égaux et de degré 3, ils ont au moins une racine réelle.

III.A.3) Si $f\left(\overrightarrow{i}\right) = \lambda \overrightarrow{i}$, alors : $f\left(\alpha \overrightarrow{i}\right) = \lambda\alpha \overrightarrow{i} \in \text{Vect}\left(\overrightarrow{i}\right)$.

Ceci prouve que $\text{Vect}\left(\overrightarrow{i}\right)$ est stable par f.

Réciproquement, si $\text{Vect}\left(\overrightarrow{i}\right)$ est stable par f, $f\left(\overrightarrow{i}\right) \in \text{Vect}\left(\overrightarrow{i}\right)$

et donc $\exists\lambda \in \mathbb{R}$, tel que : $f\left(\overrightarrow{i}\right) = \lambda \overrightarrow{i}$.

$\overrightarrow{i}$ est donc propre pour f.

On a bien l'équivalence demandée.

III.A.4) Le rang de $A - aI$ est celui de sa transposée ${}^tA - aI$. Les dimensions de leurs noyaux sont donc les mêmes. Ces noyaux sont les sous-espaces propres F et H, qui ont donc la même dimension.

III.A.5) $\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{y} = {}^tXY$ entraine : $f\left(\overrightarrow{x}\right) \cdot \overrightarrow{y} = {}^t(AX)Y = {}^tX\,{}^tAY$ et : $\overrightarrow{x} \cdot h\left(\overrightarrow{y}\right) = {}^tX\,{}^tAY$.

On a bien l'égalité demandée.

III.A.6) Soit : $\overrightarrow{v} \perp \overrightarrow{u}$ avec : $h\left(\overrightarrow{u}\right) = \lambda\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$.

$\overrightarrow{v} \cdot h\left(\overrightarrow{u}\right) = \overrightarrow{v} \cdot \lambda\overrightarrow{u} = 0 = f\left(\overrightarrow{v}\right) \cdot \overrightarrow{u}$ d'où : $f\left(\overrightarrow{v}\right) \perp \overrightarrow{u}$.

$\Pi_{\overrightarrow{u}}$ est bien stable par f.

III.B Cas particulier

III.B.1) f possède une seule valeur propre réelle, avec un sous-espace propre de dimension 1, compte tenu du III.A.2) et du III.A.4), il en est de même pour h.

Il n'y a donc qu'une seule droite stable par h.

III.B.2) $\overrightarrow{j} \perp \overrightarrow{k} \Rightarrow \overrightarrow{j} \in \overrightarrow{k}^{\perp}$, et donc : $f\left(\overrightarrow{j}\right) \perp \overrightarrow{k}$ car $\Pi_{\overrightarrow{k}}$ est stable par f.

III.B.3) $f\left(\overrightarrow{i}\right) = a\overrightarrow{i}$ donne la première colonne de B.

$h\left(\overrightarrow{k}\right) = a\overrightarrow{k}$ donne la troisième colonne de ${}^tB$ et donc la troisième ligne de B.

On a donc $B = \begin{bmatrix} a & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}$.

B est donc triangulaire et a au moins 2 valeurs propres réelles (distinctes ou confondues), il a donc ses 3 valeurs propres réelles, en effet, les valeurs propres « complexes non réelles » vont « 2 par 2 ». Elles sont de plus égales. En effet, dans le cas contraire, il y aurait un autre sous-espace propre pour f et donc une autre droite vectorielle stable par f.

On a donc $B = \begin{bmatrix} a & \cdot & \cdot \\ 0 & a & \cdot \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}$, il ne reste qu'à nommer les termes inconnus : $B = \begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & a & d \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}$.

III.B.4) $B - aI = \begin{bmatrix} 0 & b & c \\ 0 & 0 & d \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ est de rang 2, et donc : $\begin{bmatrix} b & c \\ 0 & d \end{bmatrix}$ aussi, elle est donc inversible, de déterminant non nul et donc : $bd \neq 0$.

On a bien montré que b et d sont non nuls.

