Centrale TSI 2002 - Mathématiques 1
$\Delta\Delta\Delta\Delta\Delta$

Partie I

I.A.1. Posons $\theta = \arccos(x) \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = \cos(\theta) \\ \theta \in [0, \pi] \end{array} \right.$

$$\begin{aligned}
\forall x \in [-1,1],\ f_n(x) &= \frac{1}{2^{n-1}} \left(\operatorname{Re}(\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n\right) \\
&= \frac{1}{2^{n-1}} \operatorname{Re}\left(\sum_{k=0}^{n} C_n^k \cos^{n-k}(\theta)\, i^k \sin(\theta)^k\right) \\
&= \frac{1}{2^{n-1}} \left(\sum_{0\le 2k\le n} C_n^{2k} \cos^{n-2k}(\theta)(-1)^k \sin(\theta)^{2k}\right) \\
&= \frac{1}{2^{n-1}} \left(\sum_{0\le 2k\le n} C_n^{2k} \cos^{n-2k}(\theta)(-1)^k \left(1-\cos^2(\theta)\right)^k\right) \\
&= \frac{1}{2^{n-1}} \left(\sum_{0\le 2k\le n} C_n^{2k} x^{n-2k}\left(x^2-1\right)^k\right). \text{ Donc :}
\end{aligned}$$

<u>f_n est une application polynômiale à coefficients réels</u>. C'est une somme de termes de degré n et son coefficient dominant est $\dfrac{\sum_{0\le 2k\le n} C_n^{2k}}{2^{n-1}} \neq 0$, donc f_n est de degré n.

I.A.2. D'après ce qui précède, $T_n = \dfrac{1}{2^{n-1}} \left(\sum_{0\le 2k\le n} C_n^{2k} X^{n-2k}\left(X^2-1\right)^k\right)$ et $P_n = \sum_{0\le 2k\le n} C_n^{2k} X^{n-2k}\left(X^2-1\right)^k$

Le coefficient dominant de T_n est d'après la question précédente, $\dfrac{\sum_{0\le 2k\le n} C_n^{2k}}{2^{n-1}}$.

Or $\left\{ \begin{array}{l} (1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \\ (1-1)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (-1)^k \end{array} \right.$. En additionnant membre à membre, on obtient $\sum_{0\le 2k\le n} C_n^{2k} = 2^{n-1}$ et :

$$\boxed{T_n = X^n + R_n \text{ avec } d^\circ R_n \le n-1.}$$

I.A.3. $T_1 = \sum_{0\le 2k\le 1} C_1^{2k} x^{1-2k}\left(x^2-1\right)^k \Rightarrow$

$$\boxed{T_1 = X}$$

$$T_2 = \frac{1}{2}\left(\sum_{0\le 2k\le 2} C_2^{2k} x^{2-2k}\left(x^2-1\right)^k\right) = \frac{1}{2}\left(X^2 + X^2 - 1\right) \Rightarrow$$

$$\boxed{T_2 = X^2 - \frac{1}{2}}$$

$$T_3 = \frac{1}{2^2}\left(\sum_{0\le 2k\le 3} C_3^{2k} x^{3-2k}\left(x^2-1\right)^k\right) = \frac{1}{4}\left(X^3 + 3X\left(X^2-1\right)\right) \Rightarrow$$

$$\boxed{T_3 = X^3 - \frac{3}{4}X}$$

$$T_4 = \frac{1}{2^3}\left(\sum_{0\le 2k\le 4} C_4^{2k} x^{4-2k}\left(x^2-1\right)^k\right) = \frac{1}{8}\left(X^4 + 6X^2\left(X^2-1\right) + \left(X^2-1\right)^2\right) \Rightarrow$$

$$\boxed{T_4 = X^4 - X^2 + \frac{1}{8}}$$

I.A.4. $\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\}$, $\forall x \in [-1,1]$, posons $\theta = \arccos(x)$. On a alors :
$\cos((n+1)\theta) + \cos((n-1)\theta) = 2\cos(n\theta)\cos(\theta) \Rightarrow$
$2^n f_{n+1}(x) + 2^{n-2} f_{n-1}(x) = 2^n f_n(x)\, x \Rightarrow$
$P_{n+1}(x) + P_{n-1}(x) - 2P_n(x)\, x = 0$. D'où le polynôme $P_{n+1} + P_{n-1} - 2XP_n$ possède une infinité de racines et est donc nul :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\},\ P_{n+1} + P_{n-1} = 2XP_n}$$

I.A.5. Résolvons $f_n(x) = 0$.

$$\begin{aligned}
f_n(x) = 0 &\Leftrightarrow n\arccos(x) = \frac{\pi}{2}\ [\pi] \\
&\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z},\ \arccos(x) = \frac{(2k-1)\pi}{2n} \\
&\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z},\ x = \cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{2n}\right) \text{ et } \frac{(2k-1)\pi}{2n} \in [0,\pi] \\
&\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z},\ x = \cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{2n}\right) \text{ et } k \in \{1,...,n\}
\end{aligned}$$

La fonction cos étant strictement décroissante sur $[0,\pi]$, f_n possède n racines 2 à 2 distinctes.
Or $f_n(x) = 0 \Leftrightarrow P_n(x) = 0$. Donc :

$$\boxed{\text{les racines de } P_n \text{ sont les } x_k = \cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{2n}\right) \text{ où } k \in \{1,...,n\}}$$

et <u>elles sont 2 à 2 distinctes</u>.

