MATHÉMATIQUES I

Notation : $C(I,\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des applications continues sur l'intervalle I, à valeurs réelles. On écrira indifféremment un polynôme P ou $P(X)$ et on identifiera un polynôme et la fonction polynomiale associée.

Les trois parties sont indépendantes. Seules les questions III.B.1) et III.C.5) dépendent des parties précédentes.

Partie I -

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note f_n l'application définie pour $x \in [-1,1]$ par :

$$f_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}}\cos(n\operatorname{Arc}\cos x)$$

I.A -

I.A.1) Montrer que f_n est une application polynomiale de degré n et à coefficients réels.

On pourra, par exemple, poser $\theta = \operatorname{Arc}\cos x$ et exprimer $\cos n\theta$ en fonction de puissances entières de $\cos\theta$, en raisonnant par récurrence.

Dans toute la suite de la Partie I, pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note T_n le polynôme associé à la fonction polynomiale f_n ce qui signifie, par exemple, que si

$$f_n(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0, \ \ alors \ \ T_n(X) = a_n X^n + \ldots + a_1 X + a_0 .$$

Par ailleurs, pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $P_n = 2^{n-1}T_n$.

I.A.2) Déterminer le terme de degré n du polynôme T_n.

I.A.3) Calculer T_1, T_2, T_3, T_4.

I.A.4) Montrer que, pour tout entier $n \geq 2$: $P_{n+1} + P_{n-1} = 2XP_n$.

I.A.5) Montrer que les racines de P_n sont :

$$x_k = \cos\left(\frac{2k-1}{2n}\pi\right), \quad \text{avec } 1 \leq k \leq n$$

et qu'elles sont simples.

I.A.6) Montrer qu'il y a $n+1$ points x'_k du segment $[-1,1]$ où la fonction f_n atteint un extrémum absolu. Déterminer cet extrémum.

Filière TSI

I.A.7) Écrire, dans un langage de programmation au choix du candidat, un algorithme permettant de calculer P_n pour tout $n \geq 1$.

I.B -

I.B.1) Tracer les courbes représentatives des fonctions f_1, f_2, f_3, f_4.

I.B.2) Montrer qu'il n'existe pas de polynôme P unitaire de degré n tel que

$$\sup_{-1 \leq x \leq 1} |P(x)| < \frac{1}{2^{n-1}}$$

(on pourra considérer le polynôme $T_n - P$ et utiliser les résultats précédents).

I.B.3) Établir que, pour tout polynôme unitaire P de degré n :

$$\sup_{-1 \leq x \leq 1} |f_n(x)| \leq \sup_{-1 \leq x \leq 1} |P(x)|$$

I.B.4) Soit $f \in C([-1,1], \mathbb{R})$. Montrer l'existence de l'intégrale $\int_{-1}^{1} \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx$.

I.B.5)

a) Montrer que l'application $(f,g) \mapsto \int_{-1}^{1} \frac{f(x)g(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx$ définit un produit scalaire sur $C([-1,1], \mathbb{R})$.

b) Montrer que la famille de fonctions $(h_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ avec $h_n(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} P_n(x)$ est une famille orthonormale pour le produit scalaire

(on peut utiliser un changement de variable du type $\theta = \operatorname{Arccos} x$ pour calculer certaines intégrales avec les justifications nécessaires).

Partie II -

Dans cette partie, le plan euclidien est rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}, \vec{j})$ et E est une partie fermée et bornée de ce plan, contenant une infinité de points. Pour A, B, C dans E, on note :

$$d(A, B) = AB, \quad d(A, B, C) = (AB \cdot AC \cdot BC)^{1/3}$$

$$d_2 = \sup_{(A,B) \in E^2} d(A, B), \quad d_3 = \sup_{(A,B,C) \in E^3} d(A, B, C)$$

II.A -

II.A.1) Montrer que l'application :

$$d : E \times E \to \mathbb{R}^+$$
$$(A,B) \mapsto d(A,B)$$

est continue sur $E \times E$ et en déduire que d_2 et d_3 sont bien définis dans $\mathbb{R}$.

II.A.2) Montrer que $d_3 \le d_2$.

II.A.3) Justifier que $d_3 = \sup\limits_{(A,B) \in E^2}\left(\sup\limits_{C \in E} d(A, B, C)\right)$.

II.B - Montrer que si E est un segment de longueur $a > 0$, alors $d_3 = \dfrac{a}{\sqrt[3]{4}}$.

II.C - On suppose à présent que E est le cercle $C(O, R)$ de centre l'origine et de rayon $R > 0$. L'angle polaire d'un point $M \in E$ est par définition l'angle $(\vec{i}, \overrightarrow{OM})$.

