Centrale TSI 2001 - Mathématiques 2
$\Delta\Delta\Delta\Delta\Delta$

Préliminaires

Soit λ valeur propre de A, symétrique positive, associée au vecteur propre $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Alors $X^*AX = \lambda X^*X = \lambda \|X\|^2$. Comme $\|X\|^2 > 0$ (car $X \neq 0$) et $X^*AX \geq 0$, on en déduit que $\lambda \geq 0$. A étant symétrique réelle, elle possède n valeurs propres réelles.

Donc une matrice symétrique réelle positive possède n valeurs propres réelles positives.

On montre de même que :
une matrice symétrique réelle définie positive possède n valeurs propres réelles strictement positives.

Partie I - Norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

I.A.. Posons , pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ . \\ x_n \end{pmatrix}$. Si $\|x\| = 1$,

$\forall i \in \{1,..,n\}$, $|(Ax)_i| = \left|\sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_k\right| \leq \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}^2\right)^{1/2} \underbrace{\left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right)^{1/2}}_{\|x\|=1} = \|L_i\|$. En posant L_i la $i-$*ième* ligne de la matrice A. Notons $M = \max_{i=1..n} L_i$.

Alors $\|Ax\| = \left(\sum_{k=1}^{n} (Ax)_i^2\right)^{1/2} \leq \left(\sum_{k=1}^{n} M^2\right)^{1/2} = M\sqrt{n}$. D'où :

$\sup_{\|x\|=1} \dfrac{\|Ax\|}{\|x\|}$ a bien un sens et on peut poser $N(A) = \sup_{\|x\|=1} \dfrac{\|Ax\|}{\|x\|} = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|$.

Pour $x \neq 0$, $\dfrac{x}{\|x\|}$ est de norme 1 et $\left\|\dfrac{Ax}{\|x\|}\right\| = \dfrac{\|Ax\|}{\|x\|} \leq N(A)$. Donc $\sup_{x\neq 0} \dfrac{\|Ax\|}{\|x\|}$ existe et vérifie $\sup_{x\neq 0} \dfrac{\|Ax\|}{\|x\|} \leq N(A)$ (car $\sup_{x\neq 0} \dfrac{\|Ax\|}{\|x\|}$ est le plus petit des majorants des $\dfrac{\|Ax\|}{\|x\|}$)

Si $\|x\| = 1$, $\dfrac{\|Ax\|}{\|x\|} \leq \sup_{y\neq 0} \dfrac{\|Ay\|}{\|y\|} \Rightarrow N(A) = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\| \leq \sup_{y\neq 0} \dfrac{\|Ay\|}{\|y\|}$ (là encore par définition de la borne supérieure). D'où :

$$\boxed{N(A) = \sup_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}}$$

D'où l'inégalité $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $\|Ax\| \leq N(A)\|x\|$.

I.B.

- Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Si $N(A) = 0$, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $\|Ax\| = 0 \Leftrightarrow Ax = 0$. l'endomorphisme canoniquement associé à A étant nul, $A = 0$.

- Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

Alors pour tout x de $\mathbb{R}^n$ de norme 1, $\|(\lambda A)x\| = |\lambda| \|Ax\| \Rightarrow$
$\sup_{\|x\|=1} \|(\lambda A)x\| = |\lambda| \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|$ et $N(\lambda A) = |\lambda| N(A)$

- Soient A et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Si $\|x\| = 1$, $\|(A+B)x\| = \|Ax + Bx\| \leq \|Ax\| + \|Bx\| \leq N(A) + N(B)$

D'où $N(A+B) \leq N(A) + N(B)$ ($N(A+B)$ est le plus petit des majorants des $\|(A+B)x\|$ pour $\|x\| = 1$)

On a montré que N est une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

En outre $\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $\|x\| = 1 \Rightarrow \|(AB)x\| = \|A(Bx)\| \leq N(A)\|Bx\| \leq N(A)N(B)$