I.A.6. L'on a $\forall x \in [-1,1]$, $|f_n(x)| \leq \dfrac{1}{2^{n-1}}$.

$$\begin{aligned}
\text{Résolvons } |f_n(x)| = \frac{1}{2^{n-1}} &\Leftrightarrow |\cos(n\arccos(x))| = 1 \\
&\Leftrightarrow n\arccos(x) = 0\ [\pi] \\
&\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z},\ \arccos(x) = \frac{k\pi}{n} \\
&\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z},\ x = \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right) \text{ et } \frac{k\pi}{n} \in [0,\pi] \\
&\Leftrightarrow \exists k \in \{0,1,...,n\},\ x = \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right).
\end{aligned}$$

Posons $x'_k = \cos\left(\dfrac{k\pi}{n}\right)$.
Alors il existe $n+1$ points x'_k 2 à 2 distincts où la fonction f_n atteint un extrémum absolu. En outre

$$\begin{aligned}
f_n(x'_k) = f_n\left(\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right) &= \frac{1}{2^{n-1}}\cos\left(n\arccos\left(\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right)\right) \\
&= \frac{1}{2^{n-1}}\cos(k\pi) \\
&= \frac{(-1)^k}{2^{n-1}}.
\end{aligned}$$

D'où :

$$\boxed{\rightarrow \text{ si } k \in \{0,1,...,n\} \text{ et } k \text{ est pair, } f_n \text{ atteint un maximum absolu égal à } \frac{1}{2^{n-1}}}$$

$$\boxed{\rightarrow \text{ si } k \in \{0,1,...,n\} \text{ et } k \text{ est impair, } f_n \text{ atteint un minimum absolu égal à } -\frac{1}{2^{n-1}}}$$

I.A.7. La procédure R est récursive et $R(n)$ donne le $n-ième$ polynôme P_n.
$> R := proc(n)\ local\ A;$

$if\ n=0\ then\ A:=1\ else\ if\ n=1\ then\ A:=X\ else\ A:=2*X*R(n-1)-R(n-2)\ fi\ fi;$
$expand(A);$
$end;$

Affichage des 5 premiers polynômes P_n en posant $P_0=1$.

$>for\ i\ from\ 0\ to\ 4\ do\ P[i]=R(i)\ od;$

$$P[0]=1$$
$$P[1]=X$$
$$P[2]=2X^2-1$$
$$P[3]=4X^3-3X$$
$$P[4]=8X^4-8X^2+1$$

I.B.1. $f_1:\begin{array}{l}[-1,1]\to\mathbb{R}\\ x\to x\end{array}$. Sa représentation est le segment $[A,B]$ avec $A(-1,-1)$ et $B(1,1)$.

$f_2:\begin{array}{l}[-1,1]\to\mathbb{R}\\ x\to x^2-\dfrac{1}{2}\end{array}$. Sa représentation est une partie de parabole d'axe (Ox) et de sommet le point de coordonnées $\left(0,-\dfrac{1}{2}\right)$.

$f_3:\begin{array}{l}[-1,1]\to\mathbb{R}\\ x\to x^3-\dfrac{3}{4}x\end{array}$. f_3 est C^∞ sur $[-1,1]$, impaire et $\forall x\in[-1,1]$,

$f_3'(x)=3\left(x^2-\dfrac{1}{4}\right)=3\left(x-\dfrac{1}{2}\right)\left(x+\dfrac{1}{2}\right)$.

$f_4:\begin{array}{l}[-1,1]\to\mathbb{R}\\ x\to x^4-x^2+\dfrac{1}{8}\end{array}$. f_4 est C^∞ sur $[-1,1]$, paire et $\forall x\in[-1,1]$,

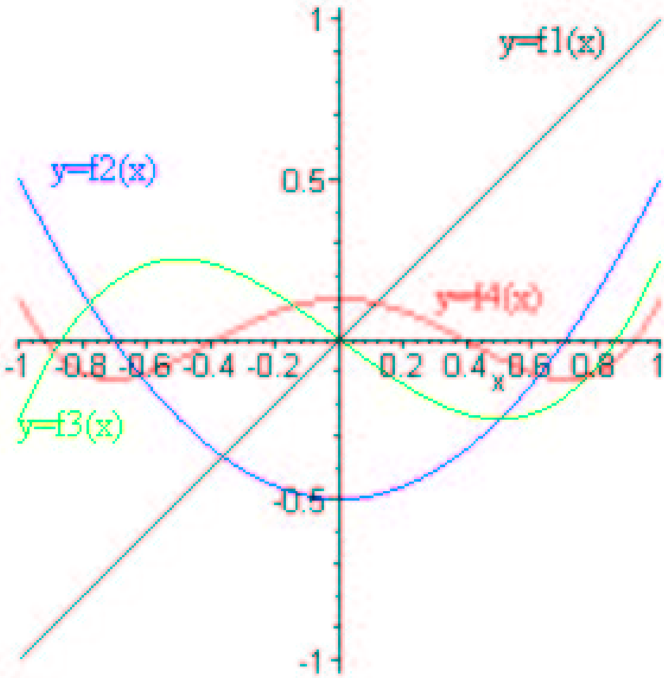
$f_4'(x)=4x^3-2x=4x\left(x^2-\dfrac{1}{2}\right)=4x\left(x-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(x+\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$

D'où les tableaux de variations :

x	0		$\frac{1}{2}$		1
$f_3'(x)$		$-$	0	$+$	
$f_3(x)$	0	$\searrow$	$-\frac{1}{4}$	$\nearrow$	$\frac{1}{4}$

x	0		$\frac{1}{\sqrt{2}}$		1
$f_4'(x)$	0	$-$	0	$+$	
$f_4(x)$	$\frac{1}{8}$	$\searrow$	$-\frac{1}{8}$	$\nearrow$	$\frac{1}{8}$

et les courbes représentatives :



I.B.2. L'on a vu dans I.A.6. que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\sup\limits_{x\in[-1,1]} |T_n(x)| = \dfrac{1}{2^{n-1}}$.