III.B.5) On calcule facilement : $BP = \begin{bmatrix} bc & bd & ab \\ bd & ad & 0 \\ ba & 0 & 0 \end{bmatrix}$ et : $P\,{}^tB = \begin{bmatrix} bc & bd & ab \\ bd & ad & 0 \\ ba & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Ce qui donne : $BP = P\,{}^tB$, et donc : ${}^tB = P^{-1}BP$.

B et ${}^tB$ sont donc semblables.

Par ailleurs, B et A sont semblables, et donc ${}^tB$ et ${}^tA$ le sont aussi (I.C).

Finalement A et ${}^tA$ sont semblables, toujours en utilisant le I.C.

III.C A possède une seule valeurs propre réelle 1, le sous-espace propre est de dimension 1 car $A - I$ est de rang 2. Ce sous-espace propre est engendré par $\overrightarrow{i}$.

${}^tA = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ vérifie les mêmes propriétés mais son sous-espace propre est engendré par $\overrightarrow{k}$, qui est bien orthogonal à $\overrightarrow{i}$.

A vérifie bien les hypothèses du II.B.

III.D On a toujours une valeur propre réelle au moins, et donc au moins une droite vectorielle stable par f au moins. On a donc au moins deux droites vectorielles stables par f. De plus, f n'est pas diagonalisable, et donc, on peut avoir :

- a valeur propre réelle triple, avec un sous espace propre de dimension 2 ;
- a et b valeurs propres réelles doubles et simples, avec des sous-espaces propres de dimension 1.

III.D.1) On va étudier les différents cas :

- a valeur propre réelle triple, sous-espace propre de dimension 2 : ce sous-espace propre est engendré par $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.
  On complète cette famille libre en une base par $\overrightarrow{w}$.
  Dans cette base, la matrice de f est triangulaire, et donc : $f(\overrightarrow{w}) = a\overrightarrow{w} + \alpha\overrightarrow{u} + \beta\overrightarrow{v}$.
  $\alpha\overrightarrow{u} + \beta\overrightarrow{v}$ est non nul et propre. Vect$(\overrightarrow{w}, \alpha\overrightarrow{u} + \beta\overrightarrow{v})$ est un plan (P) clairement stable par f. On prend comme droite (D) la droite engendrée par $\overrightarrow{u}$ ou $\overrightarrow{v}$ de façon à faire une base avec les 2 vecteurs précédents.
- a valeur propre réelle double, b valeur propre réelle simple, avec des sous-espaces propres de dimension 1 : on prend une base $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ où le premier vecteur est propre pour a et le second propre pour b, la matrice dans cette base est naturellement triangulaire.
  On a : $f(\overrightarrow{w}) = a\overrightarrow{w} + \alpha\overrightarrow{u} + \beta\overrightarrow{v}$. on prend : $\overrightarrow{w}' = \overrightarrow{w} - \dfrac{\beta}{b-a}\overrightarrow{v}$.
  Alors, après un calcul simple : $f(\overrightarrow{w}') = a\overrightarrow{w}' + \alpha\overrightarrow{u}$. On a en fait cherché un vecteur $\overrightarrow{w}'$, somme de $\overrightarrow{w}$ et de k fois $\overrightarrow{v}$ qui vérifiait cette propriété.
  La droite engendrée par $\overrightarrow{v}$ et le plan engendré par $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{w}'$ sont clairement stables par f, ces trois vecteurs forment une base, la droite n'est pas incluse dans le plan.

Dans tous les cas, on a trouvé une droite (D) et un plan (P) stables par f et supplémentaires.

III.D.2) Dans le premier cas, en prenant, par exemple quand (D) peut être engendrée par $\overrightarrow{u}$:
$\overrightarrow{i} = \overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{j} = \alpha\overrightarrow{u} + \beta\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{k} = \overrightarrow{w}$,

La matrice de f dans cette base est : $B = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}$

Dans le deuxième cas, en prenant, par exemple : $\overrightarrow{i} = \overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{j} = \overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{k} = \overrightarrow{w}'$, on obtient la base décrite par l'énoncé.

La matrice de f dans cette base est : $B = \begin{bmatrix} b & 0 & 0 \\ 0 & a & \alpha \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}$.

On peut donc toujours trouver une base où la matrice a cette forme avec $\alpha \neq 0$.