D'où :

$$\boxed{N(AB) \leq N(A)N(B)}$$

I.C. Posons $x_i = \begin{pmatrix} 0 \\ . \\ 1 \\ . \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow i$ (pour $i = 1..n$). L'on a $\|x_i\| = 1$ et
$\|[c_1, ..., c_n]\, x_i\| = \|c_i\| \leq N\left([c_1, ..., c_n]\right)$. Donc :

$$\boxed{N\left([c_1, ..., c_n]\right) \geq \max_{i=1...n} \|c_i\|}$$

I.D. D'après $I.C.$, $N([0, ..., 0, v]) \geq \|v\|$.
En outre si $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ . \\ x_n \end{pmatrix}$ est de norme 1, $[0, ..., 0, v]\, x = \begin{pmatrix} v_1 x_n \\ . \\ v_n x_n \end{pmatrix} = x_n \begin{pmatrix} v_1 \\ . \\ v_n \end{pmatrix} = x_n v.$
D'où $\|[0, ..., 0, v]\, x\| = |x_n|\, \|v\| \Rightarrow \|[0, ..., 0, v]\, x\| \leq \|v\|$ (car $|x_n| \leq \|x\| = 1$)
Donc $N\left([0, ..., 0, v]\right) \leq \|v\|$ et :

$$\boxed{N([0, ..., 0, v]) = \|v\|}$$

I.E. $(A^*A)^* = A^*A \Rightarrow \underline{A^*A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})}$ (ensemble des matrices symétriques réelles)
$\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $X^*\left(A^*A\right) X = (AX)^*(AX) = \|AX\|^2 \geq 0$. Donc $A^*A \geq 0$ et :

$$\boxed{A^*A \text{ est symétrique positive.}}$$

Notons λ_1, ..., λ_p les valeurs propres distinctes de A^*A et $E_1, ..., E_p$ les sous-espaces propres respectifs de A^*A. Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de norme 1. Posons $X = \sum\limits_{k=1}^{p} X_k$ avec $X_k \in E_k$. On a alors :

$$\begin{aligned}
\|AX\| &= \sqrt{X^*A^*AX} = \sqrt{\langle X, A^*AX\rangle} \\
&= \sqrt{\left\langle \sum_{k=1}^{p} X_k, \sum_{k=1}^{p} \lambda_k X_k \right\rangle} \\
&= \sqrt{\sum_{k=1}^{p} \lambda_k \|X_k\|^2} \text{ (car les } X_k \text{ sont 2 à 2 orthogonaux)} \\
&\leq \sqrt{\varrho(A^*A)} \sqrt{\sum_{k=1}^{p} \|X_k\|^2} = \sqrt{\varrho(A^*A)}\, \|X\| = \sqrt{\varrho(A^*A)}. \text{ D'où :}
\end{aligned}$$

$\underline{N(A) \leq \sqrt{\varrho(A^*A)}}$
Soit X vecteur propre de norme 1 associé à la valeur propre $\sqrt{\varrho(A^*A)}$ de A^*A. Alors :
$\|AX\| = \sqrt{X^*A^*AX} = \sqrt{\langle X, A^*AX\rangle} = \sqrt{\varrho(A^*A)}\, \|X\| = \sqrt{\varrho(A^*A)}$. D'où :
$\underline{\sqrt{\varrho(A^*A)} \leq N(A)}$. On a montré :

$$\boxed{N(A) = \sqrt{\varrho(A^*A)}}$$

I.F. Vérifions que la norme d'une matrice A symétrique réelle est égale à $\max\limits_{\lambda \in Spec(A)} |\lambda| = \varrho(A)$. Notons $\lambda_1, ..., \lambda_p$ les valeurs propres distinctes de A et $E_1, ..., E_p$ les sous-espaces propres associés.

Soit X de $\mathbb{R}^n$ de norme 1 et posons $X = \sum\limits_{k=1}^{p} X_k$ avec $X_k \in E_k$.