Soit P polynôme unitaire de degré n et $R_n = T_n - P$; alors $d°R_n \leq n-1$. Sous les notations de I.A.6., l'on sait que pour $x'_k = \cos\left(\dfrac{k\pi}{n}\right)$, $k \in \{0, ..., n\}$, T_n admet $\dfrac{1}{2^{n-1}}$, maximum absolu pour k pair et $-\dfrac{1}{2^{n-1}}$, minimum absolu pour k impair.

Supposons que $\sup\limits_{x\in[-1,1]} |P(x)| < \dfrac{1}{2^{n-1}}$.

On a alors pour k pair $R_n(x'_k) = T_n(x'_k) - P(x'_k) > 0$ et pour k impair, $R_n(x'_k) = T_n(x'_k) - P(x'_k) < 0$. Comme R_n est une fonction continue sur $[-1,1]$, $\forall k \in \{0, ..., n-1\}$, $\exists c_k \in \left]x'_{k+1}, x'_k\right[$ tel que $R_n(c_k) = 0$ (théorème des valeurs intermédiaires).

Les x'_k formant une suite strictement décroissante de $[-1,1]$, R_n possède donc au moins n racines distinctes : c_0, ..., c_{n-1}. Comme $d°R_n < n$, $R_n = 0$, ce qui prouve que $P = T_n$, ce qui est impossible puisque $\sup\limits_{x\in[-1,1]} |T_n(x)| = \dfrac{1}{2^{n-1}} \neq \sup\limits_{x\in[-1,1]} |P(x)|$. Donc :

$$\boxed{\text{Il n'existe pas de polynôme } P \text{ de degré } n\text{, unitaire, tel que } \sup_{x\in[-1,1]} |P(x)| < \frac{1}{2^{n-1}}.}$$

I.B.3. D'après la question précédente, si P est est un polynôme unitaire de degré n, $\sup\limits_{x\in[-1,1]} |P(x)| \geq \dfrac{1}{2^{n-1}} = \sup\limits_{x\in[-1,1]} |T_n(x)|$. Donc :

$$\boxed{\sup_{x\in[-1,1]} |f_n(x)| \leq \sup_{x\in[-1,1]} |P(x)|}$$

I.B.4. Notons $E = C([-1,1], \mathbb{R})$ et $f \in E$.

$$\begin{aligned}]-1,1[&\to \mathbb{R} \\ x &\to \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}} \end{aligned} \quad \text{est continue sur }]-1,1[$$

En outre, f est bornée sur $[-1,1]$ (car continue sur cet intervalle) et $\exists M\in\mathbb{R}^+$, $\forall x\in\,]-1,1[$, $\left|\dfrac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}}\right|\leq\dfrac{M}{\sqrt{1-x^2}}$. Comme $\int_{-1}^{1}\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$ converge (et vaut π),

$$\boxed{\int_{-1}^{1}\frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx \text{ converge}}$$

I.B.5.
a) Notons $\varphi:\begin{array}{l}E^2\to\mathbb{R}\\ (f,g)\to\int_{-1}^{1}\dfrac{f(x)g(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx\end{array}$.

φ est bien définie d'après I.B.4. appliquée à fg qui appartient à E.
φ est évidemment bilinéaire, le produit dans $\mathbb{R}$ l'étant et l'intégrale étant linéaire.
φ est évidemment symétrique, le produit dans $\mathbb{R}$ l'étant.
Soit $f\in E\setminus\{0\}$:
$\to \int_{-1}^{1}\dfrac{f(x)^2}{\sqrt{1-x^2}}dx\geq 0$ (intégrale d'une fonction positive)
$\to$ si $\int_{-1}^{1}\dfrac{f(x)^2}{\sqrt{1-x^2}}dx=0$, comme $x\to\dfrac{f(x)^2}{\sqrt{1-x^2}}$ est continue sur $]-1,1[$ et positive,
$\forall x\in\,]-1,1[\,,\ \dfrac{f(x)^2}{\sqrt{1-x^2}}=0\Rightarrow$
$\forall x\in\,]-1,1[\,,\ f(x)=0\Rightarrow$
$\forall x\in[-1,1]\,,\ f(x)=0$ (car f est continue sur $[-1,1]$). Donc : $\int_{-1}^{1}\dfrac{f(x)^2}{\sqrt{1-x^2}}dx>0$

On a montré que :

$$\boxed{\varphi \text{ est un produit scalaire sur } E}$$

b) On a alors $\forall m,n\in\mathbb{N}^*$, $\int_{-1}^{1}\dfrac{P_n(x)P_m(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx=\int_{-1}^{1}\dfrac{\cos(n\arccos(x))\cos(m\arccos(x))}{\sqrt{1-x^2}}dx$.