III.D.3) Après un calcul simple : ${}^tBQ = \begin{bmatrix} b & 0 & 0 \\ 0 & xa & ya \\ 0 & x\alpha + za & y\alpha + ta \end{bmatrix}$ et $QB = \begin{bmatrix} b & 0 & 0 \\ 0 & xa & x\alpha + ya \\ 0 & za & z\alpha + ta \end{bmatrix}$.

Comme à la partie II, avec des calculs qui sont mêmes plus simples, l'égalité revient rapidement, compte tenu de $\alpha \neq 0$ à : $x = 0$ et $y = z$, t étant quelconque.

$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ est inversible et telle que : ${}^tBQ = QB$, et donc : $B = Q^{-1}\,{}^tBQ$.

On a donc B et ${}^tB$ semblables, mais aussi A et B semblables et donc ${}^tB$ et ${}^tA$ le sont aussi (I.C).

Finalement A et ${}^tA$ sont semblables, toujours en utilisant le I.C.

IV Un résultat utile...

IV.A Clairement, P a pour coefficients les parties réelles des coefficients de M, et Q les parties imaginaires.

IV.B Semblables dans $\mathbb{C}$ et dans $\mathbb{R}$...

IV.B.1) On sait que : $PA = BP$ avec P inversible. Ecrivons : $P = P_1 + iP_2$, les parties réelle et imaginaire. On obtient : $(P_1 + iP_2)\,A = B\,(P_1 + iP_2) = P_1A + iP_2A = BP_1 + iBP_2$.

En égalant les parties réelles et imaginaires, il vient : $P_1A = BP_1$ et $P_2A = BP_2$, avec $P_1 + iP_2$ inversible, c'est à dire de déterminant non nul.

IV.B.2) La récurrence est inutile, en effet, le déterminant est polynomial de ses coefficients et g est donc un polynôme en x.

On a bien sûr : $g(i) \neq 0$, g n'est pas le polynôme nul sur $\mathbb{C}$.

Si $g(x) = 0$ pour tous les réels, on aurait un polynôme avec une infinité de racines, ce serait le polynôme nul, ce qui est impossible.

Et donc : g n'est pas le polynôme nul sur $\mathbb{R}$.

On a donc l'existence d'un réel x tel que $g(x) = \det(P_1 + xP_2) \neq 0$.

IV.B.3) De $P_1A = BP_1$ et $P_2A = BP_2$, on tire : $(P_1 + xP_2)\,A = B\,(P_1 + xP_2)$ avec $P_1 + xP_2$ réelle et inversible.

Et donc : $A = (P_1 + xP_2)^{-1}\,B\,(P_1 + xP_2)$, A et B sont semblables sur $\mathbb{R}$.

V Cas général

V.A Tout endomorphisme dont le polynôme caractéristique est scindé est trigonalisable. C'est donc toujours le cas quand on travaille sur $\mathbb{C}$.

V.B Cas $k = 0$

V.B.1) La matrice de g dans la base $\mathcal{B}$ a la forme suivante : $B = \begin{bmatrix} 0 & \text{x} & \cdots & \cdots & \text{x} \\ \vdots & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & 0 & \text{x} \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix}$, où les x sont des coefficients inconnus.

Il est clair qu'à partir de $n = 2$, les $g\,(e_i)$ [1] appartiennent à l'espace vectoriel engendré par les vecteurs précédents.

On a : $\operatorname{Im}(g) \subset \operatorname{Vect}(e_1, \ldots, e_{n-1})$.

Et donc : $\operatorname{Im}\left(g^2\right) \subset \operatorname{Vect}(e_1, \ldots, e_{n-2})$.

Par récurrence facile jusqu'au rang $n - 1$: $\operatorname{Im}\left(g^k\right) \subset \operatorname{Vect}(e_1, \ldots, e_{n-k})$.

Ce qui donne : $\operatorname{Im}\left(g^{n-1}\right) \subset \operatorname{Vect}(e_1)$.

[1] Assez bizarrement, dans cette question, les vecteurs ne sont pas fléchés.