$\|AX\| = \left\| \sum_{k=1}^{p} AX_k \right\| = \left\| \sum_{k=1}^{p} \lambda_k X_k \right\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{p} \lambda_k^2 \|X_k\|^2}$ (d'après le théorème de Pythagore)

$\leq \varrho(A) \sqrt{\sum_{k=1}^{p} \|X_k\|^2} = \varrho(A)$. D'où $N(A) \leq \varrho(A)$.

Soit X de $\mathbb{R}^n$ de norme 1 associé à une valeur propre λ de plus grande valeur absolue.
Alors $\|AX\| = \|\lambda X\| = \varrho(A)\|X\| = \varrho(A)$. D'où $N(A) \geq \varrho(A)$. Ce qui prouve : $\underline{N(A) = \varrho(A)}$

En particulier : $N(A^*A) = \varrho(A^*A)$
Comme $\varrho(A^*A) = N(A)^2$, on a montré :

$$\boxed{\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ N(A^*A) = N(A)^2}$$

Partie II - Conditionnement

II.A. Posons $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ \|A\|_\infty = \max_{i,j \in \{1,...,n\}} |a_{ij}|$. Alors $\|\ \|_\infty$ est une norme équivalente à N car $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est de dimension finie. d'où $\exists \alpha > 0$, $\|\ \|_\infty \leq \alpha N$.

On en déduit que si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $N(A) < 1$, $\forall k \in \mathbb{N}$,
$\|A^k\|_\infty \leq \alpha N(A^k) \leq \alpha N(A)^k$, ce qui montre que $\forall i, j \in \{1, ..., n\}$,
$\left|\left(A^k\right)_{i,j}\right| \leq \alpha N(A)^k$ et donc que $\left(A^k\right)$ tend vers 0 et que $\sum_{k \geq 0} \left(A^k\right)_{i,j}$ est une série numérique absolument convergente. D'où :

$\forall i, j \in \{1, ..., n\}$, $\left(\sum_{k=0}^{m} \left(A^k\right)_{i,j}\right)$ est une suite convergente, ce qui montre que :

$$\boxed{\text{la suite } \left(\sum_{k=0}^{m} A^k\right) = (S_m) \text{ converge vers une matrice } U.}$$

L'on $\forall m \in \mathbb{N}$, $(I_n - A) S_m = S_m (I_n - A) = I_n - A^{m+1}$. En faisant tendre m vers $+\infty$, on obtient :
$(I_n - A) U = U (I_n - A) = I_n$. D'où :

$$\boxed{I_n - A \text{ est inversible et } (I_n - A)^{-1} = U = \sum_{k=0}^{+\infty} A^k}$$

II.B. $A\left(I_n - A^{-1}(A - B)\right) = A - (A - B) = B$. Donc :
$A^{-1}B = I_n - A^{-1}(A - B)$. Or $A^{-1}B$ n'est pas inversible, d'où $\exists Y \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ tel que $A^{-1}BY = 0$ et $\|Y\| = 1$.

On a alors $A^{-1}BY = Y - A^{-1}(A - B) Y \Rightarrow$
$A^{-1}(A - B) Y = Y \Rightarrow$
$\|A^{-1}(A - B) Y\| = \|Y\| = 1 \Rightarrow$
$N\left(A^{-1}(A - B)\right) \geq 1 \Rightarrow$
$1 \leq N\left(A^{-1}(A - B)\right) \leq N\left(A^{-1}\right) N(A - B)$ (ce qui montre que $N(A - B)$ est non nul)
D'où $N(A) \leq N(A) N\left(A^{-1}\right) N(A - B) \Rightarrow$

$$\boxed{\frac{N(A)}{N(A - B)} \leq cond(A)}$$

II.C. $A - M = [c_1, c_2, ..., c_{n-1}, p(c_n)]$; or $p(c_n) \in Vect(c_1, c_2, ..., c_{n-1})$, donc $(c_1, c_2, ..., c_{n-1}, p(c_n))$ est liée et $\underline{A - M \text{ n'est pas inversible}}$