Effectuons le changement de variables $t=\arccos(x)\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{l}x=\cos(t)\\ t\in[0,\pi]\end{array}\right.$, ce qui est possible car $t\to\cos(t)$ est un difféomorphisme de classe C^1 de $]0,\pi[$ sur $]-1,1[$. On a alors :

$$\int_{-1}^{1}\frac{P_n(x)P_m(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx=\int_{\pi}^{0}\frac{\cos(nt)\cos(mt)}{\sin(t)}(-\sin(t))\,dt=\int_0^{\pi}\cos(nt)\cos(mt)\,dt$$

$$=\frac{1}{2}\left(\int_0^{\pi}\cos((m+n)t)\,dt+\int_0^{\pi}\cos((m-n)t)\,dt\right). \text{ D'où 2 cas :}$$

$\to$ si $m=n>0$, $\int_{-1}^{1}\dfrac{P_n(x)^2}{\sqrt{1-x^2}}dx=\dfrac{1}{2}\left(\int_0^{\pi}\cos(2nt)\,dt+\int_0^{\pi}dt\right)=\dfrac{\pi}{2}$

$\to$ si $m\neq n$, $\int_{-1}^{1}\dfrac{P_n(x)P_m(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx=\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{\sin((m+n)t)}{m+n}+\dfrac{\sin((m-n)t)}{m-n}\right]_0^{\pi}=0.$

Donc, la famille $(P_n)_{n\geq1}$ est orthogonale et pour le produit scalaire φ, $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\|P_n\|=\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$. On a montré que :

$$\boxed{\text{la famille } (h_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ est orthonormale}}$$

Partie II

II.A.1. d est la restriction à $E\times E$ de $\begin{array}{l}P^2\to\mathbb{R}\\ (A,B)\to\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}\end{array}$ (où P désigne le plan affine euclidien). En identifiant P^2 à $\mathbb{R}^4$ grâce au repère orthonormé direct $\left(O,\overrightarrow{i},\overrightarrow{j}\right)$, on obtient que <u>$d$ est continue sur E^2</u> comme composée d'applications continues sur leurs ensembles de définition.

(A noter que cette question est *hors-programme*, la notion de continuité n'ayant été abordée en Spé TSI qu'en un point de l'espace vectoriel normé $\mathbb{R}^n$)

E étant fermé, $E \times E$ est fermé (*hors-programme*).
Donc d continue sur $E \times E$, est bornée sur $E \times E$ et atteint ses bornes; d'où :

$$\boxed{d_2 = \sup_{(A,B)\in E^2} d(A,B) \text{ est bien définie}}$$

De même, $\begin{array}{l} P^3 \to \mathbb{R} \\ (A,B,C) \to (AB.AC.BC)^{1/3} \end{array}$ est continue sur P^3 (*hors-programme*) et :

$$\boxed{d_3 = \sup_{(A,B,C)\in E^3} d(A,B,C) \text{ est bien définie}}$$

car E^3 est un fermé (*hors-programme*)

II.A.2. $\forall (A,B,C) \in E^3,\ AB.AC.BC \leq d_2^3 \Rightarrow$
$(AB.AC.BC)^{1/3} \leq d_2$; d'où :

$$\boxed{d_3 \leq d_2}$$

II.A.3. Soit $(A,B) \in E^2$; alors $\forall C \in E,\ (AB.AC.BC)^{1/3} \leq d_3 \Rightarrow$
$\sup\limits_{C\in E} d(A,B,C) \leq d_3$ (définition de la borne supérieure : plus petit des majorants)

D'où : $\sup\limits_{(A,B)\in E^2} \left(\sup\limits_{C\in E} d(A,B,C) \right) \leq d_3$.

Soit $(A,B,C) \in E^3$, alors $d(A,B,C) \leq \sup\limits_{U\in E} d(A,B,U) \leq \sup\limits_{(V,W)\in E^2} \left(\sup\limits_{U\in E} d(V,W,U) \right)$

D'où : $d_3 \leq \sup\limits_{(V,W)\in E^2} \left(\sup\limits_{U\in E} d(V,W,U) \right)$ (définition de la borne supérieure : plus petit des majorants).
Donc :

$$\boxed{d_3 = \sup_{(A,B)\in E^2} \left(\sup_{C\in E} d(A,B,C) \right)}$$

II.B. On peut supposer A, B, C ordonnés sur un axe $\left(O, \overrightarrow{i}\right)$ d'abscisses respectives x, y, z avec $0 \leq x \leq y \leq z \leq a$. On a alors :
$AB.AC.BC = (y-x)(z-x)(y-z) = (y-x)\left(-z^2 + z(x+y) - xy\right)$.
On a alors $AB.AC.BC \leq az(a-z)$ car $y-x \leq a$, $z-x \leq z$ et $y-z \leq a-z$ et ces valeurs sont obtenues lorsque $x=0$ et $y=a$. Il reste à obtenir $\sup\limits_{z\in[0,a]} \varphi(z)$ où $\varphi : z \to az(a-z)$. Or $\forall z \in [0,a],\ \varphi'(z) = a^2 - 2az$ qui s'annule pour $z = \dfrac{a}{2}$, valeur correspondant à un maximum de φ. D'où $\sup\limits_{(A,B,C)\in E^3} AB.AC.BC = \dfrac{a^3}{4}$ et

$$\boxed{\sup_{(A,B,C)\in E^3} d(A,B,C) = \frac{a}{\sqrt[3]{2}}}$$

II.C.1. $AB = \sqrt{(R\cos\beta - R\cos\beta)^2 + (R\sin\beta - R\sin\beta)^2}$
$= R\sqrt{4\sin^2\dfrac{\beta+\alpha}{2}\sin^2\dfrac{\beta-\alpha}{2} + 4\cos^2\dfrac{\beta+\alpha}{2}\sin^2\dfrac{\beta-\alpha}{2}}$

$= 2R\left|\sin\dfrac{\beta-\alpha}{2}\right|\sqrt{\sin^2\dfrac{\beta+\alpha}{2}+\cos^2\dfrac{\beta+\alpha}{2}}$. D'où, comme $\dfrac{\beta-\alpha}{2}\in[0,\pi]$:

$$\boxed{AB = 2R\sin\frac{\beta-\alpha}{2}}$$

(On peut aussi facilement le constater sur une figure)