Et enfin : $\text{Im}\,(g^n) = \left\{\overrightarrow{0}\right\}$.
g^n est bien l'application nulle.
Il existe donc bien un premier p tel que g^p est nul.
Si $p = 1$, alors $f = \alpha\, id$ est diagonalisable (!...) et donc A est semblable à ${}^tA$.
Maintenant, $p \neq 1$.
Montrons que la famille $(\overrightarrow{u_1}, \ldots, \overrightarrow{u_p})$ est libre.
Soit : $\lambda_1\overrightarrow{u_1} + \cdots + \lambda_p\overrightarrow{u_p} = \overrightarrow{0}$, on compose cette égalité par g^{p-1}, et on obtient : $\lambda_p g^{p-1}\left(\overrightarrow{u_p}\right) = \overrightarrow{0}$ car tous les autre vecteurs sont nuls.
Mais : $g^{p-1}\left(\overrightarrow{u_p}\right) = g^{p-1}\left(\overrightarrow{u}\right) = \overrightarrow{u_1}$.
Ainsi : $\lambda_p\overrightarrow{u_1} = \overrightarrow{0}$ et enfin : $\lambda_p = 0$.
On reprend la relation : $\lambda_1\overrightarrow{u_1} + \cdots + \lambda_{p-1}\overrightarrow{u_{p-1}} = \overrightarrow{0}$, on compose maintenant par g^{p-2} pour obtenir : $\lambda_{p-1} = 0$...
Par récurrence assez facile, on finit par avoir : $\lambda_1\overrightarrow{u_1} + \lambda_2\overrightarrow{u_2} = \overrightarrow{0}$ qu'on compose par g pour obtenir $\lambda_2 = 0$.
Il reste : $\lambda_1\overrightarrow{u_1} = \overrightarrow{0}$ qui donne $\lambda_1 = 0$.
La famille est libre.

V.B.2) Ici, $p = n$.

La matrice de g sur la base $(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \ldots, \overrightarrow{u_n})$ est donc : $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix}$

La matrice de f sur la base $(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \ldots, \overrightarrow{u_n})$ est donc : $B = \begin{bmatrix} \alpha & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \alpha \end{bmatrix}$

Tandis que sur la base $(\overrightarrow{u_n}, \overrightarrow{u_{n-1}}, \ldots, \overrightarrow{u_1})$, la matrice de g est : $\begin{bmatrix} 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

Et donc sur la base $(\overrightarrow{u_n}, \overrightarrow{u_{n-1}}, \ldots, \overrightarrow{u_1})$, la matrice de f est : $\begin{bmatrix} \alpha & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & \alpha \end{bmatrix} = {}^tB$

On a donc B et ${}^tB$ qui sont semblables. Mais A est semblable à B, donc ${}^tA$ et ${}^tB$ sont aussi semblables et enfin : A et ${}^tA$ sont semblables.

V.B.3) A partir de $k = p$, on a $U^k = 0$ et donc la $(k+1)^{\text{ème}}$ ligne de P est nulle.

Toutes les lignes de P à partir de la $(p+1)^{\text{ème}}$ sont donc nulles.

A priori, le rang de P est au plus p.

Maintenant, j et k sont entre 1 et p.

Le calcul des $g^{k-1}\left(\overrightarrow{u_j}\right)$ se fait donc comme à la question précédente.

Pour $k<j$, on a : $g^{k-1}\left(\overrightarrow{u_j}\right)=g^{k-2}\left(\overrightarrow{u_{j-1}}\right)=\ldots=g\left(\overrightarrow{u_{j-k+2}}\right)=\overrightarrow{u_{j-k+1}}$.

Pour $k=j$, on a : $g^{k-1}\left(\overrightarrow{u_k}\right)=g^{k-2}\left(\overrightarrow{u_{k-1}}\right)=\ldots=\overrightarrow{u_1}$.

Pour $k>j$, on a : $g^{k-1}\left(\overrightarrow{u_j}\right)=g^{k-j}\left(\overrightarrow{u_1}\right)=\overrightarrow{0}$.

La $k^{\text{ème}}$ ligne de de P est la première ligne de U^{k-1}, c'est à dire la première ligne de la matrice de g^{k-1}.