D'après la question précédente, en posant $B = A - M$, l'on a :
$cond(A) \geq \dfrac{N(A)}{N(M)} \geq \dfrac{\|c_1\|}{\|v\|}$ (en utilisant les questions I.C. et I.D.); Donc :

$$\boxed{cond(A) \geq \frac{\|c_1\|}{\|v\|}}$$

Partie III - Matrices de type VDM

IIIA Par définition, $p(X^{n-1}q)$ réalise le minimum de la distance de $X^{n-1}q$ à H. D'où :
$\|X^{n-1}q - p(X^{n-1}q)\| = \min_{u \in H} \|X^{n-1}q - u\| \Rightarrow$

$$\boxed{\forall u \in H,\ \|v\| \leq \|X^{n-1}q - u\|}$$

Soit $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, unitaire; alors $P = X^{n-1} + Q$ où $Q \in \mathbb{R}_{n-2}[X]$ et, si l'on désigne maintenant par X la matrice $diag\,(x_1, ...x_n)$:
$\|P(X)q\| = \|X^{n-1}q - (-Q)(X)q\|$. Or $(-Q)(X)q \in Vect\,(q, Xq, ..., X^{n-2}q) = H$ et d'après la question précédente :

$$\boxed{\|v\| \leq \|P(X)q\|}$$

III.B. L'on a vu, dans la question II.C. que, comme $A \in GL_n(\mathbb{R})$:
$cond(A) \geq \dfrac{\|c_1\|}{\|v\|}$ où $c_1, ...c_n$ désignent les colonnes de A, p est le projecteur orthogonal sur $Vect(c_1, ..., c_{n-1})$ et $v = c_n - p(c_n)$. Ici $c_1 = q$ et $Vect(c_1, ..., c_{n-1}) = H = Vect(q, Xq, ..., X^{n-2}q)$. D'où :
$cond(A) \geq \dfrac{\|q\|}{\|v\|} \geq \dfrac{\|q\|}{\|P(X)q\|}$ où $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, unitaire.
Or $\|P(X)q\| \leq N(P(X))\,\|q\|$ (d'après I.A.) et $P(X) \neq 0$ (car sinon $X^{n-1}q \in H$ et $A \notin GL_n(\mathbb{R})$).
Donc $cond(A) \geq \dfrac{1}{N(P(X))}$. or $N(P(X)) = \max_{\lambda \in Spec(P(X))} |\lambda|$ (questionI.F.)
En outre, $P(X) = \begin{pmatrix} P(x_1) & & \\ & . & \\ & & P(x_n) \end{pmatrix}$ et $Spec(P(X)) = \{P((x_1), ..., P((x_n)\}$.
Donc : $\max_{\lambda \in Spec(P(X))} |\lambda| = \max\{|P((x_1)|, ..., |P((x_n)|\} \leq \sup_{x \in [-1,1]} |P(x)|$ car $x_1, ..., x_n \in [-1, 1]$.
On a donc montré :

$$\boxed{cond(A) \geq \frac{1}{\sup\limits_{x \in [-1,1]} |P(x)|}}$$

III.C. L'on a bien $\forall \theta \in \mathbb{R},\ T_0(\cos\theta) = 1$ et $T_1(\cos\theta) = \cos\theta$
Supposons que, pour $k \in \{0, .., n\}$, $n \geq 1$, $\forall \theta \in \mathbb{R},\ T_k(\cos\theta) = \cos k\theta$ (hypothèse de récurrence).
Alors $\forall \theta \in \mathbb{R},\ T_{n+1}(\cos\theta) = 2\cos\theta \times T_n(\cos\theta) - T_{n-1}(\cos\theta)$
$= 2\cos\theta \times \cos n\theta - \cos(n-1)\theta$
$= (\cos(n+1)\theta + \cos(n-1)\theta) - \cos(n-1)\theta$
$= \cos(n+1)\theta$ et la propriété est donc vraie au rang $n+1$. Donc :

$$\boxed{\forall \theta \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N},\ T_n(\cos\theta) = \cos n\theta}$$

Soit $x \in [-1, 1]$; posons $\theta = \arccos x \Leftrightarrow x = \cos\theta$ et $\theta \in [0, \pi]$.
On a alors $T_n(x) = T_n(\cos\theta) = \cos n\theta \Rightarrow |T_n(x)| \leq 1$. L'on a montré :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ \sup_{x \in [-1,1]} |T_n(x)| \leq 1}$$

III.D. L'on a $d^\circ T_0 = 0$, $d^\circ T_1 = 1$. Une récurrence simple montre que $d^\circ T_n = n$.