II.C.2. Soit $\varsigma : \begin{array}{l}[\alpha,\gamma]\to\mathbb{R}\\ \beta\to\sin\dfrac{\beta-\alpha}{2}\sin\dfrac{\gamma-\beta}{2}\end{array}$. ς est C^∞ sur $[\alpha,\gamma]$ et :

$$\begin{aligned}\forall\beta\in[\alpha,\gamma]\,,\ \varsigma'(\beta) &= \frac{1}{2}\left(\cos\frac{\beta-\alpha}{2}\sin\frac{\gamma-\beta}{2}-\sin\frac{\beta-\alpha}{2}\cos\frac{\gamma-\beta}{2}\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(\cos\frac{\beta-\alpha}{2}\sin\frac{\gamma-\beta}{2}-\sin\frac{\beta-\alpha}{2}\cos\frac{\gamma-\beta}{2}\right)\\ &= \frac{1}{2}\sin\frac{\gamma-2\beta+\alpha}{2}.\ \text{d'où :}\end{aligned}$$

$\forall\beta\in[\alpha,\gamma]\,,\ \varsigma'(\beta)=0\Leftrightarrow\dfrac{\gamma-2\beta+\alpha}{2}=0\text{ mod }\pi.$

Or $\dfrac{\gamma-2\beta+\alpha}{2}\in\left[\dfrac{\alpha-\gamma}{2},\dfrac{\gamma-\alpha}{2}\right]\subset[-\pi,\pi]$. On a donc :

$$\begin{aligned}\varsigma'(\beta)=0 &\Leftrightarrow \frac{\gamma-2\beta+\alpha}{2}=0\text{ ou }\left(\frac{\gamma-2\beta+\alpha}{2}=\pi\text{ et }\gamma=2\pi\text{ et }\alpha=0\right)\text{ou }\left(\frac{\gamma-2\beta+\alpha}{2}=-\pi\text{ et }\gamma=2\pi\text{ e}\right.\\ &\Leftrightarrow \beta=\frac{\gamma+\alpha}{2}\text{ ou }(\alpha=\beta=0\text{ et }\gamma=2\pi)\text{ou }(\alpha=0\text{ et }\beta=\gamma=2\pi)\end{aligned}$$

Dans les deux derniers cas : $\varsigma(\beta)=0$ et la valeur de β correspond à un minimum de ς.
Dans le premier cas, ς a pour tableau de variations :

β	α		$\dfrac{\gamma+\alpha}{2}$		γ
$\varsigma'(\beta)$		$-$	0	$+$	
$\varsigma(\beta)$	0	$\nearrow$	$\sin^2\dfrac{\gamma-\alpha}{4}$	$\searrow$	0

Donc, ς admet un maximum pour $\beta=\dfrac{\alpha+\gamma}{2}$.

II.C.3. φ est continue sur $[0,1]$ et C^∞ sur $[0,1[$.

$\forall t\in[0,1[\,,\ \varphi'(t)=3t^2\sqrt{1-t^2}-\dfrac{t^4}{\sqrt{1-t^2}}=\dfrac{-4t^4+3t^2}{\sqrt{1-t^2}}=\dfrac{-4t^2\left(t-\dfrac{\sqrt3}{2}\right)\left(t+\dfrac{\sqrt3}{2}\right)}{\sqrt{1-t^2}}$. D'où le tableau de variations :

t	0		$\dfrac{\sqrt3}{2}$		1
$\varphi'(t)$	0	$+$	0	$-$	$\Vert$
$\varphi(t)$	0	$\nearrow$	$\dfrac{3\sqrt3}{16}$	$\searrow$	0

II.C.4. D'après les questions II.A.3. et II.C.2., $d_3=\displaystyle\sup_{(\alpha,\gamma)\in[0,2\pi]}\left(8R^3\sin^2\frac{\gamma-\alpha}{4}\sin\frac{\gamma-\alpha}{2}\right)^{1/3}$

$$=\sup_{(\alpha,\gamma)\in[0,2\pi]}2^{4/3}R\left(\sin^3\frac{\gamma-\alpha}{4}\sqrt{1-\sin^2\frac{\gamma-\alpha}{4}}\right)^{1/3}$$

$= \sup_{t\in[0,1]} 2^{4/3}R\left(t^3\sqrt{1-t^2}\right)^{1/3}$ (car lorsque (α,γ) décrit $[0,2\pi]$ avec $\alpha\leq\gamma$, $\sin\dfrac{\gamma-\alpha}{4}$ décrit $[0,1]$)

$= 2^{4/3}R\left(\dfrac{3\sqrt{3}}{16}\right)^{1/3} = R\sqrt{3}$ obtenu pour $t=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, c'est à dire pour $\dfrac{\gamma-\alpha}{4}=\dfrac{\pi}{3}\Leftrightarrow\gamma=\alpha+\dfrac{4\pi}{3}$. Donc :

$$\boxed{d_3 = R\sqrt{3} \text{ (obtenu pour } \alpha,\beta,\gamma\in[0,2\pi]\,,\ \beta=\alpha+\frac{2\pi}{3} \text{ et } \gamma=\alpha+\frac{4\pi}{3})}$$

Partie III

III.A.1. $\begin{array}{ccc}[-1,1]^{n+1} & \overset{D_{n+1}}{\to} & \mathbb{R}\\ (\lambda_1,...,\lambda_{n+1}) & \to & \prod\limits_{1\leq i<j\leq n+1}|\lambda_j-\lambda_i|\end{array}$ est continue sur $[-1,1]^{n+1}$; elle est donc bornée (minorée par 0 et majorée par $2^{n(n-1)/2}$) et atteint ses bornes. D'où :

$$\boxed{\exists\,(\lambda_1,...,\lambda_{n+1})\in[-1,1]^{n+1}\,,\ D_{n+1}=D\left(\lambda_1,...,\lambda_{n+1}\right)}$$

