I Forme Quadratique et Déterminant

I.A -

I.A.1) $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $A' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix}$, alors : $\lambda\, A + A' = \begin{pmatrix} \lambda\, a + a' & \lambda\, b + b' \\ \lambda\, c + c' & \lambda\, d + d' \end{pmatrix}$.

Ce qui donne : $\mathrm{tr}\,(\lambda\, A + A') = \lambda\, a + a' + \lambda\, d + d' = \lambda\, \mathrm{tr}\,(A) + \mathrm{tr}\,(A')$.

On a bien la linéarité.

D'autre part, $A\, A' = \begin{pmatrix} aa' + bc' & ab' + bd' \\ ca' + dc' & cb' + dd' \end{pmatrix}$,

ce qui donne : $\mathrm{tr}\,(A\, A') = aa' + bc' + cb' + dd' = \mathrm{tr}\,(A'A)$.

Enfin, il est clair que $\mathrm{tr}\,({}^tA) = \mathrm{tr}\,(A)$.

I.A.2) Il faut montrer que la forme est bilinéaire symétrique, définie positive.

$\langle A|B\rangle = \mathrm{tr}\,(A\,{}^tB) = \mathrm{tr}\,({}^t(A\,{}^tB)) = \mathrm{tr}\,(B\,{}^tA) = \langle B|A\rangle$, la forme est symétrique.

$\langle \lambda\, A + A'|B\rangle = \mathrm{tr}\,((\lambda\, A + A')\,{}^tB) = \mathrm{tr}\,(\lambda\, A\,{}^tB + A'\,{}^tB) = \lambda\, \mathrm{tr}\,(A\,{}^tB) + \mathrm{tr}\,(A'\,{}^tB)$

$\langle \lambda\, A + A'|B\rangle = \lambda\, \langle A|B\rangle + \langle A'|B\rangle$.

La forme est aussi linéaire par rapport à la première variable, elle est bilinéaire symétrique.

Etudions maintenant la forme quadratique.

$\langle A|A\rangle = \mathrm{tr}\,(A\,{}^tA) = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \geqslant 0$, la forme est positive.

$\langle A|A\rangle = 0 \Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 0 \Rightarrow a = b = c = d = 0 \Rightarrow A = 0$.

La forme quadratique est bien définie positive, on a bien un produit scalaire sur M_2.

I.B Pour montrer qu'on a une base othonormée, il faut montrer que les vecteurs-matrices sont normés et orthogonaux 2 à 2.

$E_1\,{}^tE_1 = E_1$ dont la trace est 1 : E_1 est normé.

$E_2\,{}^tE_2 = E_2$ dont la trace est 1 : E_2 est normé.

$E_3\,{}^tE_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ dont la trace est 1 : E_3 est normé.

$E_4\,{}^tE_4 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ dont la trace est 1 : E_4 est normé.

On aurait aussi pu utiliser $\langle A|A\rangle = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$, l'expression obtenue à la question précédente, ce qui donne un peu moins de calculs.

$E_1\,{}^tE_2 = 0$ dont la trace est 0 : E_1 et E_2 sont orthogonaux.

$E_1\,{}^tE_3 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ dont la trace est 0 : E_1 et E_3 sont orthogonaux.

$E_1\,{}^tE_4 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ dont la trace est 0 : E_1 et E_4 sont orthogonaux.

$E_2\,{}^tE_3 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ dont la trace est 0 : E_2 et E_3 sont orthogonaux.

$E_2\,{}^tE_4 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ dont la trace est 0 : E_2 et E_4 sont orthogonaux.

$E_3\,{}^tE_4 = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ dont la trace est 0 : E_3 et E_4 sont orthogonaux.

$\mathbf{B}_0$ est bien une base orthonormale.

I.C -Déterminant

I.C.1) $M=\sum\limits_{i=1}^{4}x_i\,E_i=\begin{pmatrix} x_1 & \frac{1}{\sqrt{2}}\left(x_3+x_4\right) \\ \frac{1}{\sqrt{2}}\left(x_3-x_4\right) & x_2 \end{pmatrix}$, ce qui donne :

$\det\left(M\right)=x_1\,x_2-\dfrac{1}{2}\left(x_3-x_4\right)\left(x_3+x_4\right)=x_1\,x_2+\dfrac{1}{2}\left(x_4^2-x_3^2\right).$

I.C.2) $\det\circ\Psi\left(a,b,c,d\right)=\det\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right)=ad-bc.$

C'est un polynôme homogène de degré 2 en a,b,c,d, c'est donc une forme quadratique.