Le coefficient dominant de T_1 est 1. Une récurrence simple montre que le coefficient dominant de T_n est 2^{n-1} pour $n \geq 1$.

Donc :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ d^\circ T_n = n \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, \text{ le coefficient dominant de } T_n \text{ est } 2^{n-1}.}$$

III.E. D'après la question précédente, $\dfrac{T_{n-1}}{2^{n-2}}$ est de degré $n-1$, unitaire. Donc, d'après III.B. :

$$cond(A) \geq \frac{1}{\sup\limits_{x\in[-1,1]} \left| \dfrac{T_{n-1}(x)}{2^{n-2}} \right|} \geq 2^{n-2} \text{ (d'après III.C.)}$$

On a montré :

$$\boxed{cond(A) \geq 2^{n-2}}$$

Partie IV - Matrices de Hankel

IV.A. Notons $b_1, ..., b_n$ les colonnes de B. Elles forment une base b de $\mathbb{R}^n$.

En utilisant le procédé d'orthogonalisation de Schmidt, on sait former une base $q = (q_1, ..., q_n)$ orthonormée telle que $\forall i \in \{1, 2, .., n\}, Vect(b_1, ...b_i) = Vect(q_1, ...q_i)$.

Soit Q la matrice $[q_1, q_2, ..., q_n]$. Alors q orthonormée $\Leftrightarrow Q$ orthogonale.

Si l'on pose $e = (e_1, ..., e_n)$, B est la matrice de passage de e à b, Q est la matrice de passage de e à q et Q^{-1} est la matrice de passage de q à e. Donc BQ^{-1} est la matrice de passage de q à b. Posons $R = BQ^{-1}$. Alors R est inversible car c'est la matrice de passage de q à b.

La $i-ième$ colonne de R est formée des composantes de b_i dans la base q. Comme $\forall i \in \{1, ..., n\}, b_i \in Vect(q_1, ...q_i)$, R est triangulaire supérieure. Donc :

$$\boxed{B = QR \text{ avec } Q \in O(n) \text{ et } R \text{ triangulaire supérieure inversible}}$$

IV.B. On sait qu'il existe $P \in O(n)$ telle que $A' = P^*AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & (0) \\ & . & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix}$ et comme A est définie positive, $\forall i \in \{1, ..., n\}, \lambda_i > 0$.

Posons $B' = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & & (0) \\ & . & \\ (0) & & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix} \in GL_n(\mathbb{R})$. Alors $A = PA'P^* = PB'^2P^* = PB'P^*PB'P^*$.

Posons $B = PB'P^*$. Alors $B^* = B$ et :

$$\boxed{A = B^*B \text{ avec } B \in GL_n(\mathbb{R})}$$

D'après IV.A., il existe $Q \in O(n)$ et R triangulaire supérieure inversible telles que $B = QR$. D'où : $A = R^*Q^*QR = R^*R$ (car $Q^{-1} = Q^*$).