Les p premiers termes de cette ligne sont donc les composantes sur $\overrightarrow{u_1}$ de $g^{k-1}\left(\overrightarrow{u_j}\right)$. C'est donc 0 sauf pour $j=k$, c'est à dire en colonne k, auquel cas c'est 1.

Le bloc des p premières lignes et colonnes de P est donc la matrice I_p.

P est donc de rang au moins p, donc exactement de rang p.

Par ailleurs, compte tenu de ce qu'on a déjà montré sur les lignes suivantes de P, nulles à partir de la $(p+1)^{\text{ème}}$, les p premières colonnes de P sont les p premières colonnes de I_n.

La restriction de h à W est donc l'identité. Ceci prouve que pour $\overrightarrow{v}\in W$, on a : $h\left(\overrightarrow{v}\right)=\overrightarrow{v}$.

W est de dimension p et le noyau de h de la dimension du noyau de P, c'est à dire $n-p$.

Il suffit de montrer que $W\cap\ker h=\left\{\overrightarrow{0}\right\}$.

Mais si $\overrightarrow{v}\in W\cap\ker h$, on a : $h\left(\overrightarrow{v}\right)=\overrightarrow{v}$, et $h\left(\overrightarrow{v}\right)=\overrightarrow{0}$, et donc : $\overrightarrow{v}=\overrightarrow{0}$.

W et $\ker h$ sont bien supplémentaires.

Reste à montrer qu'ils sont stables par g. Comme $f=g+\alpha\, id$, la stabilité par g impliquera la stabilité par f.

a) Si $\overrightarrow{v}\in W$, on a : $\overrightarrow{v}\in \operatorname{Vect}\left(\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2},\ldots,\overrightarrow{u_p}\right)$.

Et donc : $\overrightarrow{v}\in\operatorname{Vect}\left(g\left(\overrightarrow{u_1}\right),g\left(\overrightarrow{u_2}\right),\ldots,g\left(\overrightarrow{u_p}\right)\right)=\operatorname{Vect}\left(\overrightarrow{0},\overrightarrow{u_1},\ldots,\overrightarrow{u_{p-1}}\right)\subset W$.

Ceci prouve que W est stable par g.

b) Si $\overrightarrow{v}\in\ker h$, on a, en travaillant dans la base des $\overrightarrow{u_j}$: $PV=0$. Ceci est aussi vrai pour la première coordonnée de PV qui n'est que la première coordonnée de V, c'est à dire la première composante de $\overrightarrow{v}$ sur $\overrightarrow{u_1}$.

De la même façon, jusqu'au rang n, les coordonnées de PV sont nulles.

Par exemple, la deuxième coordonnée de PV est la première coordonnée de UV, c'est à dire la première coordonnée de $g\left(\overrightarrow{v}\right)$ sur $\overrightarrow{u_1}$, qui est donc nulle.

Et la $n^{\text{ème}}$ coordonnée de PV est la première coordonnée de $U^{n-1}V$, c'est à dire la première coordonnée de $g^{n-1}\left(\overrightarrow{v}\right)$ sur $\overrightarrow{u_1}$, qui est donc nulle.

Comme $g^n\left(\overrightarrow{v}\right)=\overrightarrow{0}$, on a encore la propriété au rang suivant.

Ceci prouve que $PUV=0$, en travaillant avec UV au lieur de V. Et enfin, $g\left(\overrightarrow{v}\right)\in\ker h$.

V.C Cas où $k\neq 0$

V.C.1) La matrice de f sur $\mathcal{B}$ est triangulaire supérieure, il en est donc de même pour la matrice de $f-\alpha\, id$, qui n'est que celle de g.

Cette matrice a donc bien la forme demandée, on pourrait même ici remplacer les tailles k et $n-k$ de T_1 et T_2 par j et $n-j$ arbitrairement...

En prenant les dimensions données, il vient immédiatement que la matrice T_2 est stricteemnt triangulaire supérieure. Il se produit avec T_2 ce qui se produisait avec T au V.B., en dimension $n-k$ au lieu de n, c'est à dire que $T_2^{n-k}=0$ de la même façon qu'on avait $T^n=0$.

Par ailleurs, T_1 est triangulaire supérieure, les termes de la diagonale étant tous non nuls... Elle est donc inversible.