La matrice de $\det\circ\Psi$ dans la base canonique est donc : $M=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

La matrice, orthogonale, de changement de bases est : $P=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

La matrice de cette forme quadratique dans la nouvelle base est donc : $P^{-1}\,M\,P={}^t\!P\,M\,P$.

Plus simplement, c'est aussi la matrice de la forme quadratique obtenue à la question précédente $\left(x_1\,x_2+\dfrac{1}{2}\left(x_4^2-x_3^2\right)\right)$.

En effet, $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}=P\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$, d'où : $(a,b,c,d)=(x_1,x_2,x_3,x_4)\ {}^t\!P$,

ce qui donne : $\det\left(M\right)=(a,b,c,d)\ M\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}=(x_1,x_2,x_3,x_4)\ {}^t\!P\,M\,P\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$

$x_1\,x_2+\dfrac{1}{2}\left(x_4^2-x_3^2\right)=(x_1,x_2,x_3,x_4)\ {}^t\!P\,M\,P\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$ donne bien : ${}^t\!P\,M\,P=\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

II Forme Quadratique sur M_2

II.A Il est clair que le déterminant convient.

II.B q est non nulle, sinon, $q\circ\Psi$ serait nulle, ce qui est contraire aux hypothèses.

Soit N telle que $q\left(N\right)\neq 0$ et $q\left(N\right)\neq 1$, ce qui est possible car $q\left(2N\right)=4\,q\left(N\right)$.

$q\left(0\right)=q\left(0\times N\right)=q\left(0\right)q\left(N\right)$, ce qui entraine $q\left(0\right)\left(q\left(N\right)-1\right)=0$, et enfin $q\left(0\right)=0$.

$q\left(N\right)=q\left(I\times N\right)=q\left(I\right)q\left(N\right)$, ce qui entraine $q\left(N\right)\left(q\left(I\right)-1\right)=0$, et enfin $q\left(I\right)=1$.

II.C Si le rang de M est 2, M est inversible, et donc : $q\left(I\right)=q\left(M\,M^{-1}\right)=q\left(M\right)q\left(M^{-1}\right)=1$, ce qui prouve : $q\left(M\right)\neq 0$.

II.D -

II.D.1) f est de rang 1, son noyau est de dimension : $2-1=1$, engendré par v. On complète par u cette base incomplète d'un seul vecteur, on se retrouve avec une base (u,v) telle que $\ker f = \text{Vect}(v)$. On appelle A la matrice de passage correspondante.

u n'appartient pas au noyau car il n'est pas colinéaire à v, ce qui donne $f(u) \neq 0$. On complète par w cette base incomplète d'un seul vecteur $f(u)$. On obtient la base B_3. On appelle B la matrice de passage correspondante.

On appelle U, V, W les vecteurs colonnes des coordonnées de u, v, w dans la base canonique.

On a $AU = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $AV = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

On a aussi $BW = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, qu'on n'utilise pas, et $BMU = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Enfin, $MV = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Ce qui donne : $BMA^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = BMU = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, première colonne de BMA^{-1},

et $BMA^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = BMV = B\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, seconde colonne de BMA^{-1}.

Ce qui revient à : $BMA^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

$P = B$ et $Q = A^{-1}$ conviennent donc.

II.D.2) $q(M) = q\left(B^{-1}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} A\right) = q\left(B^{-1}\right) q\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) q\left(A\right)$,

on va plus loin en calculant : $q\left(M^2\right) = q(M)^2 = q\left(B^{-1}\right)^2 q\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)^2 q\left(A\right)^2$

$q\left(M\right)^2 = q\left(B^{-1}\right)^2 q\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^2\right) q\left(A\right)^2 = q\left(B^{-1}\right)^2 q\left(0\right) q\left(A\right)^2 = 0.$

Finalement : $q(M) = 0$.