Donc :

$$\boxed{A = R^*R \text{ avec } R \text{ triangulaire supérieure inversible}}$$

IV.C. L'on a $\forall i, j \in \{1, ..., n\}, \langle c_i, c_j \rangle = \dfrac{1}{r_{11}^2} \left\langle \begin{pmatrix} r_{1i} \\ . \\ r_{ii} \\ (0) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} r_{1j} \\ . \\ r_{jj} \\ (0) \end{pmatrix} \right\rangle$

$$= \frac{1}{r_{11}^2} \sum_{k=1}^{\min(i,j)} r_{ki} r_{kj}.$$

Or $A = R^*R$; d'où $\forall i, j \in \{1, ..., n\}, a_{ij} = \alpha_{i+j-1} = \sum\limits_{k=1}^{n} r_{ik}^* r_{kj} = \sum\limits_{k=1}^{\min(i,j)} r_{ki} r_{kj}$. donc :

$$\boxed{\forall i, j \in \{1, ..., n\}, \langle c_i, c_j \rangle = \frac{\alpha_{i+j-1}}{r_{11}^2}}$$

D'où : $\forall i,j \in \{1,...,n-1\}$, $\langle c_{i+1}, c_j\rangle = \dfrac{\alpha_{i+j}}{r_{11}^2}$ et$\langle c_i, c_{j+1}\rangle = \dfrac{\alpha_{i+j}}{r_{11}^2}$, ce qui montre :

$$\boxed{\forall i,j \in \{1,...,n-1\}\,,\ \langle c_{i+1}, c_j\rangle = \langle c_i, c_{j+1}\rangle}$$

IV.D. R étant triangulaire supérieure et inversible, $r_{11}^{-1}R$ l'est aussi :
- $\forall i \in \{1,...,n-1\}$, $c_i \in Vect\,(e_1,...,e_{n-1})$
- ses colonnes $c_1,...c_{n-1}$ sont linéairement indépendantes

Comme $\dim Vect\,(e_1,...,e_{n-1}) = n-1$, $(c_1,...c_{n-1})$ est une base de $Vect\,(e_1,...,e_{n-1})$ et

$$\boxed{Vect\,(c_1,...,c_{n-1}) = Vect\,(e_1,...,e_{n-1})}$$

IV.E. On a donc $(c_1,...,c_{n-1},e_n)$ est une base de $\mathbb{R}^n$.

Analyse : si l'on désigne par T l'application associée à la matrice T, on a $T(c_1)=c_2$, $T(c_2)=c_3$, $T(c_{n-1})=c_n$ et $\forall i \in \{1,...,n-2\}$, $\langle T(e_n), c_i\rangle = \langle T^*(e_n), c_i\rangle$

$$= e_n^* T c_i$$
$$= e_n^* c_{i+1} = 0 \text{ car } e_n \in Vect\,(c_1,...,c_{n-1})^\perp$$

Donc $T(e_n) \in Vect\,(c_1,...,c_{n-2})^\perp = Vect\,(e_1,...,e_{n-2})^\perp = Vect(e_{n-1},e_n)$. On peut donc poser : $T(e_n) = \lambda e_{n-1} + \mu e_n$.

On a alors :

$\langle T(e_n), c_{n-1}\rangle = \langle \lambda e_{n-1} + \mu e_n, c_{n-1}\rangle = \lambda \langle e_{n-1}, c_{n-1}\rangle$ et $\langle T^*(e_n), c_{n-1}\rangle = \langle e_n, T\,(c_{n-1})\rangle = \langle e_n, c_n\rangle$

D'où $\lambda = \dfrac{\langle e_n, c_n\rangle}{\langle e_{n-1}, c_{n-1}\rangle}$

Enfin : $\langle T(e_n), e_n\rangle = \mu$ et $\langle T^*(e_n), e_n\rangle = \langle e_n, T(e_n)\rangle = \mu$

Synthèse : soit T l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ défini par :

$T(c_1)=c_2, ..., T(c_{n-1}) = c_n$, $T(e_n) = \dfrac{\langle e_n, c_n\rangle}{\langle e_{n-1}, c_{n-1}\rangle} e_{n-1}$ (j'ai choisi $\mu = 0$)