V.C.2) On admet que la matrice de g^{n-k} dans la base $\mathcal{B}$ est bien : $\begin{bmatrix} T_1^{n-k} & B' \\ 0 & T_2^{n-k} \end{bmatrix}$.

T_1^{n-k} est inversible, donc de rang k, la matrice de g^{n-k} est donc de rang au moins k.

Mais aussi : $T_2^{n-k} = 0$, les $n-k$ dernières lignes de la matrice sont nulles, elle est de rang au plus k.

La matrice de g^{n-k} est donc de rang k, son noyau G est de dimension $n-k$.

V.C.3) Pour montrer que F et G sont supplémentaires, compte tenu des dimensions, il suffit de montrer que l'intersection est réduite au vecteur nul.

Soit $\overrightarrow{v} \in F \cap G$, alors $g^{n-k}\left(\overrightarrow{v}\right) = \overrightarrow{0}$ et comme la restriction de g^{n-k} sur F est un isomorphisme (T_1^{n-k} inversible), on a bien : $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$.

Il suffit donc de montrer que F et G sont stables par g. Comme on l'a déjà vu, $f = g + \alpha\, id$, la stabilité par g implique la stabilité par f.

Soit $\overrightarrow{v} \in G$, alors : $g^{n-k}\left(\overrightarrow{v}\right) = \overrightarrow{0}$, et donc : $g^{n-k}\left(g\left(\overrightarrow{v}\right)\right) = g^{n-k+1}\left(\overrightarrow{v}\right) = g\left(\overrightarrow{0}\right) = \overrightarrow{0}$, c'est à dire : $g\left(\overrightarrow{v}\right) \in G$.

G est bien stable par g.

Par ailleurs, on a déjà presque utilisé le fait que la restriction de g sur F est un isomorphisme, puisque T_1 est inversible, ce qui prouve que F est stable par g.

V.D Récurrence

V.D.1) On a déjà vu plusieurs fois qu'il suffit de montrer que, dans une certaine base, la matrice de f, notée B, et sa transposée ${}^tB$ sont semblables. Cela montrera que A est semblable à ${}^tA$ (voir la première partie).

Dans une base obtenue en mettant bout à bout une base de F et une base de G, la matrice de f est : $B = \begin{bmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & B_2 \end{bmatrix}$. Clairement : ${}^tB = \begin{bmatrix} {}^tB_1 & 0 \\ 0 & {}^tB_2 \end{bmatrix}$.

B_1 et B_2 étant des matrices carrées de tailles respectives k et $n-k$. Celles ci étant strictement inférieures à n, ces matrices sont semblables à leurs transposées.

Ce qui donne : $B_1 = P_1^{-1}\, {}^tB_1 P_1$ et aussi : $B_2 = P_2^{-1}\, {}^tB_2 P_2$.

D'où : $B = \begin{bmatrix} P_1^{-1}\, {}^tB_1 P_1 & 0 \\ 0 & P_2^{-1}\, {}^tB_2 P_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_1^{-1} & 0 \\ 0 & P_2^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^tB_1 & 0 \\ 0 & {}^tB_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{bmatrix}$.

Mais : $\begin{bmatrix} P_1^{-1} & 0 \\ 0 & P_2^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{bmatrix}^{-1}$.

Ce qui donne enfin :$B = \begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{bmatrix}^{-1} {}^tB \begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{bmatrix}$.

B et ${}^tB$ sont donc semblables, il en est de même pour A et ${}^tA$.

V.D.2) Compte tenu du cas $n = 1$ qui est trivial, des cas $n = 2$ ou $n = 3$, on a largement l'amorce de la récurrence.

Par ailleurs, on a montré qu'on pouvait toujours trouver deux sous-espaces supplémentaires stables, et en utilisant la question précédente, la récurrence est démontrée.

A et ${}^tA$ sont donc toujours semblables, considérées, bien sûr, comme matrices à coefficients complexes pour pouvoir les triangulariser (Partie V).

V.E Maintenant, si A est réelle, elle est semblable à ${}^tA$ sur $\mathbb{C}$, donc sur $\mathbb{R}$ (Partie IV).