II.E Si le rang de M est 2, $q(M) \neq 0$,

si le rang est 1, $q(M) = 0$ et si le rang de M est nul, $M = 0$ et $q(M) = 0$ car q est quadratique.

On a bien : $M \neq 0 \Leftrightarrow M$ est inversible.

II.F -

II.F.1) $f(\lambda) = \begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{vmatrix} = \left(a-\lambda\right)\left(d-\lambda\right) - bc$. C'est un polynôme de degré 2 en λ dont les racines sont les valeurs propres de M.

II.F.2) Remarquon d'abord que : $\varphi\left(A,A\right) = \dfrac{1}{4}\left(q\left(2A\right) - q\left(0\right)\right) = \dfrac{1}{4} q\left(2A\right) = q\left(A\right)$.

Mais φ est bilinéaire symétrique, on l'admet ou on considère qu'il s'agit d'une extension des propriétés du cours ; la démonstration est la même.

Ce qui donne : $g(\lambda) = q\left(M - \lambda I\right) = \varphi\left(M - \lambda I, M - \lambda I\right) = \underbrace{\varphi\left(M,M\right)}_{=q(M)} - 2\lambda\,\varphi\left(M,I\right) + \lambda^2 \underbrace{\varphi\left(I,I\right)}_{=q(I)=1}$.

Enfin, $g(\lambda) = q\left(M\right) - 2\lambda\,\varphi\left(M,I\right) + \lambda^2$.

$g(\lambda)=0 \Leftrightarrow q\,(M-\lambda I)=0 \Leftrightarrow M-\lambda I$ non inversible $\Leftrightarrow \lambda$ valeur propre de M.
Les racines de g sont les valeurs propres de M.
Ainsi g et le polynôme caractéristique de M ont les mêmes racines et même terme de plus haut degré, ils sont égaux. Ils ont donc le même terme constant, ce qui donne : $q\,(M)=\det(M)$.

II.G -

II.G.1) Il suffit de prendre M non trigonalisable, c'est à dire dont le polynôme caractéristique n'est pas scindé. Par exemple $M=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ dont le polynôme caractéristique est : $\lambda^2-2\lambda+2>0$.

II.G.2) On a : $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -c & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix}$, ce qui revient à remplacer la deuxième ligne par a fois la deuxième moins c fois la première.

$$\underbrace{q\left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix}\right)}_{\text{égal au déterminant}}=q\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -c & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right)=\underbrace{q\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -c & a \end{pmatrix}\right)}_{\text{égal au déterminant}}q\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right)$$

D'où : $a\,(ad-bc)=a\,q\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right)$ et $a\neq 0$ donnent : $q\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right)=ad-bc$.
Si $a\neq 0$, q est encore le déterminant.

II.G.3) Dans le cas où $a=0$ et $c\neq 0$: $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} c & b+d \\ c & d \end{pmatrix}$.

Ce qui donne $\underbrace{q\left(\begin{pmatrix} c & b+d \\ c & d \end{pmatrix}\right)}_{=cd-c(b+d)}=q\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & b \\ c & d \end{pmatrix}\right)=\underbrace{q\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)}_{=1}q\left(\begin{pmatrix} 0 & b \\ c & d \end{pmatrix}\right)$,

$q\left(\begin{pmatrix} 0 & b \\ c & d \end{pmatrix}\right)=-cb$, q est encore le déterminant.

II.G.4) Il ne reste que le cas où $a=c=0$, mais alors M n'est pas inversible, donc $q\,(M)=0$ et d'autre part, on a aussi $\det(M)=0$.

Finalement, q n'est que le déterminant : $q\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right)=ad-bc$.

III Etude d'une surface

III.A $M=\begin{pmatrix} x & \frac{z}{\sqrt{2}} \\ \frac{z}{\sqrt{2}} & y \end{pmatrix}$, $\det(M)=xy-\dfrac{z^2}{2}=k$ est bien l'équation d'une quadrique.

III.B Comme $k=0$, on a comme équation : $xy-\dfrac{z^2}{2}=0$. On reconnait l'équation d'un cône de sommet O.