IIIA.2. $D_{n+1} = \prod\limits_{1\leq i<j\leq n+1}|\lambda_j-\lambda_i|$
$= |\lambda_2-\lambda_1|\,|\lambda_2-\lambda_1|\cdot...\cdot|\lambda_{n+1}-\lambda_1|\prod\limits_{2\leq i<j\leq n+1}|\lambda_j-\lambda_i|$
$\leq |\lambda_2-\lambda_1|\,|\lambda_2-\lambda_1|\cdot...\cdot|\lambda_{n+1}-\lambda_1|\sup\limits_{2\leq i<j\leq n+1}D(x_2,...,x_{n+1})$. Donc :

$$\boxed{D_{n+1}\leq|\lambda_2-\lambda_1|\,|\lambda_2-\lambda_1|\cdot...\cdot|\lambda_{n+1}-\lambda_1|\cdot D_n}$$

IIIA.3. On a de même $\forall i\in\{1,...,n+1\}\,,\ D_{n+1}\leq\prod\limits_{1\leq j\leq n+1 \text{ et } j\neq i}|\lambda_j-\lambda_i|\cdot D_n$; Multiplions membre à membre ces $n+1$ inégalités de nombres positifs. On obtient :
$D_{n+1}^{n+1}\leq\prod\limits_{i=1}^{n+1}\left(\prod\limits_{j\in\{1,...,n+1\}\backslash\{i\}}|\lambda_j-\lambda_i|\right)D_n^{n+1}$. Or :
$\prod\limits_{i=1}^{n+1}\left(\prod\limits_{j\in\{1,...,n+1\}\backslash\{i\}}|\lambda_j-\lambda_i|\right)=\prod\limits_{(i,j)\in\{1,...,n+1\}\text{ et } i\neq j}|\lambda_j-\lambda_i|=\left(\prod\limits_{1\leq i<,j<n+1}|\lambda_j-\lambda_i|\right)^2$ (chaque élément $|\lambda_j-\lambda_i|$ pouvant être considéré comme coefficient d'une matrice de $S_{n+1}(\mathbb{R})$). D'où :

$$\boxed{D_{n+1}^{n+1}\leq D_{n+1}^2D_n^{n+1}}$$

Comme $D_{n+1}>0$ car si $x_1,...,x_{n+1}$ sont 2 à 2 distincts, $D(x_1,...,x_{n+1})>0$, on en déduit :

$$\boxed{D_{n+1}^{n-1}\leq D_n^{n+1}}$$

III.A.4. D'après la relation précédente :
$D_{n+1}^{n-1}\leq D_n^{n+1}\Rightarrow$
$D_{n+1}\leq D_n^{(n+1)/(n-1)}\Rightarrow$
$d_{n+1}=D_{n+1}^{2/(n(n+1))}\leq D_n^{2(n+1)/(n(n-1)(n+1))}\Rightarrow$
$d_{n+1}\leq D_n^{2/(n(n-1))}=d_n$.
Donc, la suite (d_n) est décroissante et minorée par 0 et la suite (d_n) converge.

III.B1. L'on a vu en I.B.3. que $\forall P \in \mathcal{P}_n$, $\sup\limits_{x\in[-1,1]} |P(x)| \geq \sup\limits_{x\in[-1,1]} |f_n(x)| = \sup\limits_{x\in[-1,1]} |T_n(x)| = \dfrac{1}{2^{n-1}}$.

Donc $\mu_n = \mu(T_n) = \dfrac{1}{2^{n-1}}$ et :

$$\boxed{m_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n-1}{n}}}$$

III.B.2. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\ln(m_n) = -\dfrac{n-1}{n}\ln(2)$ qui tend vers $-\ln(2)$ quand n tend vers $+\infty$. D'où :

$$\boxed{\text{la suite } (m_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ converge vers } \frac{1}{2}}$$

IIIB.3. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $M \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $n > M \Rightarrow |u_n - l| < \varepsilon$. On a alors, pour $n > M$,

$$\begin{aligned}
\left|\frac{u_1 + 2u_2 + ... + nu_n}{n(n+1)} - \frac{l}{2}\right| &= \frac{1}{2}\left|\frac{2}{n(n+1)}\left((u_1 + 2u_2 + ... + nu_n) - l(1 + 2 + ... + n)\right)\right| \\
&= \frac{1}{n(n+1)}\left|(u_1 - l) + 2(u_2 - l) + ... + n(u_n - l)\right| \\
&\leq \frac{1}{n(n+1)}\left(|u_1 - l| + 2|u_2 - l| + ... + n|u_n - l|\right) \\
&\leq \frac{1}{n(n+1)}\left(|u_1 - l| + 2|u_2 - l| + ... + M|u_M - l| + (M+1)\varepsilon + ... + n\varepsilon\right) \\
&\leq \frac{1}{n(n+1)}\left(|u_1 - l| + 2|u_2 - l| + ... + M|u_M - l| + \frac{n(n+1)}{2}\varepsilon\right)
\end{aligned}$$

(car $M + ... + n \leq \sum\limits_{k=1}^{n} k$)

Or $\exists N \in \mathbb{N}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $n > N \Rightarrow \dfrac{1}{n(n+1)}\left(|u_1 - l| + 2|u_2 - l| + ... + M|u_M - l|\right) < \dfrac{\varepsilon}{2}$

car $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n(n+1)}\left(|u_1 - l| + 2|u_2 - l| + ... + M|u_M - l|\right) = 0$. Donc, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $n > \max(M, N) \Rightarrow$ $\left|\dfrac{u_1 + 2u_2 + ... + nu_n}{n(n+1)} - \dfrac{l}{2}\right| < \varepsilon$. Cela montre :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \frac{u_1 + 2u_2 + ... + nu_n}{n(n+1)} = \frac{l}{2}}$$