Posons pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $x = \sum\limits_{k=1}^{n-1} \lambda_k c_k + \lambda_n e_n$. Alors :

$$\begin{aligned}
\langle T(e_n), x\rangle &= \left\langle T(e_n), \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k c_k + \lambda_n e_n \right\rangle = \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k \langle T\,(e_n)\,, c_k\rangle + \lambda_n \langle T\,(e_n)\,, e_n\rangle \\
&= \lambda_{n-1} \left\langle \frac{\langle e_n, c_n\rangle}{\langle e_{n-1}, c_{n-1}\rangle} e_{n-1}, c_{n-1} \right\rangle + \lambda_n \left\langle \frac{\langle e_n, c_n\rangle}{\langle e_{n-1}, c_{n-1}\rangle} e_{n-1}, e_n \right\rangle \\
&= \lambda_{n-1} \langle e_n, c_n\rangle
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle T^*(e_n), x\rangle &= \left\langle e_n, \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k T(c_k) + \lambda_n T(e_n) \right\rangle = \sum_{k=1}^{n-1} \lambda_k \langle e_n, c_{k+1}\rangle + \lambda_n \langle e_n, T(e_n)\rangle \\
&= \lambda_{n-1} \langle e_n, c_n\rangle + \lambda_n \left\langle e_n, \frac{\langle e_n, c_n\rangle}{\langle e_{n-1}, c_{n-1}\rangle} e_{n-1} \right\rangle \\
&= \lambda_{n-1} \langle e_n, c_n\rangle
\end{aligned}$$

D'où $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $\langle T(e_n), x\rangle = \langle T^*(e_n), x\rangle \Rightarrow T(e_n) = T^*(e_n)$

On a donc montré :

$$\boxed{\exists T \in \mathcal{M}_n\,(\mathbb{R}) \text{ telle que } \forall k \in \{1,...,n-1\}\,,\ T(c_k) = c_{k+1} \text{ et } T(e_n) = T^*(e_n).}$$

IV.F. On a alors $r_{11}^{-1}R = [c_1, c_2, ..., c_n]$ avec $c_1 = e_1$, $c_2 = Tc_1 = Te_1$ et par une récurrence simple : $c_k = T^{k-1}c_1 = T^{k-1}e_1$ pour $k \in \{1,...,n\}$. Donc :

$$\boxed{r_{11}^{-1}R = [e_1, Te_1, ..., T^{n-1}e_1]}$$

On a alors :

$\forall i,j \in \{0,...,n-2\}$, $\langle T\,(T^i\,(e_1))\,, T^j(e_1)\rangle = \langle T\,(c_{i+1})\,, c_{j+1}\rangle = \langle c_{i+2}, c_{j+1}\rangle$ et

$\langle T^*\,(T^i\,(e_1))\,, T^j(e_1)\rangle = \langle c_{i+1}, T\,(c_{j+1})\rangle = \langle c_{i+1}, c_{j+2}\rangle$ D'après IV.C.,

$$\boxed{\forall i,j \in \{0,...,n-2\}\,,\ \langle T\,(T^i\,(e_1))\,, T^j(e_1)\rangle = \langle T^*\,(T^i\,(e_1))\,, T^j(e_1)\rangle}$$

IV.G. Une base de $\mathbb{R}^n$ est $(e_1, Te_1, T^2e_1, ..., T^{n-2}e_1, e_n) = (f_1, ..., f_n)$. L'égalité précédente traduit l'égalité des valeurs des 2 formes bilinéaires $(x,y) \to \langle Tx, y\rangle$ et $(x,y) \to \langle T^*x, y\rangle$ sur les couples (f_i, f_j) pour $i, j \leq n-1$. Calculons pour $i \leq n-1$, $\langle T^*f_i, e_n\rangle = \langle f_i, Te_n\rangle = \langle f_i, T^*e_n\rangle$ (d'après IV.E.)

$= \langle Tf_i, e_n\rangle$

Enfin $\langle T^*e_n, f_i\rangle = \langle Te_n, f_i\rangle$ pour tout $i \leq n$ (d'après IV.E.)