III.B.1) Par $M_0\neq O$, il passe la génératrice (OM_0) tracée sur le cône. En paramétriques : $\begin{cases} x=\lambda\,x_0 \\ y=\lambda\,y_0 \\ z=\lambda\,z_0 \end{cases}$

III.B.2) En $M_0\neq O$, le gradient est $\begin{pmatrix} y_0 \\ x_0 \\ -z_0 \end{pmatrix}$ qui est bien non nul, le plan tangent est donc d'équation :

$(x-x_0)\,y_0+(y-y_0)\,x_0-(z-z_0)\,z_0=0$, ou encore, comme $M_0\in\Gamma_0$, $x\,y_0+y\,x_0-z\,z_0=0$.

Ce plan contient bien la génératrice car il contient M_0 et O.

III.C Comme $k = -1$, on a comme équation : $xy - \dfrac{z^2}{2} = -1$.

III.C.1) On a $xy = -1 + \dfrac{z^2}{2}$, c'est à dire que, quand z varie, xy prend toutes les valeurs supérieures ou égales à -1. La projection orthogonale de Γ_{-1} est donc l'espace du plan xOy situé, au sens large, entre les 2 branches de l'hyperbole d'équation $xy = -1$.

III.C.2) On a encore : $xy = -1 + \dfrac{z^2}{2}$, si $x \neq 0$, on a toujours une valeur de y qui permet d'obtenir le point de coordonnées (x, z) dans la projection.
Si $x = 0$, les seules valeurs possibles de z sont $\pm\sqrt{2}$, y est d'ailleurs quelconque dans ce cas.
La projection de Γ_{-1} sur le plan xOz est donc tout le plan, privé de l'axe Oz auquel il faut remettre les point de coordonnées $\big(0, \pm\sqrt{2}\big)$.

III.C.3) Compte tenu de la remarque faite à la question précédente, les droites : $\begin{cases} x = 0 \\ z = \sqrt{2} \end{cases}$ et $\begin{cases} x = 0 \\ z = -\sqrt{2} \end{cases}$ sont parallèles et tracées sur Γ_{-1}.

III.D Equation réduite

III.D.1) La matrice de la forme quadratique est : $\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

Son polynôme caractéristique est : $\left(\lambda^2 - \dfrac{1}{4}\right)\left(-\lambda - \dfrac{1}{2}\right)$.

Les valeurs propres sont donc : $-\dfrac{1}{2}$ qui est double et $\dfrac{1}{2}$ qui est simple.

Dans un repère orthonormal de même origine et de vecteurs propres, en commençant par un vecteur propre correspondant à la valeur propre $\dfrac{1}{2}$, l'équation devient : $\dfrac{X^2}{2} - \dfrac{Y^2}{2} - \dfrac{Z^2}{2} = k$.

E_3 est bien propre pour la valeur propre $-\dfrac{1}{2}$.

Le premier vecteur U est normé et propre pour $\lambda = \dfrac{1}{2}$. On obtient $x = y$ et $z = 0$.

Par exemple $U = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$.

Le second vecteur est normé et orthogonal à U et à E_3, par exemple $V = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$.

On a ici en fait un nouveau repère direct, tourné de $\dfrac{\pi}{4}$ par rapport à Oz.

III.D.2) La quadrique est toujours de révolution. Si $k > 0$, on a un hyperboloïde à 2 nappes, si $k < 0$, on a un hyperboloïde à 1 nappe et si $k = 0$, on a le cône déjà étudié.

IV Applications Φ

IV.A Propriété **P**

IV.A.1) -

a) Φ est bijective donc il existe M telle que $\Phi(M) = I$.
$\Phi(I\,M) = \Phi(I)\,\Phi(M) = \Phi(I) = \Phi(M) = I$.

b) Si M est symétrique, $\Phi({}^tM) = \Phi(M) = {}^t(\Phi(M))$, d'où $\Phi(M)$ est aussi symétrique.
Ceci prouve que $\Phi(S_2) \subset S_2$, et comme Φ est linéaire et bijective en dimension finie, $\Phi(S_2)$ et S_2 ont la même dimension, finalement $\Phi(S_2) = S_2$.

c) ${}^tE_4 = -E_4$, donc $\Phi({}^tE_4) = \Phi(-E_4) = -\Phi(E_4) = {}^t(\Phi(E_4))$, $\Phi(E_4)$ est donc antisymétrique, colinéaire à E_4.
$\Phi(E_4) = \lambda\,E_4$, mais $E_4^2 = -\dfrac{1}{2}I$ et $\Phi\left(E_4^2\right) = \Phi(E_4)^2 = \Phi\left(-\dfrac{1}{2}I\right) = -\dfrac{1}{2}I = \lambda^2\,E_4^2 = -\dfrac{\lambda^2}{2}I$ ce qui prouve que $\lambda^2 = 1$.
Finalement : $\Phi(E_4) = \pm E_4$.