III.C.1. Posons $P = X^n + \sum\limits_{k=0}^{n-1} a_k X^k$. Alors :

$$\begin{vmatrix} 1 & . \quad . \quad . & 1 \\ x_1 & & x_{n+1} \\ . & & . \\ x_1^{n-1} & & x_{n+1}^{n-1} \\ P(x_1) & . \quad . \quad . & P(x_{n+1}) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & . \quad . \quad . & 1 \\ x_1 & & x_{n+1} \\ . & & . \\ x_1^{n-1} & & x_{n+1}^{n-1} \\ x_1^n + \sum\limits_{k=0}^{n-1} a_k x_1^k & . \quad . \quad . & x_{n+1}^n + \sum\limits_{k=0}^{n-1} a_k x_{n+1}^k \end{vmatrix}$$

En ajoutant à la dernière ligne la combinaison linéaire $-\sum\limits_{k=1}^{n} a_{k-1} L_k$ où L_k désigne la $k-ième$ ligne, on obtient :

$$\begin{vmatrix} 1 & . \quad . \quad . & 1 \\ x_1 & & x_{n+1} \\ . & & . \\ x_1^{n-1} & & x_{n+1}^{n-1} \\ P(x_1) & . \quad . \quad . & P(x_{n+1}) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & . \quad . \quad . & 1 \\ x_1 & & x_{n+1} \\ . & & . \\ x_1^{n-1} & & x_{n+1}^{n-1} \\ x_1^n & . \quad . \quad . & x_{n+1}^n \end{vmatrix} = V(x_1, ..., x_{n+1}). \text{ Donc :}$$

$$\boxed{\begin{vmatrix} 1 & . & . & . & 1 \\ x_1 & & & & x_{n+1} \\ . & & & & . \\ x_1^{n-1} & & & & x_{n+1}^{n-1} \\ P(x_1) & . & . & . & P(x_{n+1}) \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq i < j \leq n+1} (x_j - x_i)}$$

III.C.2. Pour calculer $d_{n+1,}$ on peut supposer $\lambda_1 < \lambda_2 < ... < \lambda_{n+1}$. Donc :

$D_{n+1} = \prod_{1 \leq i < j \leq n+1} (\lambda_j - \lambda_i) = \begin{vmatrix} 1 & . & . & . & 1 \\ \lambda_1 & & & & \lambda_{n+1} \\ . & & & & . \\ \lambda_1^{n-1} & & & & \lambda_{n+1}^{n-1} \\ P(\lambda_1) & . & . & . & P(\lambda_{n+1}) \end{vmatrix}$. Or :

$$\begin{vmatrix} 1 & . & . & . & 1 \\ \lambda_1 & & & & \lambda_{n+1} \\ . & & & & . \\ \lambda_1^{n-1} & & & & \lambda_{n+1}^{n-1} \\ P(\lambda_1) & . & . & . & P(\lambda_{n+1}) \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^{n+1} P(\lambda_j)(-1)^{n+1+j} \begin{vmatrix} 1 & . & 1 & 1 & . & 1 \\ \lambda_1 & . & \lambda_{j-1} & \lambda_{j+1} & . & \lambda_{n+1} \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ \lambda_1^{n-1} & . & \lambda_{j-1}^{n-1} & \lambda_{j+1}^{n-1} & . & \lambda_{n+1}^{n-1} \end{vmatrix} \Rightarrow$$

En particulier, pour $P = T_n$ et en utilisant que :

$\begin{vmatrix} 1 & . & 1 & 1 & . & 1 \\ \lambda_1 & . & \lambda_{j-1} & \lambda_{j+1} & . & \lambda_{n+1} \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ \lambda_1^{n-1} & . & \lambda_{j-1}^{n-1} & \lambda_{j+1}^{n-1} & . & \lambda_{n+1}^{n-1} \end{vmatrix} = V(\lambda_1, .., \lambda_{j-1}, \lambda_{j+1}, .., \lambda_{n+1}) \leq D_n$, on a :

$D_{n+1} \leq \sum_{j=1}^{n+1} T_n(\lambda_j) D_n \Rightarrow$

$D_{n+1} \leq \sum_{j=1}^{n+1} \frac{1}{2^{n-1}} D_n \Leftrightarrow$

$D_{n+1} \leq \frac{(n+1) D_n}{2^{n-1}}$ et comme $D_n = d_n^{\frac{n(n-1)}{2}}$ et $m_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n-1}{n}}$, on obtient :

$$\boxed{d_{n+1}^{\frac{n(n+1)}{2}} \leq (n+1)\, d_n^{\frac{n(n-1)}{2}} m_n^n}$$

II.C.3. Soient $x_1, ..., x_{n+1} \in [-1, 1]$ avec $x_1 < ... < x_{n+1}$

$D(x_1, ..., x_{n+1}) = \prod_{1 \leq i < j \leq n+1} (x_j - x_i) = \begin{vmatrix} 1 & . & . & . & 1 \\ x_1 & & & & x_{n+1} \\ . & & & & . \\ x_1^{n-1} & & & & x_{n+1}^{n-1} \\ P(x_1) & . & . & . & P(x_{n+1}) \end{vmatrix}$ pour tout polynôme P unitaire de degré n.