II.C.1) Montrer que si A, B sont deux points de E, dont les angles polaires ont pour mesures respectives α et β avec $0 \le \alpha < \beta \le 2\pi$, on a : $AB = 2R\sin\dfrac{\beta - \alpha}{2}$.

II.C.2) Soient $\alpha, \gamma \in [0,2\pi]$ fixés, avec $\alpha \le \gamma$.
Vérifier que la fonction, définie sur $[\alpha,\gamma]$, qui à β associe $\sin\dfrac{\beta - \alpha}{2}\sin\dfrac{\gamma - \beta}{2}$ atteint son maximum en $\beta = \dfrac{\alpha + \gamma}{2}$.

II.C.3) Étudier les variations sur $[0,1]$ de la fonction φ qui à $t \in [0,1]$ associe $\varphi(t) = t^3 \cdot \sqrt{1 - t^2}$.

II.C.4) Déduire de ce qui précède que $d_3 = \sqrt{3} \cdot R$.

Partie III -

Dans toute la partie III, E est le segment $[-1,1]$ de l'axe réel. Pour tout entier $n \ge 2$, on note :

$$D(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{1 \le i < j \le n} |x_j - x_i|, \quad D_n = \sup_{x_1, \ldots, x_n \in E} D(x_1, \ldots, x_n), \quad d_n = D_n^{\frac{2}{n(n-1)}}$$

III.A -

III.A.1) Montrer que pour tout $n \ge 2$, il existe $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1} \in E$ tels que $D_{n+1} = D(\lambda_1, \ldots, \lambda_{n+1})$.

III.A.2) Vérifier que $D_{n+1} \le |\lambda_2 - \lambda_1| \cdot |\lambda_3 - \lambda_1| \cdot \ldots \cdot |\lambda_{n+1} - \lambda_1| \cdot D_n$.

III.A.3) Vérifier que $D_{n+1}^{n+1} \le D_n^{n+1} D_{n+1}^2$ et en déduire que $D_{n+1}^{n-1} \le D_n^{n+1}$.

III.A.4) Montrer que la suite $(d_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente. On notera désormais $d = \lim_{n \to +\infty} d_n$.

Pour $n \geq 1$, on note $\mathscr{P}_n$ l'ensemble des polynômes unitaires de degré n.

On note pour $P \in \mathscr{P}_n$,

$$\mu(P) = \sup_{-1 \leq x \leq 1} |P(x)|, \quad \mu_n = \inf_{P \in \mathscr{P}_n} \mu(P), \quad m_n = \sqrt[n]{\mu_n}$$

III.B -

III.B.1) À l'aide de la question I.B.3, calculer m_n pour $n \geq 1$.

III.B.2) Montrer que la suite $(m_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente ; on pose $m = \lim_{n \to \infty} m_n$. Déterminer m.

III.B.3) Établir que si une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers ℓ, la suite

$$\left(\frac{u_1 + 2u_2 + \ldots + nu_n}{n(n+1)}\right)_{n \in \mathbb{N}^*} \text{ converge vers } \frac{\ell}{2}$$

(on pourra traiter le cas particulier $\ell = 0$ puis ramener le cas général à ce cas).

À tout élément $(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in E^{n+1}$, on associe le déterminant $V(x_1, \ldots, x_{n+1})$ dont on admet la valeur :

$$V(x_1, \ldots, x_{n+1}) = \begin{vmatrix} 1 & \ldots & 1 \\ x_1 & \ldots & x_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_1^{n-1} & \ldots & x_{n+1}^{n-1} \\ x_1^n & \ldots & x_{n+1}^n \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq i < j \leq n+1} (x_j - x_i)$$

III.C -

III.C.1) Démontrer que pour tout polynôme unitaire P de degré n, on a :

$$V(x_1, \ldots, x_{n+1}) = \begin{vmatrix} 1 & \ldots & 1 \\ x_1 & \ldots & x_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_1^{n-1} & \ldots & x_{n+1}^{n-1} \\ P(x_1) & \ldots & P(x_{n+1}) \end{vmatrix}$$

III.C.2) En développant le dernier déterminant par rapport à la dernière ligne, établir que :

$$d_{n+1}^{\frac{n(n+1)}{2}} \le (n+1)\, d_n^{\frac{n(n-1)}{2}}\, m_n^n$$

III.C.3) En considérant le polynôme particulier P, défini par :

$P(x) = (x - x_1)\dots(x - x_n)$, montrer que :

$$m_n^n \cdot d_n^{\frac{n(n-1)}{2}} \le d_{n+1}^{\frac{n(n+1)}{2}}$$

III.C.4) Déduire de ce qui précède que $m_n \le d_{n+1}$.

III.C.5) En utilisant les questions III.C.2, III.B.1 et III.B.3, montrer que $d \le m$ et conclure que $d = m = \frac{1}{2}$.

••• FIN •••