IV.A.2) Si M est inversible : $\Phi(I) = I = \Phi\left(M\,M^{-1}\right) = \Phi(M)\,\Phi\left(M^{-1}\right)$ ce qui prouve que $\Phi(M)$ est inversible.
Si $\Phi(M)$ est inversible, comme Φ est bijective, soit M' telle que $\Phi(M') = \Phi(M)^{-1}$, alors $\Phi(M\,M') = \Phi(M)\,\Phi(M') = \Phi(M)\,\Phi(M)^{-1} = I$. Et comme encore une fois Φ est bijective, $M\,M' = I$ et donc M est inversible.
On a bien l'équivalence demandée. De plus : $\Phi\left(M^{-1}\right) = \Phi(M)^{-1}$.
$M \in \Gamma_0 \Leftrightarrow \det M = 0 \Leftrightarrow M$ non inversible $\Leftrightarrow \Phi(M)$ non inversible $\Leftrightarrow \det(\Phi(M)) = 0$
Ce qui donne : $M \in \Gamma_0 \Leftrightarrow \Phi(M) \in \Gamma_0$.
Finalement : $\Phi(\Gamma_0) = \Gamma_0$.

IV.B Exemple

IV.B.1) Φ_A est clairement linéaire et $\Phi_A(I) = I = A\,I\,A = A^2$. On a la condition nécessaire, il faut montrer que $A^2 = I$ est suffisante.
A est donc inversible et Ψ_A définie par $\Psi_A(M) = A^{-1}\,M\,A^{-1}$ verifie clairement $\Psi_A \circ \Phi_A(M) = M$, c'est à dire $\Psi_A \circ \Phi_A = I$ et enfin Φ_A est bijective.
On a facilement : $\Phi_A(M)\,\Phi_A(M') = AMAAM'A = AMM'A = \Phi_A(MM')$.
A est symétrique donc : $\Phi_A({}^tM) = A\,{}^tMA = {}^tA\,{}^tM\,{}^tA = {}^t(AMA) = {}^t\Phi_A(M)$.
Φ_A vérifie bien la propriété **P**.

IV.B.2) $A^2 = I$ et $A = {}^tA$ donc $A\,{}^tA = I$, ce qui prouve que A est orthogonale.
A est orthogonale et symétrique, c'est donc la matrice d'une symétrie orthogonale :

- matrice de l'identité ou de moins l'identité, ce qui est impossible ici car contraire aux hypothèses, ou
- la matrice d'une symétrie orthogonale par rapport à une droite, de la forme $\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$.

On aurait aussi pu travailler avec $\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ et $\begin{cases} ab + bc = 0 \\ a^2 + b^2 = 1 \\ b^2 + c^2 = 1 \end{cases}$

On en tire $a^2 = c^2$ ou $a = \pm c$.
$a = c$ donne $b = 0$ et $a = \pm 1$, c'est à dire l'identité ou moins l'identité.
Pour $a = -c$, on pose $a = \cos\theta$ et $b = \sin\theta$ qui donne la matrice de la symétrie othogonale déjà précisée.

$$\Phi_A(E_4) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

$$\Phi_A(E_4) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin\theta & -\cos\theta \\ -\cos\theta & -\sin\theta \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -E_4.$$

IV.B.3) $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} = \cos\theta\,(E_1 - E_2) + \sqrt{2}\sin\theta\, E_3 = \sqrt{2}\left(\cos\theta\,\underbrace{\frac{E_1 - E_2}{\sqrt{2}}}_{\text{normé}} + \sin\theta\, E_3\right).$

Les deux matrices-vecteurs $\dfrac{E_1 - E_2}{\sqrt{2}}$ et E_3 sont normés et orthogonaux.