Pour $P = (X - x_1) ... (X - x_n)$, on obtient :

$D(x_1, ..., x_{n+1}) = \begin{vmatrix} 1 & . & . & . & 1 \\ x_1 & & & & x_{n+1} \\ . & & & & . \\ x_1^{n-1} & & & & x_{n+1}^{n-1} \\ 0 & . & . & 0. & P(x_{n+1}) \end{vmatrix} = P(x_{n+1}) D(x_1, .., x_n) \Rightarrow$

$P(x_{n+1}) D(x_1, .., x_n) \leq D_{n+1} \Rightarrow$

$D(x_1, .., x_n) \leq \frac{D_{n+1}}{P(x_{n+1})}$. Cela étant vrai pour tous $x_1, ..., x_n \in [-1, 1]$ avec $x_1 < ... < x_n$, on a alors :

$\sup_{-1 \leq x_1 < .. < x_n \leq 1} D(x_1, .., x_n) \leq \frac{D_{n+1}}{P(x_{n+1})} \Leftrightarrow$

$D_n \leq \dfrac{D_{n+1}}{P\left(x_{n+1}\right)} \Leftrightarrow$

$P\left(x_{n+1}\right) \leq \dfrac{D_{n+1}}{D_n}$. Cela étant vrai pour tout $x_{n+1} \in [-1,1]$, on a alors :

$\sup\limits_{x_{n+1}\in[-1,1]} P\left(x_{n+1}\right) \leq \dfrac{D_{n+1}}{D_n}$. Or $\sup\limits_{x_{n+1}\in[-1,1]} P\left(x_{n+1}\right) \geq \dfrac{1}{2^{n-1}} = m_n^n$. D'où :

$m_n^n D_n \leq D_{n+1} \Leftrightarrow$

$$\boxed{m_n^n \cdot d_n^{\frac{n(n-1)}{2}} \leq d_{n+1}^{\frac{n(n+1)}{2}}}$$

III.C.4. L'on sait que (d_n) est décroissante. D'où , si $n \in \mathbb{N}^*$,

$m_n^n \cdot d_{n+1}^{\frac{n(n-1)}{2}} \leq m_n^n \cdot d_n^{\frac{n(n-1)}{2}} \leq d_{n+1}^{\frac{n(n+1)}{2}}$ car $u \to u^{\frac{n(n-1)}{2}}$ est croissante sur $\mathbb{R}^{+*}$. D'où :

$m_n^n \cdot d_{n+1}^{\frac{n(n-1)}{2}} \leq d_{n+1}^{\frac{n(n+1)}{2}}$

En divisant les 2 membres par $d_{n+1}^{\frac{n(n-1)}{2}} > 0$, on obtient :

$m_n^n \leq d_{n+1}^n \Rightarrow$

$$\boxed{m_n \leq d_{n+1}}$$

III.C.5. La question précédente montre, en faisant tendre n vers $+\infty$, que $m \leq d$ et que $d > 0$.

La question III.C.2. montre $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ d_{n+1}^{\frac{n(n+1)}{2}} \leq (n+1)\, d_n^{\frac{n(n-1)}{2}} m_n^n$.

D'où $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \dfrac{n(n+1)}{2} \ln d_{n+1} \leq \ln(n+1) + \dfrac{n(n-1)}{2} \ln d_n - (n-1)\ln 2 \Rightarrow$

$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ (n+1)\ln d_{n+1} \leq \dfrac{2\ln(n+1)}{n} + (n-1)\ln d_n - \dfrac{2(n-1)}{n}\ln 2 \Rightarrow$

$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum\limits_{k=1}^{n} (k+1)\ln d_{k+1} \leq \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{2\ln(k+1)}{k} + \sum\limits_{k=1}^{n} k\ln d_k - \sum\limits_{k=1}^{n} \ln d_k - \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{2(k-1)}{k}\ln 2 \Rightarrow$

$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sum\limits_{k=2}^{n+1} k\ln d_k \leq \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{2\ln(k+1)}{k} + \sum\limits_{k=1}^{n} k\ln d_k - \sum\limits_{k=1}^{n} \ln d_k - \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{2(k-1)}{k}\ln 2 \Rightarrow$

$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ (n+1)\ln d_{n+1} - \ln d_1 \leq \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{2\ln(k+1)}{k} - \sum\limits_{k=1}^{n} \ln d_k - 2n\ln 2 + \ln 2 \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{2}{k} \Rightarrow$

$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \dfrac{(n+1)\ln d_{n+1} - \ln d_1}{n} \leq \dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{2\ln(k+1)}{k} - \sum\limits_{k=1}^{n} \ln d_k - 2n\ln 2 + \ln 2 \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{2}{k}}{n}$.

Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{(n+1)\ln d_{n+1} - \ln d_1}{n} = \ln d,\ 0 \leq \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{2\ln(k+1)}{k} \leq \dfrac{2\ln(n+1)}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{2\ln^2 n}{n}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{2\ln(k+1)}{k} = 0$.

En outre, comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln d_n = \ln d$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n} \ln d_k}{n} = \ln d$ (convergence au sens de Césaro de $(\ln d_n)$) et enfin $\ln 2 \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{2}{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{2\ln 2}{\ln n}$ qui tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. D'où, on obtient :

$\ln d \leq -\ln d - 2\ln 2 \Leftrightarrow \ln d \leq -\ln 2$

$\Leftrightarrow d \leq \dfrac{1}{2} = m$. On a montré :

$$\boxed{d = m = \frac{1}{2}}$$

Remarque: je n'ai pas utilisé III.B.3.

∞∞∞∞∞∞∞∞∞∞∞∞∞∞∞∞∞∞∞

Rédigé par

Pierre Bron, professeur de Spéciales TSI
Lycée Chaptal, 6, *allée Chaptal*, 22000 *St Brieuc*
Tel. 0296639414
Adresse électronique : *BRON.Pierre@wanadoo.fr*

à l'aide de Scientific Workplace