Donc les 2 formes bilinéaires $(x,y) \to \langle Tx, y\rangle$ et $(x,y) \to \langle T^*x, y\rangle$ sont égales sur tous les couples (f_i, f_j) pour $i, j \leq n$. Elles ont donc même matrice dans la base f et sont donc égales. D'où :

$$\boxed{\forall x, y \in \mathbb{R}^n,\ \langle Tx, y\rangle = \langle T^*x, y\rangle}$$

IV.H. L'égalité précédente équivaut à $\forall x, y \in \mathbb{R}^n, \langle Tx, y\rangle = \langle x, Ty\rangle$, ce qui signifie que :

$$\boxed{T \text{ est symétrique}}$$

IV.I. T étant symétrique, il existe $Q \in O(n)$ telle que : $Q^*TQ = \begin{pmatrix} x_1 & & (0) \\ & \cdot & \\ (0) & & x_n \end{pmatrix} \Rightarrow$

$T = Q\begin{pmatrix} x_1 & & (0) \\ & \cdot & \\ (0) & & x_n \end{pmatrix}Q^*$. On a alors : $\forall k \in \{0, ..., n-1\}$, $T^ke_1 = Q\begin{pmatrix} x_1^k & & (0) \\ & \cdot & \\ (0) & & x_n^k \end{pmatrix}Q^*e_1$ et, si l'on pose $q = r_{11}Q^*e_1$ et $X = \begin{pmatrix} x_1 & & (0) \\ & \cdot & \\ (0) & & x_n \end{pmatrix}$,

$[e_1, Te_1, ..., T^{n-1}e_1] = r_{11}^{-1}Q\,[q, Xq, ..., X^{n-1}q]$. D'où :

$$\boxed{R = QB \text{ avec } B = [q, Xq, ..., X^{n-1}q]\text{, matrice } VDM \text{ et } Q \text{ matrice orthogonale}}$$

IV.J. Montrons tout d'abord que pour une matrice non nulle C, $N(C) = N(C^*)$

$N(C^*C) = N(C)^2 \leq N(C^*)N(C) \Rightarrow N(C) \leq N(C^*)$ $(N(C) > 0)$

$N(CC^*) = N(C^*)^2 \leq N(C)N(C^*) \Rightarrow N(C^*) \leq N(C)$ $(N(C^*) > 0)$

Donc $N(C) = N(C^*)$

Cela est évidemment encore vrai si C est nulle.

D'après les questions précédentes, $A = R^*R = B^*Q^*QB = B^*B$ où B est VDM. On a alors :

$cond(A) = cond(B^*B) = N(B^*B)N(B^{-1}B^{*-1}) = N(B)^2N(B^{*-1})^2$ (d'après I.F.)

$= N(B)^2N(B^{-1})^2$ (d'après la remarque précédente); Donc, $cond(A) = cond(B)^2 \geq \left(\frac{\sqrt{3}}{8}2^{\frac{n}{2}}\right)^2 = 3.2^{n-6}$ (car B est VDM)

J'ai montré :

$$\boxed{cond(A) \geq 3.2^{n-6}}$$

IV.K. Le produit scalaire a pour matrice dans la base $(1, X, ..., X^{n-1})$ $\left(\int_0^1 t^{i-1}t^{j-1}dt\right)_{1\leq i,j\leq n} = \left(\frac{1}{i+j-1}\right)$ H_n. C'est une matrice de Hankel.

D'autre part, si $X = \begin{pmatrix} a_0 \\ \cdot \\ a_{n-1} \end{pmatrix} \neq 0$, $X^*H_nX = (P, P)$ où $P = \sum_{k=0}^{n-1} a_kX^k$ et $X^*H_nX = \int_0^1 P^2(t)dt > 0$ car P^2 est une fonction positive continue non nulle.

D'où :

$$\boxed{H_n \text{ est une matrice de Hankel définie positive}}$$

∞∞∞∞∞∞∞∞∞∞∞∞∞∞∞∞∞∞∞∞

Rédigé par

Pierre Bron, professeur de Spéciales TSI
Lycée Chaptal, 6, *allée Chaptal*, 22000 *StBrieuc*
Tel. 0296639414
Adresse électronique : *BRON.Pierre@wanadoo.fr*

à l'aide de Scientific Workplace