A décrit donc le cercle du plan $\left(O, \frac{E_1 - E_2}{\sqrt{2}}, E_3\right)$ de centre O et de rayon $\sqrt{2}$.

IV.B.4) $\|\Phi_A(M)\|^2 = \operatorname{tr}(\Phi_A(M)\ {}^t\Phi_A(M)) = \operatorname{tr}(AMA\,{}^tA\,{}^tM\,{}^tA) = \operatorname{tr}(AM\,{}^tM\,{}^tA)$
$= \operatorname{tr}((AM\,{}^tM)\,A) = \operatorname{tr}(A\,(AM\,{}^tM)) = \operatorname{tr}(M\,{}^tM) = \|M\|^2.$

Ceci prouve que Φ_A conserve la norme et est donc une isométrie.

Par ailleurs, $\Phi_A \circ \Phi_A(M) = A\,AMA\,A = M$, c'est à dire Φ_A est une symétrie.

Φ_A est donc une symétrie orthogonale.

IV.B.5) Restriction de Φ_A à S_2 qui est de dimension 3.

a) $\Phi_A(A) = AAA = A$ et $\Phi_A(I) = I$, le plan engendré par A et I est invariant.
Dans la base orthonormale (E_1, E_2, E_3) de S_2,

A a pour coordonnées $\begin{pmatrix} \cos\theta \\ -\cos\theta \\ \sqrt{2}\sin\theta \end{pmatrix}$ et I : $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$,

un vecteur normal à ces deux vecteurs a (par exemple) pour coordonnées : $\begin{pmatrix} -\sqrt{2}\sin\theta \\ \sqrt{2}\sin\theta \\ 2\cos\theta \end{pmatrix}$,

qui est l'écriture dans la base donnée de : $\begin{pmatrix} -\sqrt{2}\sin\theta & \sqrt{2}\cos\theta \\ \sqrt{2}\cos\theta & \sqrt{2}\sin\theta \end{pmatrix}$.

$$\Phi_A\left(\begin{pmatrix} -\sqrt{2}\sin\theta & \sqrt{2}\cos\theta \\ \sqrt{2}\cos\theta & \sqrt{2}\sin\theta \end{pmatrix}\right)$$
$$= \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\sqrt{2}\sin\theta & \sqrt{2}\cos\theta \\ \sqrt{2}\cos\theta & \sqrt{2}\sin\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$$
$$= \sqrt{2}\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2}\sin\theta & -\sqrt{2}\cos\theta \\ -\sqrt{2}\cos\theta & -\sqrt{2}\sin\theta \end{pmatrix}$$
$$= -\begin{pmatrix} -\sqrt{2}\sin\theta & \sqrt{2}\cos\theta \\ \sqrt{2}\cos\theta & \sqrt{2}\sin\theta \end{pmatrix}.$$

Ce vecteur-matrice est transformé en son opposé.
Φ_A est donc la symétrie orthogonale par rapport au plan engendré par A et I.

b) $$\Phi_A(E_1) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos^2\theta & \cos\theta\sin\theta \\ \cos\theta\sin\theta & \sin^2\theta \end{pmatrix}$$
$$\Phi_A(E_2) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin^2\theta & -\cos\theta\sin\theta \\ -\cos\theta\sin\theta & \cos^2\theta \end{pmatrix}$$
$$\Phi_A(U) = \Phi_A\left(\frac{E_1 + E_2}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{E_1 + E_2}{\sqrt{2}} = U$$

$$\Phi_A(V) = \Phi_A\left(\frac{E_1 - E_2}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \cos^2\theta - \sin^2\theta & 2\cos\theta\sin\theta \\ 2\cos\theta\sin\theta & -\cos^2\theta + \sin^2\theta \end{pmatrix}$$

$$= \cos 2\theta\,\frac{E_1 - E_2}{\sqrt{2}} + \sin 2\theta\, E_3 = \cos 2\theta\, V + \sin 2\theta\, E_3$$

$$\Phi_A(E_3) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sin\theta & -\cos\theta \\ \cos\theta & \sin\theta \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 2\cos\theta\sin\theta & -\cos^2\theta + \sin^2\theta \\ -\cos^2\theta + \sin^2\theta & -2\cos\theta\sin\theta \end{pmatrix}$$

$$= \sin 2\theta\,\frac{E_1 - E_2}{\sqrt{2}} - \cos 2\theta\, E_3 = \sin 2\theta\, V - \cos 2\theta\, E_3$$

La matrice de Φ_A dans la base (U, V, E_3) est donc : $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ 0 & \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{pmatrix}$.

IV.C Retour au cas général

IV.C.1) Φ est linéaire donc les coefficients de $\Phi(M)$ sont des formes linéaires des coefficients de M et $\det \circ \Phi(M)$ est une forme quadratique, (polynôme homogène de degré 2), des coefficients de M. c'est à dire que $\det \circ \Phi \circ \Psi$ est une forme quadratique.

Elle est non nulle car $\Phi(I) = I$ et $\det \circ \Phi(I) = 1$.

IV.C.2) $\det \circ \Phi$ est une forme quadratique non nulle qui vérifie la propriété (1) de la partie II car Φ vérifie **P**.

Vérifions : $\det(\Phi(MM')) = \det(\Phi(M)\Phi(M')) = \det(\Phi(M))\det(\Phi(M'))$.

En utilisant le résultat final de la partie II, $\det \circ \Phi$ est le déterminant.

Enfin $M \in \Gamma_k \Leftrightarrow \det M = k \Leftrightarrow \det(\Phi(M)) = k \Leftrightarrow \Phi(M) \in \Gamma_k$.

IV.C.3) $U \,//\, I$ et $\Phi(I) = I$ donc $\Phi(U) = U$.

Si M est symétrique, $\Phi(M)$ est symétrique donc $\Phi(S_2) \subset S_2$. Φ est bijective et on est en dimension finie donc $\Phi(S_2) = S_2$.

$\Phi({}^tE_4) = \Phi(-E_4) = -\Phi(E_4) = {}^t\Phi(E_4)$ donc $\Phi(E_4)$ est antisymétrique.

Ce qui donne : $E_4 \in S_2^\perp \Rightarrow \Phi(E_4) \in S_2^\perp$ qui est de dimension 1 donc $\Phi(E_4) = \lambda\, E_4$.

$\Phi\left(E_4^2\right) = \Phi\left(-\frac{1}{2}I\right) = -\frac{1}{2}I = \Phi(E_4)^2 = \lambda^2 E_4^2 = -\frac{1}{2}\lambda^2 I$ d'où $\lambda^2 = 1$.

On a bien : $\Phi(E_4) = \varepsilon\, E_4$ avec $\varepsilon = \pm 1$.

La matrice de Φ dans la base **B** est donc de la forme : $\begin{pmatrix} 1 & u & v & 0 \\ 0 & \alpha & \gamma & 0 \\ 0 & \beta & \delta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon \end{pmatrix}$.

On prend la matrice M de coordonnées dans cette base : $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$, les coordonnées de $\Phi(M)$ sont donc : $\begin{pmatrix} a + bu + cv \\ \alpha b + \gamma c \\ \beta b + \delta c \\ \varepsilon d \end{pmatrix}$.

$$M=\begin{pmatrix}\dfrac{a+b}{\sqrt{2}} & \dfrac{c+d}{\sqrt{2}}\\ \dfrac{c-d}{\sqrt{2}} & \dfrac{a-b}{\sqrt{2}}\end{pmatrix} \text{ et } \det M=\frac{a^2-b^2-c^2+d^2}{2},$$

et $\det\left(\Phi\left(M\right)\right)=\dfrac{\left(a+bu+cv\right)^2-\left(\alpha b+\gamma c\right)^2-\left(\beta b+\delta c\right)^2+d^2}{2}=\det M=\dfrac{a^2-b^2-c^2+d^2}{2}$ pour toutes les valeurs de a,b,c,d.

Ce qui donne : $u=0$ et $v=0$ pour les termes en ab et ac.

On arrive maintenant à $\left(\alpha b+\gamma c\right)^2+\left(\beta b+\delta c\right)^2=b^2+c^2$ pour tous les b et c.

Ce qui donne : $\begin{cases}\alpha^2+\beta^2=1\\ \gamma^2+\delta^2=1\\ \alpha\gamma+\beta\delta=0\end{cases}$ ou encore $\begin{pmatrix}\alpha & \gamma\\ \beta & \delta\end{pmatrix}$ est orthogonale.

C'est donc soit une matrice de rotation, $\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$,

soit une matrice de symétrie orthogonale, $\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ \sin\theta & -\cos\theta\end{pmatrix}$.

Dans tous les cas $\begin{pmatrix}\alpha & \gamma\\ \beta & \delta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta & \varepsilon'\sin\theta\\ \sin\theta & -\varepsilon'\cos\theta\end{pmatrix}$ avec $\varepsilon'=\pm1$.

La matrice de Φ dans la base $\mathbf{B}$ a bien la forme indiquée.

IV.C.4) $\varepsilon'=1$

a) Montrons que si Φ et Φ_A vérifient la propriété $\mathbf{P}$, alors $\Phi\circ\Phi_A$ la vérifie aussi.
Tout d'abord : $\Phi\left(\Phi_A\left(M\,M'\right)\right)=\Phi\left(\Phi_A\left(M\right)\,\Phi_A\left(M'\right)\right)=\Phi\left(\Phi_A\left(M\right)\right)\,\Phi\left(\Phi_A\left(M'\right)\right)$,
et ensuite : $\Phi\left(\Phi_A\left({}^tM\right)\right)=\Phi\left({}^t\Phi_A\left(M\right)\right)={}^t\Phi\left(\Phi_A\left(M\right)\right)$, ce qui assure la propriété car $\Phi\circ\Phi_A$ est clairement linéaire et bijective.
La propriété démontrée ici est en fait très générale. On la réutilisera à la question suivante.

b) On cherche maintenant la matrice de la transposition dans $\mathbf{B}$.
$M=\begin{pmatrix}\dfrac{a+b}{\sqrt{2}} & \dfrac{c+d}{\sqrt{2}}\\ \dfrac{c-d}{\sqrt{2}} & \dfrac{a-b}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$ est de transposée ${}^tM=\begin{pmatrix}\dfrac{a+b}{\sqrt{2}} & \dfrac{c-d}{\sqrt{2}}\\ \dfrac{c+d}{\sqrt{2}} & \dfrac{a-b}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$, la matrice cherchée associe donc le vecteur $\begin{pmatrix}a\\ b\\ c\\ -d\end{pmatrix}$ au vecteur $\begin{pmatrix}a\\ b\\ c\\ d\end{pmatrix}$. C'est donc : $\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix}$.
Toujours dans la base $\mathbf{B}$, $\Phi\circ\Phi_A$ a pour matrice :
$$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&\cos\theta&\sin\theta&0\\0&\sin\theta&-\cos\theta&0\\0&0&0&\varepsilon\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&\cos\theta&\sin\theta&0\\0&\sin\theta&-\cos\theta&0\\0&0&0&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&-\varepsilon\end{pmatrix}.$$
Ce qui prouve que $\Phi\circ\Phi_A$ est soit l'identité, soit la transposition.
Mais la transposition ne vérifie pas la deuxième ligne de la définition de $\mathbf{P}$, donc $\Phi\circ\Phi_A$ est l'identité et $\varepsilon=-1$.
Enfin, $\Phi=\Phi_A^{-1}=\Phi_A$.

IV.C.5) On prend maintenant $\varepsilon'=-1$ et on cherche la matrice de $\Phi\circ\Phi_A$, toujours dans la base $\mathbf{B}$.

C'est : $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \varepsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ 0 & \sin\theta & -\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 2\theta & \sin 2\theta & 0 \\ 0 & \sin 2\theta & -\cos 2\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\varepsilon \end{pmatrix}$.

Mais cette matrice, en utilisant la question pécédente est celle de Φ_B en changeant θ en 2θ. Cette fois ci, ε vaut 1.

Ce qui donne $\Phi \circ \Phi_A = \Phi_B$ ou encore $\Phi = \Phi_B \circ \Phi_A^{-1} = \Phi_B \circ \Phi_A$.

Fin du corrigé.

Auteur : Christophe Caignaert, Lycée Colbert, Parvis Colbert 59200 Tourcoing.

http://c.caignaert.free.fr